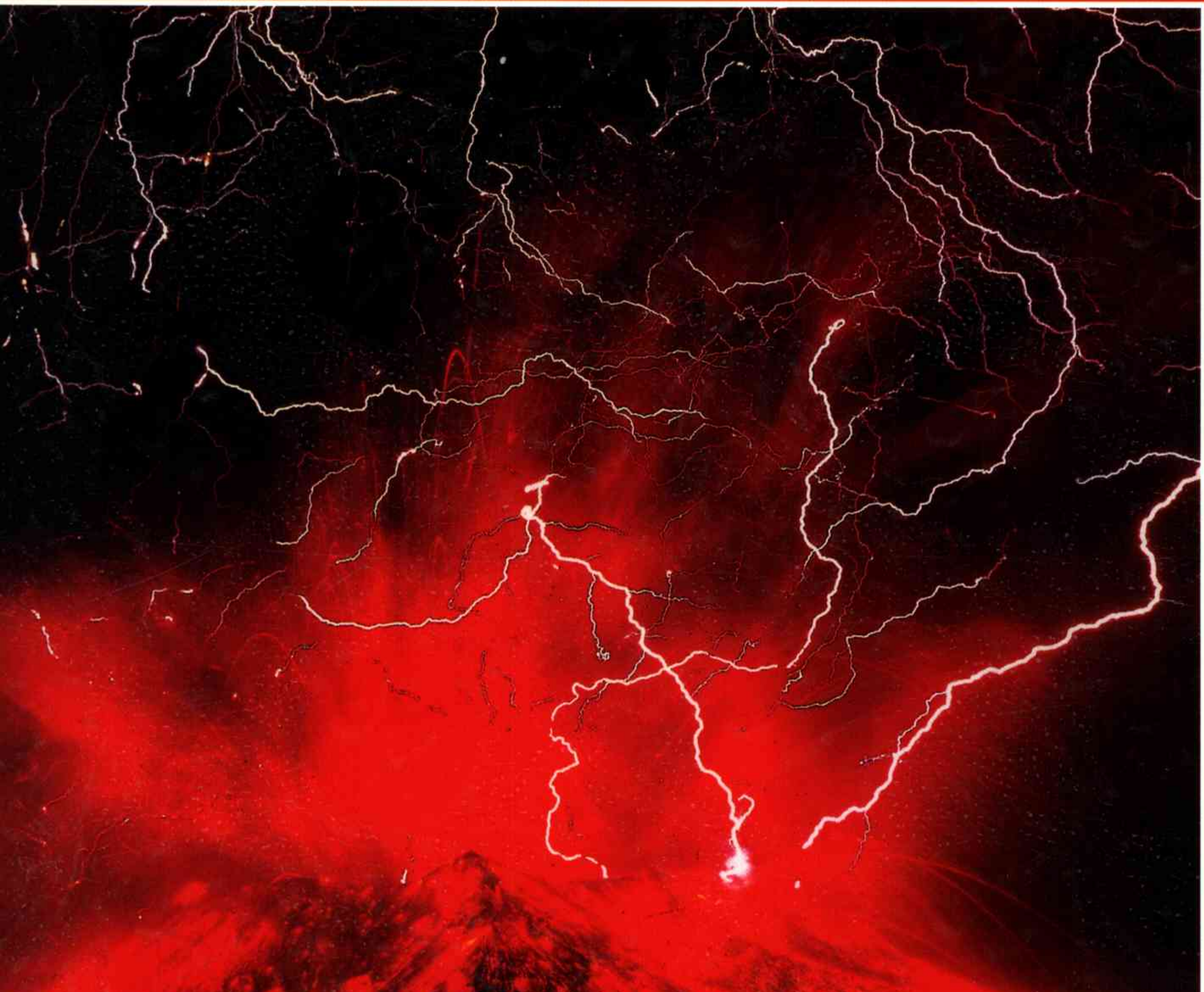
دیوید هالیدی / رابرت رزنیک / جرل واکر

مبانی فیزیک

ویرایش ششم (۲۰۰۱)

مبتکران

جلد سوم ـ الکتریسیته و مغناطیس



ترجمه: دکتر نعمت‌الله گلستانیان ـ دکتر محمود بهار

دیوید هالیدی / رابرت رزنیک / جرل واکر

مبانی فیزیک

ویرایش ششم (۲۰۰۱)

جلد سوم ـ الکتریسیته و مغناطیس

ترجمه: دکتر نعمت‌الله گلستانیان ـ دکتر محمود بهار

سرشناسه : هالیدی، دیوید Halliday, David

عنوان و پدیدآور : مبانی فیزیک (جلد سوم - الکتریسیته و مغناطیس))/ دیوید هالیدی، رابرت رزنیک، ترجمه، نعمت‌الله گلستانیان ، محمود بهار

مشخصات نشر : تهران؛ مبتکران؛ پیشروان ۱۳۹۱

مشخصات ظاهری : ۴ج.؛ مصور،جدول، نمودار

شابک : ۰ - ۳۹۸ - ۳۹۵ - ۹۶۴ - ۹۷۸

وضعیت فهرست نویسی : فیپا.

عنوان اصلی : Fundamentals of physics 6th ed

شناسه‌افزوده : رزنیک، رابرت Resnick , Robert

شناسه‌افزوده : واکر، جرل Walker Jear l

شناسه‌افزوده : بهار،محمود - مترجم

رده‌بندی دیویی : ۲م ۲۰۲ / ۲۱ Qc

: ۵۳۰/۰۷۶

شماره کتابشناسی ملی : ۲۴۳۴۷

مبتکران (پروانه نشر: ۱۶۷/۱۰۲)

پیشروان (پروانه نشر: ۲۶۲۳)

مبانی فیزیک (جلد سوم - الکتریسیته و مغناطیس)

تألیف:دیوید هالیدی، رابرت رزنیک، و جرل واکر

ترجمه: دکترنعمت الله گلستانیان - دکتر محمود بهار

نوبت چاپ: سی ودوم ۱۳۹۱(چاپ هجدهم، ویراست ششم ۲۰۰۱)

شمارگان: ۲۰۰۰جلد

حروف نگاری: مبتکران

لیتوگرافی: کیان

چاپ: سهند

قیمت: ۱۳۵۰۰تومان

Fundamentals of physics
David Halliday / Robert Resnick / Jearl Walker

مرکزپخش: تهران میدان انقلاب، خیابان فخررازی،خیابان نظری، پلاک ۵۹،کدپستی ۱۳۱۴۷۶۴۹۶۱

تلفن: ۶۴۹۱ دورنگار۶۶۴۰۶۳۶۲

به نام خدا

فهرست

پیشگفتار مؤلفان

ویرایش ششم کتاب **مبانی فیزیک** به طور عمده نسخهٔ باز طراحی شده و بازنویسی شدهٔ ویرایش پنجم و شامل بسیاری مطالب است که نخستین بار توسط **دیوید هالیدی و رابرت رزنیک** نوشته شده است. تقریباً مبنای تمام تغییرات صورت گرفته در کتاب پیشنهادهای مدرسان و دانشجویان استفاده کننده از ویرایش پنجم و هم‌چنین، نظر مرور کنندگان دستنوشته‌های ویرایش ششم و پژوهش‌های به عمل آمده در زمینهٔ پیشرفت‌های آموزشی، بوده است. شما هم می‌توانید پیشنهادها و انتقادهای مثبت یا منفی خود را به نشانی **جان وایلی و پسران**[1]، یا **جِرل واکر**[2]، بفرستید. ممکن است نتوان به همهٔ پیشنهادهای شما پاسخ داد، اما تمام آنها نگهداری و مطالعه خواهند شد.

تغییرات طراحی و صفحه آرایی کتاب

◀ ***آرایش گسترده‌تر*** ویرایش‌های پیشین کتاب به صورت دو ستونی چاپ شده بودند که موجب ایجاد زحمت برای بسیاری دانشجویان و مدرسان شده بود. در این ویرایش، مطالب متن در یک ستون درج شده‌اند و فرصت استفاده از حاشیه برای یادداشت کردن فراهم شده است.

◀ ***تدوین جمع و جورتر*** ایراد مشترک همهٔ کتاب‌های درسی آن است که مطالب زیادی را شامل می‌شوند. برای پاسخگویی به این انتقاد، ویرایش ششم به دو صورت زیر خلاصه‌تر شده است:

۱. مطالب مربوط به نسبیت خاص و فیزیک کوانتومی از فصل‌های آغازی به فصل‌های پایانی کتاب، که ویژهٔ همین مطالب است، منتقل شده‌اند.

۲. مسأله‌های نمونهٔ اصلی در جای خود حفظ شده و مسأله‌های نمونهٔ مهم‌تر، که به طور خاص برای این کتاب فراهم شده‌اند، در پایان فصل تحت عنوان مسأله‌های تکمیلی مطرح شده‌اند (دربارهٔ مسأله‌های تکمیلی توضیح داده خواهد شد).

◀ ***نمادگذاری برداری*** بردارها به جای استفاده از حروف سیاه (مانند **F**)، با نشانهٔ پیکان در بالای حروف نازک (مانند $\vec{F}$) نشان داده شده‌اند.

◀ ***تأکید روی یکاهای متریک*** به جز در فصل ۱ (که در آن دستگاه‌های گوناگون یکا مطرح شده‌اند) و برخی مسأله‌های خاص بیسبال (که در آن یکاهای مرسوم انگلیسی به کار رفته‌اند)، تقریباً همه جا از یکاهای متریک استفاده شده است.

◀ ***ترتیب ساختاری مسأله‌ها*** تکلیف‌های پایان هر فصل تقریباً برحسب مشکل بودن مرتب، و با عنوان‌های بخش‌های مندرج در فصل گروه‌بندی شده‌اند.

تغییرات روشهای آموزشی

◀ ***روش استدلالی*** هدف عمدهٔ کتاب این است که به دانشجویان بیاموزد چگونه تلاش کنند تا از راه استدلال مبتنی بر اصول بنیادی به حل یک مسأله دست پیدا کنند. گرچه در کتاب تعدادی مسأله‌های پیچ و خم‌دار وجود دارد، اما در بیشتر مسأله‌ها روی استدلال تأکید شده است.

◀ ***نکته‌های کلیدی در مسأله‌های نمونه*** مرحله‌های حل همهٔ ۳۶۰ مسألهٔ نمونهٔ کتاب به خاطر آغاز شدن با یک یا چند **نکتهٔ کلیدی** مبتنی بر اصول بنیادی، بازنویسی شده‌اند.

◀ ***راه حل‌های طولانی مسأله‌های نمونه*** مرحله‌های حل کردن بسیاری از مسأله‌های نمونه طولانی‌تر شده‌اند، زیرا برای رسیدن به پاسخ‌ها به روش گام به گام از نکته‌های کلیدی استفاده شده است. این عمل اغلب به تکرار استدلالهای ارائه شده در مسأله‌های نمونهٔ پیشین منجر شده است. به عنوان مثال، مسأله‌های نمونهٔ ۸-۳ و ۱۰-۲ را ببینید.

◀ ***مسأله‌های کاربردی*** این مسأله‌ها که از مقاله‌های پژوهشی منتشر شده گرفته شده‌اند، در برخی جاها به صورت مسأله‌های نمونه یا مسأله‌های پایان فصل مطرح شده‌اند. به عنوان مثال، مسألهٔ نمونهٔ ۱۱-۶، و مسأله‌های ۶۴، پایان فصل ۴ و ۵۶، پایان فصل ۱۰ را ببینید. به عنوان مثالی از مسأله‌هایی که به صورت بیان حادثه‌های طبیعی ارائه شده‌اند. مسأله‌های ۴، ۳۲ و ۴۸ فصل ۶ را ببینید.

تغییرات محتوایی

◀ ***فصل ۵ دربارهٔ نیرو و حرکت*** این فصل شامل توضیح‌های روشنی دربارهٔ نیروی گرانشی، وزن و نیروی عمودی است.

◀ ***فصل ۷ دربارهٔ انرژی جنبشی و کار*** این فصل با تعریف ساده‌ای از انرژی آغاز می‌شود و سپس به تعریف انرژی جنبشی، کار، قضیهٔ کار - انرژی جنبشی می‌پردازد. این تعریف‌ها در مقایسه با ویرایش پنجم بیشتر در رابطهٔ تنگاتنگ با قانون دوم نیوتون مطرح شده‌اند تا سازگاری با ترمودینامیک.

◀ ***فصل ۸ دربارهٔ پایستگی انرژی*** در این فصل از توضیح بیشتر دربارهٔ کار

1. John Wiley & Sons (http:// www.wiley.com/college/hrw).

2. Jearl Walker (mail adress: Physics Department, Cleveland State University, Cleveland OH 44115 USA, or email adress: physics @ wiley.com)

انجام شده توسط نیروی ناپایستار پرهیز شده و در عوض، تبدیل انرژی ناشی از نیروی ناپایستار مورد بحث قرار گرفته است.

- ***فصل ۱۰ دربارهٔ برخورد*** حالت عمومی برخوردهای ناکشسان یک بعدی پیش از حالت ویژهٔ برخوردهای کشسان یک بعدی شرح داده شده‌اند.
- ***فصل‌های ۱۶، ۱۷ و ۱۸ دربارهٔ حرکت هماهنگ ساده و موجها*** این موضوعهای مشکل به خاطر درک آسانتر دانشجویان بازنویسی شده‌اند.

فصل ۲۱ دربارهٔ آنتروپی در اینجا ماشین کارنو به صورت یک ماشین گرمایی ایده‌آل با بیشترین بازده معرفی شده است.

ویژگی‌های هر فصل

- ***معمای صفحهٔ سرآغاز فصل*** هر فصل کتاب با معمایی حیرت‌آور آغاز می‌شود تا دانشجو را برای خواندن فصل ترغیب کند. توضیح‌های مربوط به موضوع در جایی از فصل آمده است.
- ***خودآزمایی‌ها*** به این وسیله از دانشجو پرسیده می‌شود «آیا با توجه به استدلال‌های ارائه شده در متن درس، یا مسألهٔ نمونه‌ای که در اینجا حل شده‌است، می‌توانید به این پرسش پاسخ بدهید؟» اگر پاسخ منفی باشد، پیش از ادامه دادن فصل بهتر است دانشجو مطالب خوانده شده را دوباره مرور کند. به عنوان مثال، خودآزمایی ۳ فصل ۵ و خودآزمایی ۱ فصل ۶ را ببینید. پاسخ همهٔ خودآزمایی‌ها در پایان کتاب آمده است.
- ***مسأله‌های نمونه*** این مسأله‌ها برای کمک به دانشجو جهت ساماندهی مفهوم‌های بنیادی متن درس و بالا بردن سطح مهارت‌ها در حل کردن مسأله انتخاب شده‌اند. در هر مسألهٔ نمونه به روش گام به گام از یک یا چند نکتهٔ کلیدی برای حل کردن مسأله استفاده شده است.
- ***روشهای مسأله حل کردن*** این بخش شامل راهنمایی‌های مفید برای دانشجویان مبتدی فیزیک در حل کردن مسأله‌ها و پرهیز کردن از اشتباه‌های متعارف است.
- ***مرور و خلاصهٔ مطالب فصل*** این بخش شامل خلاصه‌ای از رئوس مطالب و مفهوم‌های بنیادی فصل است، اما دانشجو را از خواندن متن درس بی‌نیاز نمی‌کند.
- ***پرسش‌ها*** پرسش‌ها مانند خودآزمایی‌ها هستند و برای پاسخ دادن، بیشتر به استدلال و درک مطالب نیاز دارند تا انجام دادن محاسبات. پاسخ‌های پرسش‌ها در پایان کتاب آمده‌اند.
- ***تمرین‌ها و مسأله‌ها*** تکلیف‌های پایان هر فصل تقریباً برحسب مشکل بودن مرتب، و تحت عنوان بخش‌ها گروه‌بندی شده‌اند. پاسخ‌های تمرین‌ها و مسأله‌های با شمارهٔ فرد در پایان کتاب آمده‌اند.

مسأله‌های تکمیلی در برخی فصل‌ها در پایان تمرین‌ها و مسأله‌ها یک یا چند مسألهٔ تکمیلی ارائه شده است. این مسأله‌ها برحسب عنوان بخش‌ها مرتب نشده‌اند و اغلب آنها به فیزیک کاربردی مربوط اند*.

---

* در پیشگفتار مؤلفان مطالب دیگری، از جمله تشکر و قدردانی از عدهٔ زیادی افراد سهیم در تألیف و تدوین کتاب، آمده است، که در اینجا از ذکر آنها خودداری می‌شود. ـ م.

پیشگفتار مترجمان

برنامه‌ریزی منطبق با نیازهای دانش و فناوری امروزی کشور، هماهنگ کردن برنامه‌های آموزشی در دانشگاه‌ها و مؤسسه‌های آموزش عالی و معرفی و پیشنهاد منبع‌های درسی ارزنده و معتبر، از جملهٔ هدف‌های اساسی شورای عالی برنامه‌ریزی و کمیته‌های تخصصی وابسته به آن را تشکیل می‌دهد. بدین جهت، کتاب **مبانی فیزیک**، تألیف **هالیدی ـ رزنیک**، به عنوان کتاب مرجع برای تدریس فیزیک پایه در رشته‌های علوم پایه و مهندسی انتخاب شده است.

اینجانبان همواره امیدوار بوده‌ایم که بتوانیم در همکاری و همگامی با هدف‌های **مرکز نشر دانشگاهی** برای تأمین منبع‌های درسی معتبر و مورد تأیید صاحبنظران و استادان محترم سهمی داشته باشیم. ترجمهٔ سه جلد کتاب **فیزیک**، تألیف هالیدی ـ رزنیک، ۱۹۷۷، و چاپ و انتشار آنها توسط مرکز نشر دانشگاهی در سال ۱۳۶۶، نشانی از تحقق آرزوهای‌مان بوده است. پس از انتشار این کتاب‌ها تصمیم گرفته شد کار ادامه پیدا کند و از این‌رو، برای ترجمهٔ ویرایش دوم (۱۹۸۶) و ویرایش سوم (۱۹۹۰) کتاب **مبانی فیزیک**، تألیف **هالیدی ـ رزنیک** اقدام شد. خوشبختانه، برگردان فارسی کتاب‌ها در سه جلد توسط **انتشارات مبتکران** به مرحلهٔ چاپ و انتشار رسید. استقبال خوانندگان عزیز از کتاب‌ها چنان بوده است که برخی مجلدهای آن تاکنون بیش از ۱۷ بار تجدید چاپ شده است.

امروزه اهمیت کتاب‌های فیزیک پایه به حدی است که گویی ناشران و مؤلفان بزرگ دنیا در زمینهٔ بالا بردن کیفیت و روز آمد کردن این کتاب‌ها با هم به‌رقابت پرداخته‌اند. در اهمیت تدوین این گونه کتاب‌ها همین قدر می‌توان گفت که فیزیکدانان و مؤلفان صاحب نامی، چون **مارک زیمانسکی**[1]، **فرانسیس سیرز**[2]، **هانس اوهانیان**[3]، **رابرت رزنیک**[4]، **ریموند سِروِی**[5]، **استفن گاسیوروویچ**[6]، **اوژن هِشت**[7]، **ریچارد ویدنر**[8]، **ریچارد فاینمن**[9]، و بسیاری دیگر، پس از سال‌ها تدریس دروس پیشرفتهٔ فیزیک، کسب تجربیات آموزشی و پژوهشی ارزنده و تألیف کتاب‌های تخصصی فیزیک در زمینه‌های مکانیک کوانتومی، نسبیت، فیزیک نوین، اپتیک و ترمودینامیک، دست به تألیف کتاب‌های فیزیک در سطح عمومی و پایه زده‌اند.

مؤلفان کتاب **مبانی فیزیک** نیز، تقریباً در هر چهار سال ویرایش تازه‌ای، شامل تغییرات اساسی در جهت تکامل و ارتقای سطح آموزشی کتاب به خوانندگان و دانشجویان عرضه کرده‌اند و اکنون خدای متعال را سپاس می‌گوییم که توفیق یافته‌ایم به ترجمهٔ ویرایش ششم کتاب **مبانی فیزیک**، چاپ سال ۲۰۰۱، بپردازیم و آن را به دانشجویان عزیز رشته‌های علوم پایه و مهندسی تقدیم کنیم.

ویرایش ششم نسبت به ویرایش‌های پیشین دارای تغییرات و همراه با اصلاحات قابل توجهی است. در این ویرایش، انسجام و سادگی مطالب، ارائهٔ روشهای آموزشی جالب، توجه به هدف‌های آموزشی و کاربردی، معرفی موضوع‌های تازه، تعداد زیاد مسأله‌های نمونه، خودآزمایی‌ها، پرسش‌ها، تمرین‌ها و مسأله‌های پایان فصل، صفحه‌آرایی شایسته و وجود شکل‌ها و عکس‌های آموزنده و با ارزش، از جمله اصلاحات به عمل آمده است، که توضیح بیشتر آن در پیشگفتار مؤلفان آمده است.

کتاب حاضر جلد سوم از دورهٔ چهارجلدی ترجمهٔ **مبانی فیزیک** و شامل ۱۳ فصل، از فصل ۲۲ تا فصل ۳۴ کتاب است، که برنامهٔ فیزیک پایه (۲) رشته‌های علوم پایه و فیزیک (الکتریسیته و مغناطیس) رشته‌های مهندسی را در بر می‌گیرد. در ترجمهٔ کتاب با تکیه بر تجربه‌های کسب شده به مدت ۳۰ سال در زمینهٔ ترجمه و تألیف کتاب‌های عمومی و تخصصی فیزیک، تدریس فیزیک پایه و همکاری با مؤسسه‌های علمی و فرهنگی گوناگون، کوشیده‌ایم روانی و شیوایی مطالب را همراه با مفهوم و ارزش علمی آنها حفظ کنیم و جدیدترین شیوه‌های نگارش و برابر نهاده‌های واژه‌ها و اصطلاح‌های انگلیسی را به کار ببریم.

با اعتقاد به اینکه **در ترجمهٔ متن‌های علمی باید بیشتر انتقال علم مورد نظر باشد تا انتقال فرهنگ**، کوشش شده است تا حد امکان به جنبه‌های فرهنگی متن فارسی کتاب چهره‌ای آشناتر داده شود. از این‌رو، ضمن تلاش در تحقق این باور در ابعاد گوناگون، در موارد مقتضی به جای نامهای اشخاص و مکان‌های مندرج در متن اصلی از نامهای ایرانی استفاده شده‌است.

در متن کتاب، مطالب مهم با زمینهٔ خاکستری و فرمول‌های مهم با نشانهٔ مربع سیاه در سمت چپ فرمول، و مسأله‌های مشکل‌تر با نشانهٔ ستاره (*) مشخص شده‌اند.

در پایان کتاب، علاوه بر پیوست‌های متن اصلی و پاسخ‌های خودآزمایی‌ها، پرسش‌ها و تمرین‌ها و مسأله‌های با شمارهٔ فرد هر فصل، نمایه و معرفی کوتاه دانشمندان ذکر شده در متن اصلی، تعریف مبسوط‌تر واژه‌های

---

1. Mark W.Zemansky
2. Francis W.Sears
3. Hans C.Ohanian
4. Robert Resnick
5. Raymond A.Serway
6. Stephen Gasiorowicz
7. Eugen Hecht
8. Richard T.Weidner
9. Richard P.Feynman

کلیدی متن، تحت عنوان **فرهنگنامه** (GLOSSARY)، و معادل‌های برخی واژه‌های انگلیسی به کار رفته در متن، تحت عنوان **واژه‌نامهٔ** (DICTIONARY)، آمده است. در گزینش معادل‌ها کوشش شده است تا حد امکان واژه‌ها و اصطلاح‌ها برای خوانندگان آشنا باشد تا در حین مطالعه ابهامی پیش نیاید.

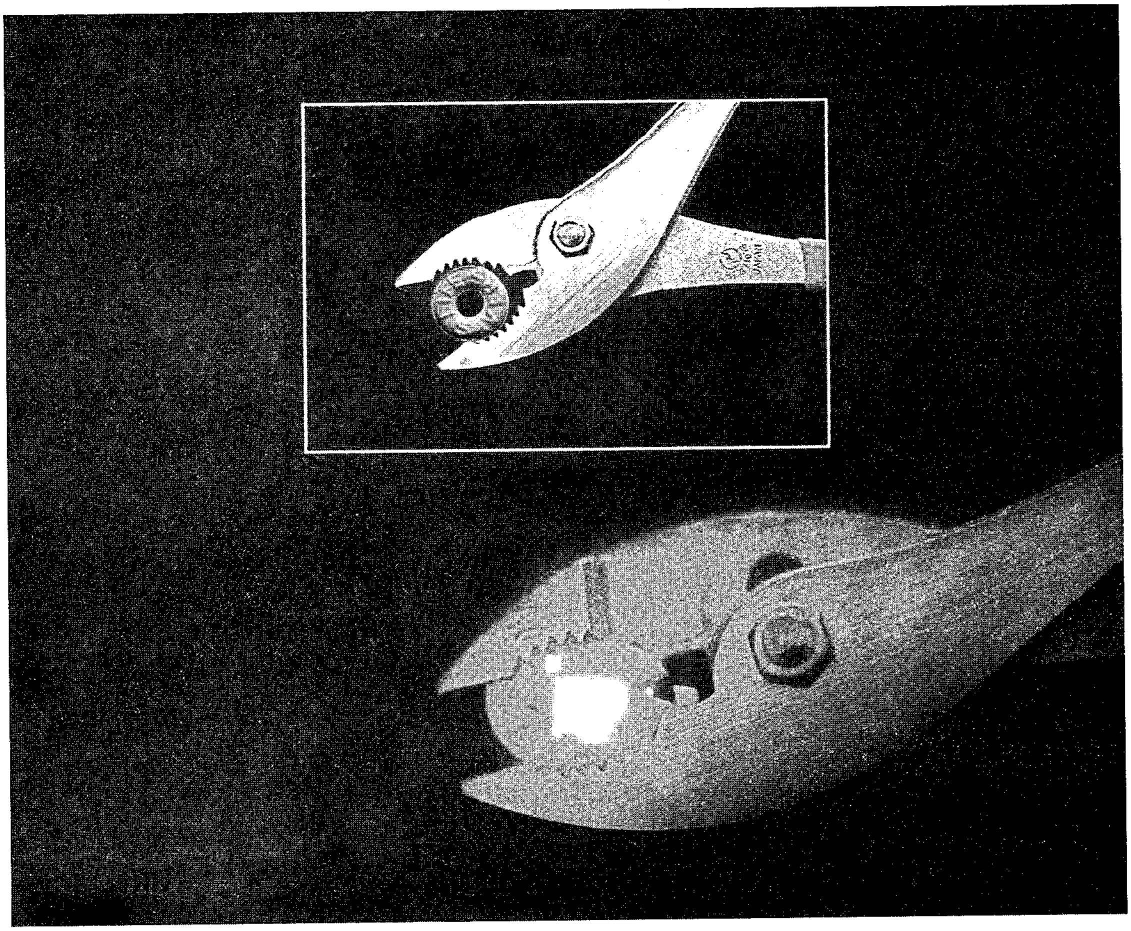
چاپ و نشر این کتاب توسط **انتشارات مبتکران** صورت گرفته است و بجاست از مدیر فعال و اهل دانش و فرهنگ این مؤسسه، **جناب آقای یحیی دهقانی** تشکر و قدردانی کنیم. هم‌چنین، از کارکنان انتشارات مبتکران، به ویژه خانم لیلا مهرعلی‌پور به خاطر حروف‌نگاری دقیق و صفحه‌آرایی مناسب و شایسته، آقای خدایار مبین به خاطر طراحی جلد و نظارت دقیق بر انتقال شکل‌ها و نمودارها، خانم مریم شیروانی به‌خاطر انتقال دقیق شکل‌ها و نمودارها و طراحی شکل‌های سرآغاز فصل‌ها، خانم مرضیهٔ کریمی به خاطر تکمیل و رفع کردن نواقص شکل‌های کتاب و خانم کبری مرادی به‌خاطر نظارت در آماده‌سازی امکانات چاپ کتاب، صمیمانه سپاسگزاریم.

امید است با ارائهٔ این خدمت، توفیق انجام دادن وظیفهٔ خود در قبال شیفتگان دانش فیزیک، دانش‌پژوهان و دانشجویان عزیز کشورمان را داشته باشیم. اذعان می‌کنیم که با همهٔ دقت و وسواسی که در کار ترجمه و تهیه و تدوین متن فارسی و نیز در مرحله‌های گوناگون تولید کتاب به کار رفته است، بی‌شک، کتاب عاری از خطا و لغزش نیست. تنها لطف و عنایت استادان، صاحبنظران و دانشجویان گرامی در یادآوری موارد لغزش می‌تواند کمک ارزنده‌ای در رفع و جبران کردن خطاها و کاستی‌ها باشد. پیشاپیش از این محبت و همکاری سپاسگزاری می‌کنیم.

نعمت‌الله گلستانیان ـ محمود بهار
اعضای هیئت علمی گروه فیزیک دانشگاه تربیت معلم تهران

۲۲

بار الکتریکی



اگر چشم‌های خود را در مدتی حدود ۱۵ دقیقه به تاریکی عادت دهید و سپس دوستتان در مقابل شما یک قرص نعنا بجود، در هر بار ملچ ملچ کردن، در دهان دوست خود درخش ضعیفی از نور آبی خواهید دید. (برای جلوگیری از کُند شدن دندان می‌توانید قرص را مطابق تصویر بالا، با انبردست خرد کنید).

چه چیزی باعث می‌شود این نور، که معمولاً «برق زدن» نام دارد، نمایان شود؟

در این فصل به این پرسش پاسخ داده خواهد شد.

۱ـ۲۲ الکترومغناطیس

فلاسفهٔ یونان باستان می‌دانستند که یک تکهٔ کهربا وقتی مالش داده شود خرده‌های کاه را می‌رباید. این رویداد کهن نقطهٔ آغاز راهی بود برای رسیدن به عصر الکترونیک، یعنی عصری که در آن زندگی می‌کنیم. اهمیت این رویداد در واژهٔ **الکترون** مشهود است، که از واژهٔ یونانی مربوط به **کهربا** گرفته شده است. در ضمن، یونانی‌ها مشاهده کرده بودند که برخی «سنگ‌ها»، که امروز به نام **ماگنتیت** معدنی شناخته می‌شوند، به طور طبیعی آهن را می‌ربایند.

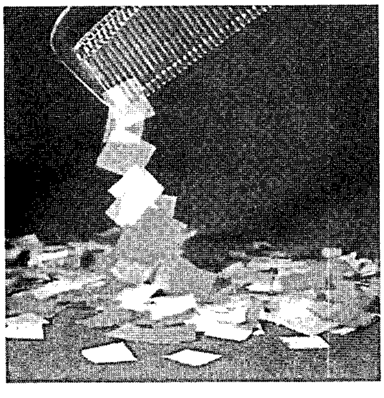
بر مبنای این مشاهدات ساده، علوم الکتریسیته و مغناطیس در طی قرن‌ها به طور مجزا تکامل یافتند، تا آنکه در سال ۱۱۹۹/۱۸۲۰* **هانس کریستیان اورستد**[۱] ارتباط میان آنها را کشف کرد و چنین توضیح داد: **جریان الکتریکی گذرنده از یک سیم می‌تواند عقربهٔ مغناطیسی را منحرف کند.** قابل توجه است که اورستد هنگامی به این کشف نایل شد که در کلاس درس مشغول انجام دادن آزمایش برای دانشجویان فیزیک بود.

دانش جدید **الکترومغناطیس** (دانشی مرکب از پدیده‌های الکتریکی و مغناطیسی) در بسیاری از کشورها بیش از پیش توسط پژوهشگران تکامل یافت. یکی از بهترین این پژوهشگران **مایکل فارادی**[۲] بود. او در واقع، آزمایشگری با استعداد و صاحب نبوغی سرشار در شهود و بصیرت فیزیکی بود. گواه نبوغ فارادی این واقعیت است که در یادداشت‌های آزمایشگاهی به جا مانده از او حتی یک معادله هم وجود ندارد. در اواسط قرن نوزدهم، **جیمز کلرک ماکسول**[۳] حاصل اندیشه‌های فارادی را همراه با بسیاری از نقطه نظرهای تازهٔ خود به شکل ریاضی در آورد و الکترومغناطیس را بر پایهٔ نظری معتبری بنا نهاد.

در جدول ۳۲ـ۱، قانون‌های اساسی الکترومغناطیس، که اکنون **معادله‌های ماکسول** نامیده می‌شوند، درج شده‌اند. در طی فصل‌های بعدی از این معادله‌ها استفاده خواهد شد، اما شما می‌توانید از هم اکنون نظری اجمالی به آنها بیندازید تا هدف ما را بدانید.

۲ـ۲۲ بار الکتریکی

اگر در هوای خشک روی قالی راه بروید، به محض تماس دادن دست خود با دستگیرهٔ فلزی دَر، جرقه ایجاد می‌شود. در پیام‌های بازرگانی تلویزیونی، اغلب، مسألهٔ «چسبندگی الکتروستاتیکی» مربوط به پوشاک را به ما یادآوری می‌کنند (شکل ۲۲ـ۱). در مقیاس وسیعتر در این زمینه، می‌توان آذرخش را نام برد که برای همه آشناست. هر یک از این پدیده‌ها حاکی از وجود مقدار زیادی **بارالکتریکی** است که در اشیای پیرامون و حتی در بدن ما، ذخیره شده‌اند. **بارالکتریکی**، مشخصه‌ای ذاتی از ذرات بنیادی تشکیل دهندهٔ اشیا است. این مشخصه جایی که ذرات وجود داشته باشند خود به خود با آنها همراه است.



شکل ۲۲ـ۱ چسبندگی الکتروستاتیکی پدیده‌ای الکتریکی است که در هوای خشک باعث می‌شود خرده‌های کاغذ به یکدیگر و به شانهٔ پلاستیکی، و هم چنین لباس‌های شما به بدن، بچسبند.

در هر شیء، معمولاً، بارهای الکتریکی زیادی پنهان است، زیرا شیء حاوی مقادیری مساوی از دو نوع بارالکتریکی مثبت و بار الکتریکی منفی است. به خاطر این تساوی بار ـ یا توازن بار ـ گفته می‌شود که یک شیء از نظر الکتریکی خنثی است؛ یعنی بار خالص ندارد. شیئی که دو نوع بار الکتریکی در حال توازن نداشته باشد، دارای بار خالص است، وقتی گفته می‌شود که یک شیء باردار شده است، منظور این است که بارالکتریکی نامتوازن یا بار الکتریکی خالص، دارد. میزان نامتوازن بودن بار همیشه در مقایسه با مقادیر کل بارهای مثبت و منفی موجود در شیء اندک است.

اشیای باردار با واردکردن نیرو به هم برهم کنش انجام می‌دهند. برای نشان دادن این موضوع، ابتدا میله‌ای شیشه‌ای را با مالش دادن یک سر آن با پارچهٔ ابریشمی، باردار می‌کنیم. در نقاط تماس میله و پارچهٔ ابریشمی مقدار کمی بارالکتریکی از یکی به دیگری منتقل می‌شود و خنثایی الکتریکی هر دو اندکی به هم می‌خورد. (پارچهٔ ابریشمی را روی میله مالش می‌دهیم تا تعداد نقاط تماس و در نتیجه مقدار بار منتقل شده، که باز هم

---

* عدد سمت راست ممیز نمایندهٔ سال هجری شمسی و عدد سمت چپ نمایندهٔ سال میلادی است. ـ م.

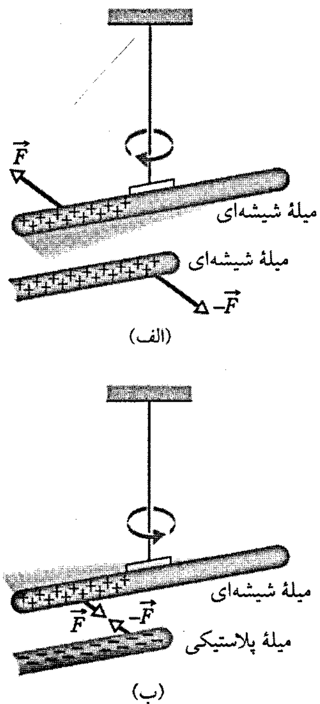
1. Hans Christian Oerested 2. Michael Faraday 3. James Clerk Maxwell

اندک است، افزایش پیدا کند).

اکنون، فرض کنید میلهٔ باردار را از نخی می‌آویزیم تا از نظر الکتریکی نسبت به محیط پیرامون منزوی شود و در نتیجه، بار آن نتواند تغییر کند. حال، اگر میلهٔ شیشه‌ای باردار مشابهی را به میلهٔ اول نزدیک کنیم (شکل ۲۲-۲ الف)، دو میله یکدیگر را می‌رانند؛ یعنی، هر میله تحت اثر نیروی وارد شده، از میلهٔ دیگر دور می‌شود. اما اگر یک میلهٔ پلاستیکی مالش داده شده با پوست خز را به میلهٔ شیشه‌ای آویخته شده نزدیک کنیم (شکل ۲۲-۲ ب)، دو میله یکدیگر را می‌ربایند؛ یعنی، هر میله تحت اثر نیروی وارد شده، به میلهٔ دیگر نزدیک می‌شود.

نتیجهٔ این دو آزمایش را با توجه به بارهای الکتریکی مثبت و منفی می‌توان درک کرد. وقتی میلهٔ شیشه‌ای را با پارچهٔ ابریشمی مالش می‌دهیم، شیشه مقداری بار منفی از دست می‌دهد و بارالکتریکی مثبت آن (مشخص شده با علامت + در شکل ۲۲-۲ الف) اندکی نامتوازن می‌شود. اما هنگامی که میلهٔ پلاستیکی را با پوست خز مالش می‌دهیم، پلاستیک مقدار کمی بار منفی نامتوازن (مشخص شده با علامت - در شکل ۲۲-۲ ب) به دست می‌آورد. با توجه به این دو آزمایش نتیجهٔ زیر حاصل می‌شود:

◀ بارهای الکتریکی همنام یکدیگر را می‌رانند و بارهای الکتریکی ناهمنام یکدیگر را می‌ربایند.

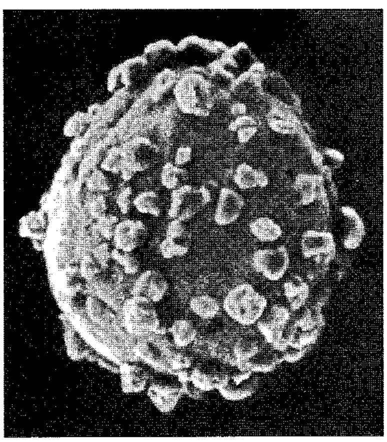


شکل ۲۲-۲ (الف) دو میلهٔ با بار الکتریکی همنام یکدیگر را می‌رانند. (ب) دو میلهٔ با بار الکتریکی ناهمنام یکدیگر را می‌ربایند. علامت‌های به علاوه بار خالص مثبت و علامت‌های منها بار خالص منفی را نشان می‌دهند.

در بخش ۲۲-۴ این قاعده به صورت کمّی، تحت عنوان قانون نیروی الکتروستاتیکی (یا نیروی الکتریکی) کولن میان بارهای الکتریکی ارائه خواهد شد. واژهٔ **الکتروستاتیک** برای تأکید بر این موضوع به کار می‌رود که بارهای الکتریکی نسبت به هم ساکن‌اند یا با سرعت بسیار کم حرکت می‌کنند.

نامها و علامت‌های «مثبت» و «منفی» برای بارهای الکتریکی، بنا به اختیار، توسط **بنجَمین فرانکلین**[1] انتخاب شده‌اند. او می‌توانست این نامها را عوض کند یا برای تمیز دادن دو نوع بار الکتریکی هر زوج مخالف دیگری به کار ببرد. (فرانکلین دانشمندی با شهرت بین المللی بود. دربارهٔ فرانکلین حتی گفته شده است که پیروزی‌های سیاسی او در فرانسه به هنگام جنگ‌های استقلال آمریکا به این جهت فراهم، و شاید امکان‌پذیر شد، که او دانشمندی صاحب نام بود).

خاصیت‌های جاذبه و دافعهٔ میان اجسام باردار در صنعت کاربردهای زیادی دارند، که از جملهٔ آنها می‌توان رنگ افشانی الکتروستاتیکی، گردنشانی، دودگیری کوره‌ها، جوهر پاشی چاپگرها، و فتوکپی را نام برد. شکل ۲۲-۳ یک دانهٔ ریز حامل مربوط به ماشین نسخه برداری زیراکس[2] را نشان می‌دهد که با ذرات یک گرد سیاه، به نام تونر[3]، پوشیده شده است. این ذرات به کمک نیروهای الکتروستاتیکی به دانه چسبیده‌اند. ذرات با بار منفی تونر، سرانجام از دانه‌های حامل خود به یک غلتک چرخان که تصویر با بار مثبت متن مورد نسخه برداری روی آن تشکیل شده است، جذب می‌شوند. آنگاه، یک ورقهٔ کاغذ باردار ذرات تونر را از روی غلتک جذب می‌کند و پس از پخته شدن و نشستن ذرات بر روی کاغذ، کپی مورد نظر به دست می‌آید.



شکل ۲۲-۳ تصویری از دانهٔ حامل ماشین نسخه‌برداری زیراکس، که با ذرات تونر پوشیده شده است. این ذرات در اثر جاذبهٔ الکتروستاتیکی به دانه چسبیده‌اند. قطر دانه در حدود $0.3\,mm$ است.

۲۲-۳ رسانا‌ها و عایق‌ها

در برخی مواد، نظیر فلزات، آب لوله‌کشی و بدن انسان، مقداری بار الکتریکی منفی می‌تواند به آزادی حرکت کند. این مواد **رسانا** نامیده می‌شوند. در موادی دیگر، نظیر شیشه، آب مقطر، و پلاستیک، هیچ بارالکتریکی منفی‌ای نمی‌تواند آزادانه حرکت کند. این مواد **نارسانا** یا **عایق** نام دارند.

اگر یک میلهٔ مسی را، که در دست گرفته‌ایم، با پشم مالش دهیم، میله نمی‌تواند باردار شود. زیرا بدن ما و میله هر دو رسانا هستند. مالش دادن باعث نامتوازن شدن بار روی میله می‌شود، اما بار اضافی میله بی‌درنگ از طریق بدن به کف اتاق متصل به سطح زمین منتقل و بار میله به سرعت خنثی می‌شود.

1. Benjamin Franklin
2. Xerox
3. toner

وقتی رساناها را در بین یک شیء باردار و سطح زمین قرار می‌دهیم، می‌گوییم شیء اتصال زمین شده است و هنگام خنثی کردن شیء (با حذف کردن بار مثبت یا بار منفی نامتوازن)، می‌گوییم شیء بی‌بار شده است. اگر به جای در دست گرفتن میلهٔ مسی آن را با یک دستهٔ عایق بگیریم، مسیر رسانندهٔ تا زمین را حذف می‌کنیم. در آن صورت، تا زمانی که مستقیماً به میله دست زده نشده است می‌توان آن را با مالش دادن باردار کرد.

خاصیت‌های رساناها و عایق‌ها به ساختار و ماهیت الکتریکی اتم‌های آنها مربوط است. اتم‌ها شامل **پروتون‌های** با بار مثبت، **الکترون‌های** با بار منفی، و **نوترون‌های** خنثی، هستند. پروتون‌ها و نوترون‌ها در هستهٔ مرکزی در کنار هم قرار گرفته‌اند.

بار الکتریکی یک الکترون با بار الکتریکی یک پروتون از نظر بزرگی مساوی اما از نظر علامت مخالف است. بنابراین، در یک اتم خنثی از نظر الکتریکی، تعداد الکترون‌ها با تعداد پروتون‌ها برابر است. الکترون‌ها در پیرامون هسته قرار دادند زیرا دارای بار الکتریکی مخالف با بار الکتریکی پروتون‌های هسته هستند و از این‌رو به سوی هسته جذب می‌شوند.

وقتی اتم‌های یک رسانا مانند مس، برای تشکیل شدن جسم جامد در کنار هم قرار می‌گیرند، برخی الکترون‌های لایهٔ خارجی (الکترون‌های با ضعیف‌ترین پیوند) به اتم‌های منفرد متصل نمی‌مانند و درون جسم جامد آزادانه به هر سو حرکت می‌کنند، و اتم‌های با بار مثبت (**یون‌های مثبت**) را به جا می‌گذارند. این الکترون‌های متحرک را **الکترون‌های رسانش** می‌نامند. در یک نارسانا الکترون‌های آزاد (اگر هم وجود داشته باشند) بسیار کم‌اند.

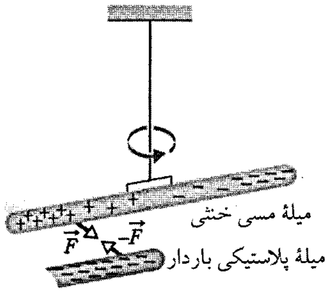
آزمایش مربوط به شکل ۲۲-۴ قابلیت تحرک بارهای الکتریکی را در یک رسانا نشان می‌دهد. میلهٔ پلاستیکی با بار منفی هر کدام از سرهای میلهٔ خنثای مسی منزوی را جذب می‌کند. آنچه اتفاق می‌افتد این است که الکترون‌های رسانش در سر نزدیک میلهٔ مسی به وسیلهٔ بارهای منفی میلهٔ پلاستیکی رانده می‌شوند. این الکترون‌ها به سر دیگر میلهٔ مسی حرکت می‌کنند. در نتیجه، سر نزدیک از الکترون‌ها تهی و دارای بارهای مثبت نامتوازن می‌شود. این بارهای مثبت به طرف بارهای منفی میلهٔ پلاستیکی جذب می‌شوند. اگر چه میلهٔ مسی باز هم در مجموع از نظر بار الکتریکی خنثی است، گفته می‌شود که سرهای میله دارای **بارالقایی** هستند. منظور این است که برخی بارهای مثبت و منفی میله به خاطر حضور یک بار مجاور از هم جدا شده‌اند.

به همین ترتیب، اگر یک میلهٔ شیشه‌ای با بار مثبت به یکی از سرهای یک میلهٔ مسی خنثی نزدیک شود، الکترون‌های رسانش میلهٔ مسی به طرف این سر کشیده می‌شوند. در اینجا، آن سر میلهٔ مسی بار منفی و سر دیگر بار مثبت پیدا می‌کند. در نتیجه، در میلهٔ مسی باز هم بارالقایی به وجود می‌آید. اگر چه میلهٔ مسی در مجموع هنوز هم خنثی است، این میله و میلهٔ شیشه‌ای یکدیگر را می‌ربایند. (شکل ۲۲-۵ صورت دیگری از بارهای القایی را نمایش می‌دهد).

توجه کنید که فقط الکترون‌های رسانش با بار منفی می‌توانند حرکت کنند و یون‌های مثبت در جای خود ثابت می‌مانند. بنابراین، یک شیء فقط از طریق **حذف شدن بارهای منفی** دارای بار مثبت می‌شود.

نیمرساناها، نظیر سیلیسیوم و ژرمانیوم، موادی هستند که از لحاظ خاصیت رسانایی در فاصلهٔ میان رساناها و عایق‌ها قرار دارند. انقلاب **میکروالکترونیک**، که زندگی ما را در ابعاد گوناگون دگرگون کرده است، مدیون وسایل ساخته شده از مواد نیمرساناست.

نوع دیگر مواد **ابر رساناها** هستند، که به خاطر نبود مقاومت در مقابل حرکت بارهای الکتریکی در آنها به این نام خوانده می‌شوند. وقتی بار الکتریکی ماده‌ای حرکت می‌کند، گفته می‌شود که در آن ماده **جریان الکتریکی** وجود دارد. مواد عادی، حتی اگر رساناهای خوبی هم باشند، میل دارند در مقابل شارش بار الکتریکی از خود مقاومت نشان دهند. اما در یک ابر رسانا، فقط کم بودن مقاومت مطرح نیست، بلکه مقاومت دقیقاً صفر است. اگر در یک حلقهٔ ابر رسانا جریانی برقرار شود، این جریان بدون نیاز به باتری یا چشمهٔ انرژی دیگر «برای همیشه» در مدار باقی می‌ماند.

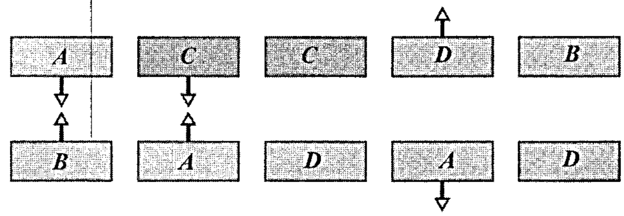


شکل ۲۲-۴ یک میلهٔ مسی خنثی با آویزان شدن از یک نخ نارسانا نسبت به محیط پیرامون از نظر الکتریکی منزوی شده است. هر یک از سرهای میلهٔ مسی می‌توانند توسط میلهٔ پلاستیکی باردار جذب شوند. در اینجا، الکترون‌های رسانش در میلهٔ مسی به وسیله بارهای منفی روی میلهٔ پلاستیکی به سر دیگر میلهٔ مسی رانده می‌شوند. در نتیجه، با چرخیدن میلهٔ مسی برای نزدیک‌تر شدن به سر میلهٔ پلاستیکی، بارهای منفی بارهای مثبت باقی مانده در سر نزدیک‌تر میلهٔ مسی را جذب می‌کنند.



شکل ۲۲-۵ این تصویر نمایشی از یک شیرین‌کاری نیست، بلکه طرحی از یک آزمایش جدی است که در سال ۱۷۷۴/۱۱۵۳ برای نشان دادن خاصیت رسانایی بدن انسان، انجام شده است. این تصویر شخصی را نشان می‌دهد که با طناب‌های نارسانا آویخته شده و به وسیلهٔ میله‌ای باردار (که به جای شلوار، احتمالاً با پوست بدن تماس پیدا کرده است) به وی بارالکتریکی داده شده است. وقتی شخص صورت، دست چپ یا گلوله و میلهٔ رسانای دست راستش را به خرده‌های کاغذ روی صفحات نزدیک می‌کند، بار الکتریکی در کاغذ القا می‌شود. در نتیجه، خرده‌های کاغذ به سمت شخص پرواز می‌کنند.

خودآزمایی ۱: شکل زیر، پنج جفت ورقه را نشان می‌دهد: A، B و D ورقه‌های پلاستیکی باردار هستند و C ورقهٔ مسی خنثی است. نیروهای الکتروستاتیکی میان ورقه‌ها برای سه جفت ورقه نشان داده شده‌اند. آیا دو جفت ورقهٔ باقی‌مانده یکدیگر را می‌رانند یا می‌ربایند؟



۴-۲۲ قانون کولن

فرض می‌کنیم دو ذرهٔ باردار (که **بارهای نقطه‌ای** نیز نامیده می‌شوند) بارهایی به بزرگی q_1 و q_2 دارند و فاصلهٔ میان آنها r است. بزرگی **نیروی الکتروستاتیکی** میان این دو بار الکتریکی، به صورت جاذبه یا دافعه، برابر است با:

$$F = k\frac{|q_1||q_2|}{r^2} \quad \text{(قانون کولن)} \qquad (۱-۲۲)$$

که در آن k مقداری ثابت است. هر ذره به ذرهٔ دیگر نیرویی با این بزرگی وارد می‌کند؛ این دو نیرو یک زوج نیروی قانون سوم نیوتون تشکیل می‌دهند. اگر ذره‌ها یکدیگر را برانند، نیروی وارد شده به هر ذره در جهت **دور شدن** از ذرهٔ دیگر است (مانند شکل‌های ۲۲-۶ الف و ۲۲-۶ ب)، و اگر ذره‌ها یکدیگر را بربایند، نیروی وارد شده به هر ذره در جهت **نزدیک شدن** به ذرهٔ دیگر است (مانند شکل ۲۲-۶ پ).

معادلهٔ ۲۲-۱ به خاطر بزرگداشت نام **شارل اوگوستن کولن**[1]، **قانون کولن** نامیده می‌شود، که حاصل آزمایش‌های وی در سال ۱۷۸۵/۱۱۶۴ است. عجیب است که شکل معادلهٔ ۲۲-۱ عیناً همان شکل معادلهٔ نیوتون برای نیروی گرانشی میان دو ذره با جرم‌های m_1 و m_2 و به فاصلهٔ r از یکدیگر است:

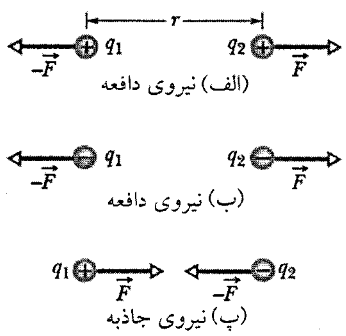
$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad (۲-۲۲)$$

در این معادله G ثابت گرانش است.

ثابت k در معادلهٔ ۲۲-۱ را، که مانستهٔ ثابت گرانش G در معادلهٔ ۲۲-۲ است، می‌توان **ثابت الکتروستاتیکی** نامید. هر دو معادله مبین قانون‌های عکس مجذوری‌اند که مربوط به خاصیت ذرات برهم کنش کننده ـ جرم در یک حالت و بارالکتریکی در حالت دیگر ـ هستند. تفاوت دو قانون در این است که نیروهای گرانشی همیشه از نوع ربایشی هستند، اما نیروهای الکتروستاتیکی، بسته به علامت‌های بارها، ممکن است ربایشی یا رانشی باشند. این اختلاف از آنجا ناشی می‌شود که فقط یک نوع جرم، اما دو نوع بار الکتریکی، وجود دارد (بدین جهت، در معادلهٔ ۲۲-۱ از علامت‌های قدر مطلق استفاده شده است، اما در معادلهٔ ۲۲-۲ چنین نیازی نبود).

صحت قانون کولن در تمام آزمون‌ها به تأیید رسیده و هیچ استثنایی در آن دیده نشده است. این قانون حتی در درون اتم هم صادق است و دقیقاً نیروی میان هستهٔ با بار مثبت و هر یک از الکترون‌های با بار منفی را توصیف می‌کند، هر چند در این قلمرو، مکانیک کلاسیک نیوتونی نارساست و جای خود را به فیزیک کوانتومی می‌دهد. در ضمن، این قانون ساده در مورد نیروهای بستگی اتم‌ها به هم برای تشکیل شدن مولکول‌ها، و نیروهای بستگی اتم‌ها و مولکول‌ها به‌هم برای تشکیل شدن جامدات و مایعات نیز صادق است.

به دلایل عملی، که به دقت اندازه‌گیری‌ها مربوط است، یکای SI بار الکتریکی از یکای جریان الکتریکی، یعنی **آمپر** (با نماد A) گرفته می‌شود. یکای SI بار الکتریکی **کولن** (با نماد C) است: یک کولن مقداری بار



شکل ۲۲-۶ دو ذرهٔ باردار در فاصلهٔ r از هم، یکدیگر را وقتی می‌رانند که هر دو دارای (الف) بار مثبت، یا (ب) بار منفی، باشند. (پ) اگر بارها ناهمنام باشند، یکدیگر را می‌ربایند. در هر سه حالت، نیروهای وارده شده به هر ذره از سوی ذرهٔ دیگر بزرگی یکسان دارند اما از لحاظ جهت با هم مخالف‌اند.

1. Charles Augustin Coulomb

الکتریکی است که در مدت یک ثانیه از هر مقطع یک سیم حامل جریان یک آمپری می‌گذرد. در بخش ۳۰ـ۲ دربارهٔ نحوهٔ تعریف آمپر به طور تجربی، توضیح داده خواهد شد. به طور کلی، می‌توان نوشت:

$$dq = idt \qquad (۲۲\text{ـ}۳)$$

که در آن dq (برحسب کولن) مقدار باری است که توسط جریان i (برحسب آمپر) در بازهٔ زمانی dt (برحسب ثانیه) منتقل می‌شود.

به دلایل تاریخی (و به خاطر ساده کردن بسیاری از فرمول‌ها)، ثابت الکتروستاتیکی k در معادلهٔ ۲۲ـ۱ را معمولاً به صورت $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ می‌نویسند. بنابراین، رابطهٔ قانون کولن چنین نوشته می‌شود:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1||q_2|}{r^2} \qquad \text{(قانون کولن)} \qquad (۲۲\text{ـ}۴)$$

■

مقدار ثابت در معادله‌های ۲۲ـ۱ و ۲۲ـ۴ برابر است با:

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8{,}99 \times 10^9 \text{N.m}^2/\text{C}^2 \qquad (۲۲\text{ـ}۵)$$

کمیت ε_0، که **ثابت گذردهی** نام دارد، گاهی به طور مجزا در معادله‌ها ظاهر می‌شود و برابر است با:

$$\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\text{C}^2/\text{N.m}^2 \qquad (۲۲\text{ـ}۶)$$

شباهت دیگر میان نیروهای گرانشی و الکتروستاتیکی در این است که هر دو از اصل برهم نهی پیروی می‌کنند. اگر n ذرهٔ باردار داشته باشیم، هر زوج ذره به طور مستقل به هم اثر می‌کنند، و نیروی وارد بر هر یک از آنها، مثلاً ذرهٔ ۱، از سوی ذرات دیگر از مجموع برداری زیر به دست می‌آید

$$\vec{F}_{1,\text{net}} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14} + \vec{F}_{15} + \ldots + \vec{F}_{1n} \qquad (۲۲\text{ـ}۷)$$

که در آن، مثلاً $\vec{F}_{14}$، نیرویی است که به خاطر وجود ذرهٔ ۴ به ذرهٔ ۱ وارد می‌شود. برای نیروی گرانشی نیز فرمول مشابهی وجود دارد.

بالاخره، دو قضیهٔ پوسته که در مطالعهٔ گرانش مفید واقع شدند، در الکتروستاتیک هم به صورت زیر بیان می‌شوند:

◄ یک پوستهٔ کروی با بار الکتریکی یکنواخت ذرهٔ باردار واقع در خارج پوسته را چنان جذب یا دفع می‌کند که گویی تمام بار آن در مرکزش متمرکز شده است.

◄ اگر ذرهٔ بارداری درون یک پوستهٔ کروی با بار یکنواخت قرار گیرد، هیچ نیروی الکتروستاتیکی برایندی از سوی پوسته به ذره وارد نمی‌شود.

(در قضیهٔ اول فرض شده است که بار روی پوسته خیلی بزرگتر از بار ذره است. بنابراین، از هر نوع باز توزیع بار بر روی پوسته به خاطر وجود بار ذره می‌توان چشم‌پوشی کرد).

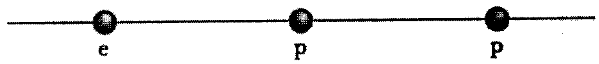
رساناهای کروی

اگر باری را به یک پوستهٔ کروی ساخته شده از مادهٔ رسانا بیفزاییم، این بار اضافی به طور یکنواخت روی سطح (خارجی) پوسته گسترده می‌شود. مثلاً، اگر الکترون‌های اضافی را روی یک پوستهٔ فلزی کروی قرار دهیم، آنها یکدیگر را می‌رانند و از هم دور و در سطحی که در اختیار دارند گسترده می‌شوند تا به طور یکنواخت توزیع شوند. این آرایش، فاصله‌های میان تمام زوج‌های الکترون اضافی را به حد بیشینه می‌رساند. بنا به قضیهٔ اول پوسته، اگر تمام بارهای اضافی یک پوسته را متمرکز شده در مرکز آن فرض کنیم، پوسته بار الکتریکی خارجی را جذب یا دفع می‌کند.

هرگاه از یک پوستهٔ فلزی کروی بار منفی گرفته شود، بار مثبت حاصل در پوسته نیز به طور یکنواخت

روی سطح پوسته گسترده می‌شود. برای مثال، اگر n الکترون از پوسته گرفته شود، در آن صورت، n جایگاه بار مثبت (جایگاه‌هایی که الکترون از دست داده‌اند) به طور یکنواخت روی پوسته گسترده می‌شود. بنا به قضیهٔ اول پوسته، اگر تمام بارهای اضافی یک پوسته را متمرکز شده در مرکز آن فرض کنیم، باز هم پوسته بار الکتریکی خارجی را جذب یا دفع خواهد کرد.

خودآزمایی ۲: شکل زیر، دو پروتون (با نماد p) و یک الکترون (با نماد e) را روی یک محور نشان می‌دهد. جهت نیروی الکتروستاتیکی وارد شده به پروتون مرکزی، (الف) از سوی الکترون، (ب) از سوی پروتون دیگر، چیست؟ (پ) جهت نیروی الکتروستاتیکی برایند وارد شده به پروتون مرکزی چیست؟



مسألهٔ نمونهٔ ۲۲ـ۱

(الف) شکل ۲۲ـ۷ الف، دو ذرهٔ با بار مثبت را نشان می‌دهد که روی محور x قرار گرفته‌اند. بار الکتریکی ذره‌ها $q_۱ = ۱٫۶۰ \times ۱۰^{-۱۹}\text{C}$ و $q_۲ = ۳٫۲۰ \times ۱۰^{-۱۹}\text{C}$، و فاصلهٔ میان آنها $R = ۰٫۰۲۰۰\text{m}$ است. بزرگی و جهت نیروی الکتروستاتیکی $\vec{F}_{۱۲}$، که از سوی ذرهٔ ۲ به ذرهٔ ۱ وارد می‌شود، چیست؟

حل: در اینجا **نکتهٔ کلیدی** این است که چون بار هر دو ذره مثبت است، ذرهٔ ۱ با نیرویی توسط ذرهٔ ۲ رانده می‌شود که بزرگی آن از معادلهٔ ۲۲ـ۴ به دست می‌آید. بنابراین، $\vec{F}_{۱۲}$، نیروی وارد شده به ذرهٔ ۱ در جهت دور شدن از ذرهٔ ۲، یعنی در جهت منفی محور x است. این موضوع در نمودار جسم ـ آزاد شکل ۲۲ـ۷ ب نشان داده شده است. با استفاده از معادلهٔ ۲۲ـ۴ و قرار دادن R به جای فاصلهٔ r، بزرگی نیروی $F_{۱۲}$ را می‌توان چنین به دست آورد:

$$F_{۱۲} = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{|q_۱||q_۲|}{R^۲}$$

$$F_{۱۲} = (۸٫۹۹ \times ۱۰^{۹}\text{N.m}^۲/\text{C}^۲) \times \frac{(۱٫۶۰ \times ۱۰^{-۱۹}\text{C})(۳٫۲۰ \times ۱۰^{-۱۹}\text{C})}{(۰٫۰۲۰۰\text{m})^۲} \Rightarrow$$

$$F_{۱۲} = ۱٫۱۵ \times ۱۰^{-۲۴}\text{N}$$

بنابراین، بزرگی و جهت (نسبت به محور x مثبت) نیروی $\vec{F}_{۱۲}$ عبارت است از:

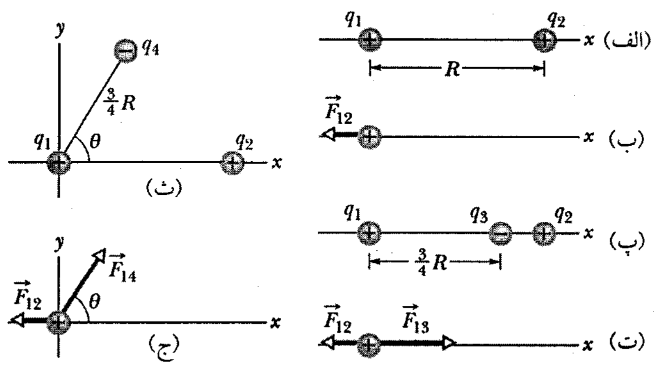
(پاسخ) $۱٫۱۵ \times ۱۰^{-۲۴}\text{N}$ و ۱۸۰ درجه

نیروی $\vec{F}_{۱۲}$ را با استفاده از نمادگذاری بردارهای یکه نیز می‌توان چنین نوشت:

(پاسخ) $\vec{F}_{۱۲} = -(۱٫۱۵ \times ۱۰^{-۲۴}\text{N})\hat{\text{i}}$

(ب) شکل ۲۲ـ۷ پ مانند شکل ۲۲ـ۷ الف است، با این تفاوت که در این حالت ذرهٔ ۳ روی محور x در بین ذره‌های ۱ و ۲ قرار گرفته است. بار ذرهٔ ۳ برابر با $q_۳ = -۳٫۲۰ \times ۱۰^{-۱۹}\text{C}$ و فاصلهٔ آن از ذرهٔ ۱ برابر با $\frac{۳}{۴}R$ است. $\vec{F}_{۱,\text{net}}$، نیروی الکتروستاتیکی برایند وارد شده به ذرهٔ ۱ از سوی ذره‌های ۲ و ۳، چیست؟

حل: در اینجا یک **نکتهٔ کلیدی** این است که حضور ذرهٔ ۳، نیروی الکتروستاتیکی وارد شده به ذرهٔ ۱ از سوی ذرهٔ ۲ را تغییر نمی‌دهد. بنابراین، باز هم همان نیروی $\vec{F}_{۱۲}$ به ذرهٔ ۱ اثر می‌کند. به همین ترتیب، نیروی $\vec{F}_{۱۳}$ هم که از سوی ذرهٔ ۳ به ذرهٔ ۱ وارد می‌شود، ارتباطی به حضور ذرهٔ ۲ ندارد. ذره‌های ۱ و ۳ چون بارهای با علامت مخالف دارند، به سوی هم جذب



شکل ۲۲ـ۷ مسألهٔ نمونهٔ ۲۲ـ۱. (الف) دو ذرهٔ باردار با بارهای $q_۱$ و $q_۲$ بر روی محور x به فاصلهٔ R از یکدیگر، واقع شده‌اند. (ب) نمودار جسم ـ آزاد مربوط به ذرهٔ ۱، که نشان دهندهٔ نیروی الکتروستاتیکی وارد شده از سوی ذرهٔ ۲ است. (پ) اکنون، ذرهٔ ۳ در راستای خط واصل ذره‌های ۱ و ۲ و روی محور x قرار دارد. (ت) نمودار جسم ـ آزاد مربوط به ذرهٔ ۱. (ث) ذرهٔ ۴ روی خطی تحت زاویهٔ θ نسبت به محور x، در حضور ذره‌های ۱ و ۲، قرار دارد. (ج) نمودار جسم ـ آزاد مربوط به ذرهٔ ۱.

می‌شوند. در نتیجه، جهت نیروی $\vec{F}_{۱۳}$ به سوی ذرهٔ ۳ است، که در نمودار جسم ـ آزاد شکل ۲۲ـ۷ ت نشان داده شده است.

برای پیدا کردن بزرگی $\vec{F}_{۱۳}$، معادلهٔ ۲۲ـ۴ را می‌توان چنین نوشت:

$$F_{۱۳} = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{|q_۱||q_۳|}{\left(\frac{۳}{۴}R\right)^۲}$$

$$F_{۱۳} = (۸٫۹۹ \times ۱۰^۹ \text{N.m}^۲/\text{C}^۲) \times \frac{(۱٫۶۰ \times ۱۰^{-۱۹}\text{C})(۳٫۲۰ \times ۱۰^{-۱۹}\text{C})}{\left(\frac{۳}{۴} \times ۰٫۰۲۰۰\text{m}\right)^۲} \Rightarrow$$

$$F_{۱۳} = ۲٫۰۵ \times ۱۰^{-۲۴}\text{N}$$

نیروی $\vec{F}_{۱۳}$ با استفاده از نمادگذاری بردارهای یکه به صورت زیر هم نوشته می‌شود

$$\vec{F}_{۱۳} = (۲٫۰۵ \times ۱۰^{-۲۴}\text{N})\,\hat{\text{i}}$$

نکتهٔ کلیدی دیگر این است که $\vec{F}_{۱,\text{net}}$، نیروی برایند وارد بر ذرهٔ ۱، برابر با مجموع بردارهای $\vec{F}_{۱۲}$ و $\vec{F}_{۱۳}$ است؛ یعنی با استفاده از معادلهٔ ۲۲ـ۷، $\vec{F}_{۱,\text{net}}$، نیروی برایند وارد شده به ذرهٔ ۱ را با استفاده از نمادگذاری بردارهای یکه می‌توان چنین به دست آورد:

$$\vec{F}_{۱,\text{net}} = \vec{F}_{۱۲} + \vec{F}_{۱۳}$$

$$\vec{F}_{۱,\text{net}} = -(۱٫۱۵ \times ۱۰^{-۲۴}\text{N})\,\hat{\text{i}} + (۲٫۰۵ \times ۱۰^{-۲۴}\text{N})\,\hat{\text{i}} \Rightarrow$$

(پاسخ) $\vec{F}_{۱,\text{net}} = (۹٫۰۰ \times ۱۰^{-۲۵}\text{N})\,\hat{\text{i}}$

بنابراین، بزرگی و جهت (نسبت به محور x مثبت) $\vec{F}_{۱,\text{net}}$ عبارت است از:

(پاسخ) $۹٫۰۰ \times ۱۰^{-۲۵}\text{N}$ و صفر درجه

(پ) شکل ۲۲ـ۷ ث، مانند شکل ۲۲ـ۷ الف است، با این تفاوت که اکنون ذرهٔ ۴ در مکان نشان داده شده، قرار دارد. ذرهٔ ۴ دارای بار الکتریکی $q_۴ = -۳٫۲۰ \times ۱۰^{-۱۹}\text{C}$ و به فاصلهٔ $\frac{۳}{۴}R$ از ذرهٔ ۱ است. این ذره روی خطی قرار دارد که با محور x زاویهٔ $\theta = ۶۰°$ می‌سازد. نیروی الکتروستاتیکی برایند $\vec{F}_{۱,\text{net}}$، که از سوی ذره‌های ۲ و ۴ به ذرهٔ ۱ وارد می‌شود، چیست؟

حل: در اینجا **نکتهٔ کلیدی** این است که نیروی برایند $\vec{F}_{۱,\text{net}}$ با مجموع برداری $\vec{F}_{۱۲}$ و نیروی جدید $\vec{F}_{۱۴}$ وارد شده از سوی ذرهٔ ۴ به ذرهٔ ۱، برابر است. ذره‌های ۱ و ۴ چون بارهای با علامت مخالف دارند، به سوی هم جذب می‌شوند. در نتیجه، جهت نیروی $\vec{F}_{۱۴}$ وارد بر ذرهٔ ۱، در راستای خط با زاویهٔ $\theta = ۶۰°$، طبق نمودار جسم ـ آزاد شکل ۲۲ـ۷ ج، به سوی ذرهٔ ۴ است.

برای پیدا کردن بزرگی $\vec{F}_{۱۴}$، معادلهٔ ۲۲ـ۴ را می‌توان چنین نوشت:

$$F_{۱۴} = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{|q_۱||q_۴|}{\left(\frac{۳}{۴}R\right)^۲}$$

$$F_{۱۴} = (۸٫۹۹ \times ۱۰^۹ \text{N.m}^۲/\text{C}^۲) \times \frac{(۱٫۶۰ \times ۱۰^{-۱۹}\text{C})(۳٫۲۰ \times ۱۰^{-۱۹}\text{C})}{\left(\frac{۳}{۴} \times ۰٫۰۲۰۰\text{m}\right)^۲} \Rightarrow$$

$$F_{۱۴} = ۲٫۰۵ \times ۱۰^{-۲۴}\text{N}$$

پس، با استفاده از معادلهٔ ۲۲ـ۷، $\vec{F}_{۱,\text{net}}$، نیروی برایند وارد شده به ذرهٔ ۱ را می‌توان چنین به دست آورد:

$$\vec{F}_{۱,\text{net}} = \vec{F}_{۱۲} + \vec{F}_{۱۴}$$

برای محاسبهٔ طرف راست این معادله، به **نکتهٔ کلیدی** دیگری نیازمندیم: چون نیروهای $\vec{F}_{۱۲}$ و $\vec{F}_{۱۴}$ در راستای یک محور قرار ندارند، آنها را به طور ساده نمی‌توان با ترکیب کردن بزرگی‌هایشان با هم جمع کرد و باید به صورت برداری و با به کار بستن یکی از روشهای زیر، با هم جمع شوند.

روش ۱. جمع کردن مستقیم با استفاده از ماشین ویژهٔ محاسبه‌های برداری. ابتدا، برای $\vec{F}_{۱۲}$ بزرگی $۱٫۱۵ \times ۱۰^{-۲۴}$ و زاویهٔ $۱۸۰°$ و برای $\vec{F}_{۱۴}$ بزرگی $۲٫۰۵ \times ۱۰^{-۲۴}$ و زاویهٔ $۶۰°$ را وارد ماشین می‌کنیم. سپس، بردارها را با هم جمع می‌کنیم.

روش ۲. جمع کردن با استفاده از نمادگذاری بردارهای یکه. ابتدا، نیروی $\vec{F}_{۱۴}$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\vec{F}_{۱۴} = (F_{۱۴}\cos\theta)\,\hat{\text{i}} + (F_{۱۴}\sin\theta)\,\hat{\text{j}}$$

با قرار دادن $۲٫۰۵ \times ۱۰^{-۲۴}\text{N}$ به جای $F_{۱۴}$ و زاویهٔ $۶۰°$ به جای θ، خواهیم داشت

$$\vec{F}_{۱۴} = (۱٫۰۲۵ \times ۱۰^{-۲۴}\text{N})\,\hat{\text{i}} + (۱٫۷۷۵ \times ۱۰^{-۲۴}\text{N})\,\hat{\text{j}}$$

اکنون، نیروها را با هم جمع می‌کنیم:

$$\vec{F}_{۱,\text{net}} = \vec{F}_{۱۲} + \vec{F}_{۱۴}$$

$$\vec{F}_{۱,\text{net}} = -(۱٫۱۵ \times ۱۰^{-۲۴}\text{N})\,\hat{\text{i}} + (۱٫۰۲۵ \times ۱۰^{-۲۴}\text{N})\,\hat{\text{i}} + (۱٫۷۷۵ \times ۱۰^{-۲۴}\text{N})\,\hat{\text{j}} \Rightarrow$$

(پاسخ) $\vec{F}_{۱,\text{net}} = (-۱٫۲۵ \times ۱۰^{-۲۵}\text{N})\,\hat{\text{i}} + (۱٫۷۷۵ \times ۱۰^{-۲۴}\text{N})\,\hat{\text{j}}$

روش ۳. جمع کردن مؤلفه‌های هر محور با هم. مجموع مؤلفه‌های x نیروها برابر است با:

$$F_{۱,\text{net},x} = F_{۱۲,x} + F_{۱۴,x} = F_{۱۲} + F_{۱۴}\cos ۶۰°$$

$$F_{۱,\text{net},x} = -۱٫۱۵ \times ۱۰^{-۲۴}\text{N} + (۲٫۰۵ \times ۱۰^{-۲۴}\text{N})\cos ۶۰°$$

$$F_{۱,\text{net},x} = -۱٫۲۵ \times ۱۰^{-۲۵}\text{N}$$

مجموع مؤلفه‌های y نیروها برابر است با:

$$F_{۱,\text{net},y} = F_{۱۲,y} + F_{۱۴,y} = ۰ + F_{۱۴}\sin ۶۰°$$

$$F_{۱,\text{net},y} = (۲٫۰۵ \times ۱۰^{-۲۴}\text{N})\sin ۶۰°$$

$$F_{۱,\text{net},y} = ۱٫۷۸ \times ۱۰^{-۲۴}\text{N}$$

بزرگی نیروی برایند $\vec{F}_{۱,\text{net}}$، از معادلهٔ زیر به دست می‌آید

$$F_{۱,\text{net}} = \sqrt{F^۲_{۱,\text{net},x} + F^۲_{۱,\text{net},y}} \Rightarrow$$

(پاسخ) $F_{۱,\text{net}} = ۱٫۷۸ \times ۱۰^{-۲۴}\text{N}$

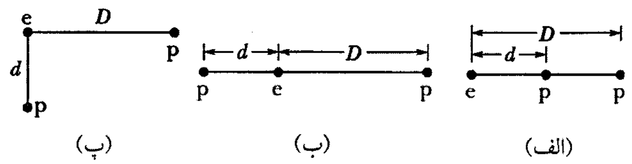
برای تعیین جهت و راستای $\vec{F}_{۱,\text{net}}$، داریم

$$\theta = \tan^{-۱}\frac{\vec{F}_{۱,\text{net},y}}{F_{۱,\text{net},x}} = -۸۶٫۰^\circ$$

این نتیجه پذیرفتنی نیست، زیرا راستای $\vec{F}_{۱,\text{net}}$ باید بین راستاهای مربوط به $\vec{F}_{۱۲}$ و $\vec{F}_{۱۴}$ باشد. برای تصحیح مقدار θ، مقدار ۱۸۰ درجه را به زاویهٔ θ می‌افزاییم، داریم

(پاسخ) $-۸۶٫۰^\circ + ۱۸۰^\circ = ۹۴٫۰^\circ$

خودآزمایی ۳: شکل زیر، سه آرایش از یک الکترون e، و دو پروتون p، را نشان می‌دهد. (الف) این آرایش‌ها را با توجه به بزرگی نیروی الکتروستاتیکی برایند وارد بر الکترون از سوی پروتون‌ها، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید. (ب) در شکل (پ)، آیا زاویهٔ میان نیروی برایند وارد بر الکترون و خط به طول d، نسبت به ۴۵ درجه کمتر است یا بیشتر؟



روشهای مسأله حل کردن

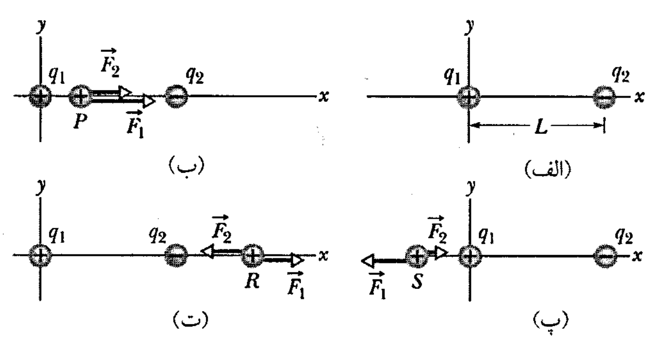
روش ۱: نمادهای نشان دهندهٔ بار الکتریکی

در اینجا به راهنمایی کلی در مورد نمادهای نشان دهندهٔ بارهای الکتریکی پرداخته می‌شود. اگر نماد q، با شاخص پایین یا بدون آن، در جمله‌ای بدون تعیین علامت بار الکتریکی به کار رود، بار می‌تواند مثبت، یا منفی باشد. گاهی هم علامت بار به طور صریح، مثلاً به صورت $+q$ یا $-q$، نشان داده می‌شود.

وقتی بیش از یک شیء باردار مورد نظر باشد، بارهای آنها را باید به صورت مضربی از بزرگی یک بار مشخص کرد. به عنوان مثال، نماد $+۲q$ معرف بار مثبتی با بزرگی دو برابر بار مرجع با بزرگی q، و $-۳q$ معرف بار منفی‌ای با بزرگی سه برابر بار مرجع با بزرگی q است.

مسألهٔ نمونهٔ ۲۲ـ۲

شکل ۲۲ـ۸ الف، دو ذره را نشان می‌دهد که در جای ثابتی قرار دارند: ذرهٔ با بار $q_۱ = +۸q$ در مبداء و ذرهٔ با بار $q_۲ = -۲q$ در نقطهٔ $x = L$ واقع است. یک پروتون را در چه نقطه‌ای (غیر از بی‌نهایت دور) می‌توان قرار داد تا در حال تعادل باشد (یعنی نیروی برایند وارد بر آن صفر باشد)؟ آیا این تعادل پایدار است یا ناپایدار؟



شکل ۲۲ـ۸ مسألهٔ نمونهٔ ۲۲ـ۲. (الف) دو ذره با بارهای $q_۱$ و $q_۲$ بر روی محور x به فاصلهٔ L از هم قرار دارند. (ب) تا (ت) نقاط P، S و R سه مکان ممکن برای پروتون هستند. در هر مکان، $\vec{F}_۱$ نیروی وارد بر پروتون از سوی ذرهٔ ۱، و $\vec{F}_۲$ نیروی وارد بر پروتون از سوی ذرهٔ ۲ است.

حل: در اینجا **نکتهٔ کلیدی** این است که اگر $\vec{F}_۱$ نیروی وارد بر پروتون از سوی بار $q_۱$ و $\vec{F}_۲$ نیروی وارد بر پروتون از سوی بار $q_۲$ باشد، نقطهٔ مورد نظر جایی است که در آن رابطهٔ $\vec{F}_۱ + \vec{F}_۲ = ۰$ برقرار است. این شرط ایجاب می‌کند که:

$$\vec{F}_۱ = -\vec{F}_۲ \qquad (۸\text{ـ}۲۲)$$

معادلهٔ بالا نشان می‌دهد که در نقطهٔ مورد نظر، نیروهای وارد بر پروتون از سوی دو ذره باید دارای بزرگی مساوی و جهت مخالف باشند. پس

$$F_۱ = F_۲ \qquad (۹\text{ـ}۲۲)$$

بار الکتریکی پروتون مثبت است. بنابراین، پروتون و ذرهٔ با بار $q_۱$ هم‌علامت‌اند، و نیروی $\vec{F}_۱$ وارد بر پروتون باید در جهت دور شدن از $q_۱$ باشد. هم‌چنین، پروتون و ذرهٔ با بار $q_۲$ علامت مخالف دارند. بنابراین، $\vec{F}_۲$، نیروی وارد بر پروتون باید به سمت $q_۲$ باشد. اصطلاحات «در جهت دور شدن از $q_۱$» و «به سمت $q_۲$» وقتی می‌توانند در جهت‌های مخالف باشند که پروتون روی محور x قرار داشته باشد.

اگر پروتون در روی محور x در نقطه‌ای مانند P در شکل ۲۲ـ۸ ب، در بین $q_۱$ و $q_۲$ قرار داشته باشد، $\vec{F}_۱$ و $\vec{F}_۲$ همسوی‌اند و چنانکه مورد نظر است، ناهمسو نیستند. اگر پروتون در نقطه‌ای از محور x در سمت چپ $q_۱$،

مانند نقطهٔ S در شکل ۲۲ـ۸ پ، واقع شده باشد، $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ مخالف یکدیگر خواهند بود. اما معادلهٔ ۲۲ـ۴ نشان می‌دهد که در چنین نقطه‌ای بزرگی‌های $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ نمی‌توانند یکسان باشند: F_1 باید از F_2 بزرگتر باشد، زیرا F_1 توسط بار نزدیکتر (به ازای r کمتر) و با بزرگی بیشتر ($8q$ در مقایسه با $2q$) به وجود آمده است.

سرانجام، اگر پروتون در نقطه‌ای از محور x در سمت راست q_2، مانند نقطهٔ R در شکل ۲۲ـ۸ ت، قرار داشته باشد، باز هم $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ مخالف یکدیگرند. اما چون فاصلهٔ بار بزرگتر (q_1) بیشتر از فاصلهٔ بار کوچکتر تا پروتون است، در این حالت نقطه‌ای وجود دارد که در آن F_1 با F_2 برابر می‌شود. فرض می‌کنیم x مختصهٔ این نقطه و q_p بار پروتون است. پس، به کمک معادلهٔ ۲۲ـ۴ می‌توان معادلهٔ ۲۲ـ۹ را چنین نوشت:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{8qq_p}{x^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2qq_p}{(x-L)^2} \qquad (۲۲\text{ـ}۱۰)$$

(توجه کنید که در معادلهٔ ۲۲ـ۱۰ فقط بزرگی بارها منظور شده‌اند). با مرتب کردن معادلهٔ ۲۲ـ۱۰، داریم

$$\left(\frac{x-L}{x}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

پس از جذر گرفتن از دو طرف این معادله، خواهیم داشت

$$\frac{x-L}{x} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow$$

$$x = 2L \qquad \text{(پاسخ)}$$

در نقطهٔ $x = 2L$ تعادل ناپایدار است؛ یعنی اگر پروتون به سمت چپ نقطهٔ R جابه‌جا شود، F_1 و F_2 هر دو افزایش می‌یابند، اما F_2 بیشتر افزایش پیدا می‌کند (زیرا پروتون به q_2 نزدیکتر از q_1 است)، و یک نیروی برایند پروتون را بیشتر به سمت چپ می‌کشد. اگر پروتون به سمت راست جابه‌جا شود، F_1 و F_2 هر دو کاهش می‌یابند، اما مقدار کاهش F_2 بیشتر است. در نتیجه، یک نیروی برایند پروتون را بیشتر به سمت راست می‌کشد. در تعادل پایدار پروتون هر وقت به مقداری اندک جابه‌جا شود، به مکان تعادل بر می‌گردد.

روشهای مسأله حل کردن

روش ۲: ترسیم بردارهای نیروی الکتروستاتیکی

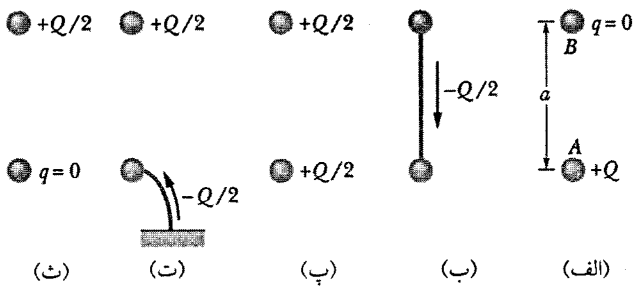
هرگاه نموداری از ذره‌های باردار، نظیر شکل ۲۲ـ۷ الف، در دست باشد و بخواهید نیروی الکتروستاتیکی برایند وارد بر یکی از آنها را پیدا کنید، معمولاً باید نمودار جسم ـ آزاد ذرهٔ مورد نظر و نیروهای وارد بر آن را، مطابق شکل ۲۲ـ۷ ب، رسم کنید. اما اگر بخواهید از اصل برهم نهی نیروها در نمودار شامل تمام ذره‌ها استفاده کنید، باید بردارهای نیرو را طوری رسم کنید که دُم‌ها (ترجیحاً) یا سَرهای بردارها روی ذرهٔ مورد نظر قرار گیرند. اگر بردارها را در جای دیگری از نمودار رسم کنید، ممکن است دچار اشتباه شوید ـ و اگر بردارها را روی ذره‌های وارد کنندهٔ نیرو به ذرهٔ مورد نظر رسم کنید، احتمال اشتباه بیشتر می‌شود.

مسألهٔ نمونهٔ ۲۲ـ۳

شکل ۲۲ـ۹ الف، دو کرهٔ رسانای مشابه A و B را که از نظر الکتریکی منزوی هستند، نشان می‌دهد. دو کره از هم به فاصلهٔ (مرکز ـ تا ـ مرکز) a، که در مقایسه با شعاع آنها بزرگ است، قرار دارند. کرهٔ A دارای بار مثبت $+Q$، و کرهٔ B از نظر الکتریکی خنثی است. ابتدا دو کره هیچ نیروی الکتروستاتیکی‌ای به هم وارد نمی‌کنند. (فرض کنید به خاطر فاصلهٔ زیاد کره‌ها از هم، هیچ باری روی آنها القا نمی‌شود).

(الف) فرض کنید کره‌ها را به مدتی کوتاه با یک سیم رابط به هم وصل می‌کنیم. سیم آن‌قدر باریک است، که از وجود هر بار خالصی بر روی آن می‌توان چشم‌پوشی کرد. نیروی الکتروستاتیکی میان کره‌ها پس از برداشتن سیم چیست؟

حل: در اینجا یک **نکتهٔ کلیدی** این است که وقتی کره‌ها با سیم به هم وصل می‌شوند، الکترون‌های رسانش (منفی) روی کرهٔ B، که همیشه یکدیگر را می‌رانند، برای دوتر شدن از هم یک، راه (در طول سیم متصل به کرهٔ با بار مثبت A که آنها را می‌رباید) پیدا می‌کنند. (شکل ۲۲ـ۹ ب را ببینید). وقتی



شکل ۲۲ـ۹ مسألهٔ نمونهٔ ۲۲ـ۳. دو کرهٔ رسانای کوچک A و B. (الف) در آغاز، به کرهٔ A بار مثبت داده می‌شود. (ب) بار منفی از طریق یک سیم رابط در بین کره‌ها مبادله می‌شود. (پ) سپس، هر دو کره دارای بار مثبت می‌شوند. (ت) بار منفی از طریق یک سیم متصل به زمین به کرهٔ A منتقل می‌شود. (ث) در این حالت، کرهٔ A خنثی است.

کرهٔ B بار منفی از دست می‌دهد، دارای بار مثبت می‌شود، و وقتی کرهٔ A بار منفی دریافت می‌کند، دارای بار مثبت **کمتری** می‌شود. **نکتهٔ کلیدی** دیگر این است که، سرانجام، کره‌ها باید دارای بار مساوی شوند زیرا با هم مشابه‌اند. بنابراین، وقتی بار اضافی روی B به اندازهٔ $+Q/2$ افزایش و بار اضافی روی A به اندازهٔ $+Q/2$ کاهش می‌یابد، انتقال بار متوقف می‌شود. این شرط هنگامی برقرار می‌شود که باری به اندازهٔ $-Q/2$ منتقل شده باشد.

پس از برداشتن سیم (شکل ۲۲-۹ پ)، می‌توان فرض کرد که بار روی هر کره یکنواخت بودن توزیع بار روی کرهٔ دیگر را به هم نمی‌زند، زیرا شعاع کره‌ها در مقایسه با فاصلهٔ میان آنها کوچک است. بنابراین، قضیهٔ اول پوسته را می‌توان در مورد هر کره به کاربرد. با استفاده از معادلهٔ ۲۲-۴ به ازای $q_1 = q_2 = Q/2$ و $r = a$، بزرگی نیروی الکتروستاتیکی میان کره‌ها چنین به دست می‌آید:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(Q/2)(Q/2)}{a^2} \Rightarrow$$

$$F = \frac{1}{16\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{a}\right)^2 \qquad \text{(پاسخ)}$$

در این حالت، کره‌ها بار مثبت دارند و یکدیگر را می‌رانند.

(ب) اکنون، فرض کنید کرهٔ A را به طور لحظه‌ای به زمین وصل می‌کنیم و سپس سیم رابط را بر می‌داریم. در این حالت، نیروی الکتروستاتیکی میان کره‌ها چیست؟

حل: در اینجا **نکتهٔ کلیدی** این است که اتصال زمین اجازه می‌دهد الکترون‌ها با بار کل $-Q/2$ از زمین به کرهٔ A منتقل شوند (شکل ۲۲-۹ ت) و بارهای این کره را خنثی کنند (شکل ۲۲-۹ ث). چون باری روی کرهٔ A باقی نمانده است، هیچ نیروی الکتروستاتیکی‌ای در میان دو کره اثر نمی‌کند (درست مانند حالت آغازی در شکل ۲۲-۹ الف).

۲۲-۵ بار الکتریکی کوانتیده است

در زمان بنجمین فرانکلین، بار الکتریکی به صورت شاره‌ای پیوسته تصور می‌شد ـ عقیده‌ای که در بسیاری از موارد مفید بود. اما اکنون می‌دانیم که خود شاره‌ها، مانند هوا یا آب، هم پیوسته نیستند، بلکه از اتم‌های و مولکول‌ها تشکیل شده‌اند؛ یعنی ماده ساختاری گسسته دارد. تجربه نشان می‌دهد که «شارهٔ الکتریکی» پیوسته نیست، بلکه از مضرب‌های درستی از یک بار بنیادی تشکیل شده است. هر بار الکتریکی مثبت یا منفی q را که وجود داشته باشد می‌توان از معادلهٔ زیر به دست آورد

$$q = ne \qquad (\text{به ازای } n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots) \qquad (۲۲\text{-}۱۱)$$

که در آن e **بار بنیادی** است و برابر است با:

$$e = 1{,}60 \times 10^{-19}\,\text{C} \qquad (۲۲\text{-}۱۲)$$

بار بنیادی e یکی از ثابت‌های مهم طبیعت است. الکترون و پروتون، هر دو، دارای بار الکتریکی‌ای به بزرگی e هستند (جدول ۲۲-۱). (کوارک‌ها، ذره‌های تشکیل دهندهٔ پروتون‌ها و نوترون‌ها، حامل بارهای $\pm e/3$ یا $\pm 2e/3$ هستند، اما به ظاهر، آنها را به صورت منفرد نمی‌توان آشکار کرد. به این سبب و به دلایل تاریخی، بار الکتریکی آنها به عنوان بار بنیادی در نظر گرفته نمی‌شود).

جدول ۲۲-۱ بارهای الکتریکی سه ذره

ذره	نماد	بار
الکترون	e یا e^-	$-e$
پروتون	p	$+e$
نوترون	n	۰

شما اغلب با عبارت‌هایی ـ مانند «بار روی یک کره»، «مقدار بار منتقل شده»، و «بار الکترون» ـ مواجه می‌شوید، که گویی بار یک ماده است. (در واقع، از این نوع عبارت‌ها پیشتر هم در این فصل استفاده شده است). اما باید بدانید که منظور چیست: ذرات ماده‌اند و بار الکتریکی یکی از خاصیت‌های آنها، مانند جرم، است.

هرگاه یک کمیت فیزیکی مانند بار الکتریکی، به جای هر مقدار پیوسته، فقط دارای مقادیر گسسته باشد، گفته می‌شود که آن کمیت **کوانتیده** است. مثلاً، ممکن است ذره‌ای پیدا کرد که اصلاً بار نداشته باشد یا دارای بار $+10e$ یا $-6e$ باشد، اما ذره‌ای با بار، مثلاً $3{,}57e$، وجود ندارد.

کوانتوم بار بسیار کوچک است. مثلاً در هر ثانیه به یک لامپ روشنایی ۱۰۰ واتی در حدود 10^{19} بار بنیادی وارد و همین مقدار بار از آن خارج می‌شود. به هر حال، دانه‌ای بودن الکتریسیته در پدیده‌های بزرگ مقیاس مشاهده نمی‌شود (لامپ با عبور هر الکترون سو سو نمی‌زند)، و این، درست مانند آن است که ما نمی‌توانیم مولکول‌های مجزای آب را با دست خود حس کنیم.

دانه‌ای بودن الکتریسیته در هنگام جویدن قرص نعنا باعث گسیل شدن نور آبی می‌شود. وقتی در یک

آب‌نبات بلورهای قند (ساکاروز) می‌شکنند، یک بخش از هر بلور شکسته الکترون‌های اضافی و بخش دیگر یون‌های مثبت اضافی پیدا می‌کند. تقریباً به طور آنی، الکترون‌ها و یون‌ها از این طرف به آن محل شکستگی می‌پرند تا هر دو طرف را خنثی کنند. در حین پرش، الکترون‌ها و یون‌های مثبت با مولکول‌های نیتروژن هوای محل شکستگی برخورد می‌کنند.

این برخوردها باعث می‌شوند نیتروژن نور فرابنفش که نامرئی است گسیل کند. در این حال نور آبی (واقع در ناحیهٔ مرئی طیف نور) هم گسیل می‌شود که آن را به زحمت می‌توان دید. روغن بلورهای قرص نعنا نور فرابنفش را جذب می‌کند و بی‌درنگ نور آبی آن‌قدر تولید می‌شود که دهان انسان یا دهانهٔ انبردست (شکل سرآغاز فصل را ببینید) را روشن می‌کند. اما اگر قرص با بزاق دهان خیس شود، این پدیده اتفاق نمی‌افتد، زیرا بزاق دهان، که رساناست، دو بخش بلور شکسته شده را پیش از تولید جرقه، خنثی می‌کند.

خودآزمایی ۴: در آغاز، کرهٔ A دارای بار $-50e$ و کرهٔ B دارای بار $+20e$ است. این کره‌ها از یک مادهٔ رسانا ساخته شده و هم اندازه‌اند. اگر کره‌ها را با هم تماس دهیم، بار نهایی روی کرهٔ A چیست؟

مسألهٔ نمونهٔ ۲۲ـ۴

هستهٔ اتم آهن با شعاعی در حدود $4{,}0 \times 10^{-15}\text{m}$، دارای ۲۶ پروتون است.

(الف) بزرگی نیروی دافعهٔ الکتروستاتیکی میان دو پروتون، به فاصلهٔ $4{,}0 \times 10^{-15}\text{m}$، چقدر است؟

حل: نکتهٔ کلیدی این است که پروتون‌ها را می‌توان به صورت ذره‌های باردار در نظر گرفت. در نتیجه، نیروی الکتروستاتیکی وارد شده از یکی به دیگری از قانون کولن به دست می‌آید. جدول ۲۲ـ۱ نشان می‌دهد که بار پروتون $+e$ است. بنابراین، با استفاده از معادلهٔ ۲۲ـ۴، داریم

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r^2}$$

$$F = \frac{(8{,}99 \times 10^{9}\text{N.m}^2/\text{C}^2)(1{,}60 \times 10^{-19}\text{C})^2}{(4{,}0 \times 10^{-15}\text{m})^2} \Rightarrow$$

$$F = 14\text{N} \qquad \text{(پاسخ)}$$

این نیرو برای تأثیر روی یک شیء ماکروسکوپی، نظیر یک پرتقال، کوچک اما برای تأثیر روی یک پروتون، بسیار بزرگ است. چنین نیرویی می‌تواند هستهٔ هر عنصری به جز هیدروژن را (که فقط یک پروتون در هسته دارد) متلاشی کند. اما این رویداد، حتی در هسته‌های با پروتون زیاد هم صورت نمی‌گیرد. پس، در هستهٔ اتم باید یک نیروی جاذبهٔ قوی وجود داشته باشد تا با این نیروی دافعهٔ الکتروستاتیکی عظیم مقابله کند.

(ب) بزرگی نیروی گرانشی میان این دو پروتون چقدر است؟

حل: نکتهٔ کلیدی در اینجا همان **نکتهٔ کلیدی** قسمت (الف) است: چون پروتون‌ها ذره هستند، بزرگی نیروی گرانشی وارد شده از یکی به دیگری از معادلهٔ نیوتون برای نیروی گرانشی (معادلهٔ ۲۲ـ۲) به دست می‌آید. اگر m_p (مساوی با $1{,}67 \times 10^{-27}\text{kg}$) جرم پروتون باشد، با استفاده از معادلهٔ ۲۲ـ۲، داریم

$$F = G\frac{m_p^2}{r^2}$$

$$F = \frac{(6{,}67 \times 10^{-11}\text{N.m}^2/\text{kg}^2)(1{,}67 \times 10^{-27}\text{kg})^2}{(4{,}0 \times 10^{-15}\text{m})^2} \Rightarrow$$

$$F = 1{,}2 \times 10^{-35}\text{N} \qquad \text{(پاسخ)}$$

این نتیجه نشان می‌دهد که نیروی گرانشی (جاذبه‌ای) خیلی ضعیف‌تر از آن است که بتواند با نیروی دافعهٔ الکتروستاتیکی میان پروتون‌های هسته مقابله کند. پروتون‌ها با نیروی عظیمی با نام (مناسب) نیروی هسته‌ای قوی به هم وابسته‌اند. این نیرو در بین پروتون‌ها (و نوترون‌ها) وقتی اثر می‌کند که آنها، به صورت یک هسته، به هم نزدیک باشند.

اگر چه نیروی گرانشی از نیروی الکتروستاتیکی به مراتب ضعیف‌تر است، آن نیرو در شرایط بزرگ مقیاس با اهمیت‌تر است زیرا همیشه به صورت جاذبه است. منظور این است که این نیرو می‌تواند اجسام کوچک زیادی را به شکل اشیای غول‌پیکر با جرم‌های بزرگ، نظیر سیاره‌ها و ستاره‌ها، درکنار هم گردآورد، تا آنگاه، این اشیا نیروهای گرانشی بزرگی به هم وارد کنند. از سوی دیگر، نیروی الکتروستاتیکی برای بارهای هم علامت دافعه است. در نتیجه، این نیرو نمی‌تواند بارهای مثبت یا بارهای منفی را آن قدر متمرکز کند که بتوانند یک نیروی الکتروستاتیکی قوی به هم وارد کنند.

۶-۲۲ بار الکتریکی پایسته است

هرگاه یک میلهٔ شیشه‌ای را با پارچهٔ ابریشمی مالش دهیم، در روی میله بار الکتریکی مثبت ظاهر می‌شود. اندازه‌گیری نشان می‌دهد که پارچهٔ ابریشمی هم به همان اندازه بار منفی پیدا می‌کند. از اینجا معلوم می‌شود که مالش دادن، بارالکتریکی نمی‌آفریند، بلکه صرفاً با به هم زدن خنثایی الکتریکی هر جسم در حین مالش، بار را از جسمی به جسم دیگر منتقل می‌کند. این فرضیهٔ **پایستگی بار الکتریکی**، که نخستین بار توسط بنجمین فرانکلین اعلام شد، طی بررسی‌های تجربی پیگیر، هم دربارهٔ اجسام باردار بزرگ مقیاس و هم دربارهٔ اتم‌ها، هسته‌ها، و ذره‌های بنیادی، به تأیید رسیده و در این مورد هیچ‌گونه استثنایی مشاهده نشده است. بنابراین، بار الکتریکی را نیز باید به فهرست کمیت‌هایی مانند انرژی و تکانه‌های خطی و زاویه‌ای، که از قانون پایستگی پیروی می‌کنند، افزود.

واپاشی پرتوزای هسته‌ها، که در آن هسته‌ای خود به خود به هسته‌ای از نوع دیگر تبدیل می‌شود، نمونه‌های متعددی از پایستگی بار را در مقیاس هسته‌ای به دست می‌دهد. برای مثال، اورانیوم - ۲۳۸ یا ^{238}U، که در سنگ معدنی اورانیوم یافت می‌شود، می‌تواند با گسیل داشتن یک ذرهٔ آلفا (هستهٔ هلیوم، ^{4}He) واپاشیده شود و به توریوم ^{234}Th، تبدیل شود:

$$^{238}U \longrightarrow {}^{234}Th + {}^{4}He$$ (واپاشی پرتوزا) (۱۳-۲۲)

عدد اتمی Z هستهٔ مادر پرتوزای ^{238}U، برابر با ۹۲ است، که نشان می‌دهد این هسته شامل ۹۲ پروتون و بار الکتریکی $92e$ است. ذرهٔ آلفای گسیل شده دارای $Z = 2$ و هستهٔ دختر ^{234}Th دارای $Z = 90$ است. بنابراین، مقدار بار موجود پیش از واپاشی، یعنی $92e$، با مقدار کل بار پس از واپاشی، یعنی $2e + 90e$، برابر است. پس، **بار الکتریکی پایسته است.**

مثال دیگری از پایستگی بار الکتریکی هنگامی مشاهده می‌شود که یک الکترون e^- (با بار $-e$) با پادذره‌اش، یعنی پوزیترون e^+ (با بار $+e$)، یک فرایند نابودی انجام می‌دهد. در این فرایند دو ذره به دو پرتو گاما (نور پرانرژی) تبدیل می‌شوند:

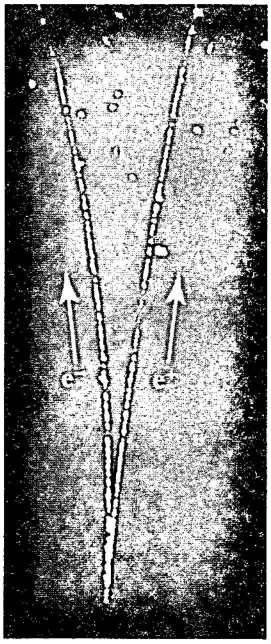
$$e^- + e^+ \longrightarrow \gamma + \gamma$$ (نابودی) (۱۴-۲۲)

هنگام استفاده کردن از اصل پایستگی بار الکتریکی باید بارها را به‌طور جبری و با توجه به علامت آنها با هم جمع کرد. بنابراین، در فرایند نابودی معادلهٔ ۲۲-۱۴، بار خالص دستگاه پیش و پس از رویداد صفر است. پس، بار الکتریکی پایسته است.

در فرایند **تولید زوج** هم، که عکس فرایند نابودی است، بار الکتریکی پایسته است. در این فرایند پرتو گاما به یک الکترون و یک پوزیترون تبدیل می‌شود:

$$\gamma \longrightarrow e^- + e^+$$ (تولید زوج) (۱۵-۲۲)

شکل ۲۲-۱۰ رویداد تولید زوج را که در یک اتاقک حباب روی داده است، نشان می‌دهد. پرتو گامایی از پایین به اتاقک وارد و در نقطه‌ای به یک الکترون و یک پوزیترون تبدیل شده است. چون ذره‌های جدید باردار و متحرک‌اند، ردهایی از حبابهای ریز به جا می‌گذارند. (این ردها خمیده‌اند زیرا در اتاقک یک میدان مغناطیسی برقرار شده است). چون پرتو گاما از نظر الکتریکی خنثی است، هیچ ردی به جا نمی‌گذارد. اکنون با دقت می‌توان گفت که فرایند تولید زوج در کجا روی می‌دهد. این نقطه در نوک شکل **V** است که ردهای الکترون و پوزیترون از آنجا آغاز می‌شوند.



شکل ۲۲-۱۰ تصویری از ردهای حباب‌های به جا مانده توسط الکترون و پوزیترون در یک اتاقک حباب. این جفت ذره به وسیلهٔ پرتو گامای وارد شده از پایین به اتاقک تولید شده‌اند. چون پرتو گاما از نظر الکتریکی خنثی است، مانند الکترون و پوزیترون، ردی از حباب در مسیر خود به جا نمی‌گذارد.

مرور و خلاصهٔ مطالب فصل

بار الکتریکی میزان قدرت برهم‌کنش الکتریکی یک ذره با اشیای پیرامون بستگی به **بار الکتریکی** آن ذره دارد، که می‌تواند مثبت یا منفی باشد. بارهای همنام یکدیگر را می‌رانند و بارهای ناهمنام یکدیگر را می‌ربایند. شیئی که دارای مقادیر مساوی از دو نوع بار باشد، از نظر الکتریکی خنثی

است، اما شیئی که در آن یکی از این دو نوع بار نامتوازن است، از نظر الکتریکی باردار است.

رساناها موادی هستند که در آنها تعداد قابل توجهی از ذره‌های باردار (الکترون‌ها در فلزات) به آزادی حرکت می‌کنند. در **نارساناها** یا **عایق‌ها** ذره‌های باردار برای حرکت آزاد نیستند. وقتی در ماده‌ای بارهای الکتریکی حرکت می‌کنند، می‌گوییم در آن ماده یک **جریان الکتریکی** وجود دارد.

کولن و آمپر یکای SI بار الکتریکی **کولن** (با نماد C) است. تعریف این یکا برحسب یکای جریان الکتریکی، یعنی **آمپر** (با نماد A)، چنین است: هرگاه از نقطهٔ معینی از یک سیم جریان یک آمپری عبور کند، مقدار بار الکتریکی گذرنده از آن نقطه در مدت یک ثانیه، یک کولن است.

قانون کولن قانون کولن **نیروی الکتروستاتیکی** میان بارهای الکتریکی کوچک (نقطه‌ای) ساکن (یا تقریباً ساکن) q_1 و q_2 به فاصلهٔ r از یکدیگر را توصیف می‌کند:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1||q_2|}{r^2} \qquad \text{(قانون کولن)} \qquad (۲۲\text{-}۴)$$

در اینجا $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12} C^2/N.m^2$ **ثابت گذردهی** و $\frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)} = k = 8{,}99 \times 10^9 N.m^2/C^2$ است.

نیروی جاذبه یا نیروی دافعهٔ میان بارهای نقطه‌های ساکن، در راستای خط واصل دو بار اثر می‌کند. در صورت وجود بیش از دو بار الکتریکی معادلهٔ ۲۲-۴ در مورد نیروهای میان هر جفت بار صادق است. نیروی برایند مؤثر بر هر بار با استفاده از اصل بر هم نهی، از جمع برداری نیروهای مؤثر بر آن بار از سوی هر یک از بارهای دیگر، به دست می‌آید.

دو قضیهٔ مربوط به پوسته‌های کروی عبارت‌اند از:

یک پوستهٔ کروی با بار الکتریکی یکنواخت ذرهٔ واقع در خارج پوسته را چنان جذب یا دفع می‌کند که گویی تمام بار آن در مرکزش متمرکز شده است.

اگر ذرهٔ بارداری درون یک پوستهٔ کروی با بار یکنواخت قرار گیرد، هیچ نیروی الکتروستاتیکی برایندی از سوی پوسته به ذره وارد نمی‌شود.

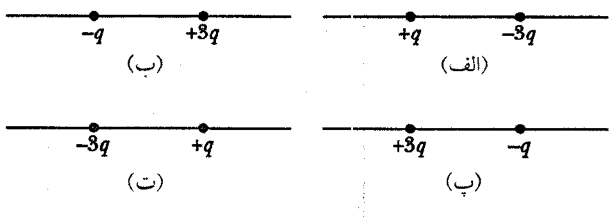
بار بنیادی بار الکتریکی **کوانتیده** است: هر بار را می‌توان به صورت ne نوشت که در آن n عددی درست، مثبت یا منفی و e یک ثابت طبیعی موسوم به **بار بنیادی** (به بزرگی تقریباً $1{,}60 \times 10^{-19} C$) است. بار الکتریکی **پایسته** است: بار خالص (جبری) هر دستگاه منزوی نمی‌تواند تغییر کند.

پرسش‌ها

۱. آیا قانون کولن برای تمام اشیای باردار صادق است؟

۲. ذره‌ای با بار q را به نوبت، در خارج این چهار شیء فلزی دارای بار یکنواخت Q قرار می‌دهیم: (۱) یک کرهٔ توپر بزرگ، (۲) یک پوستهٔ کروی بزرگ، (۳) یک کرهٔ توپر کوچک، و (۴) یک پوستهٔ کروی کوچک. فاصلهٔ میان ذره و مرکز اشیا یکسان و q آن‌قدر کوچک است که توزیع یکنواخت Q را تغییر قابل ملاحظه‌ای نمی‌دهد. این اشیا را با توجه به نیروی الکتروستاتیکی وارد شده به ذره، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.

۳. شکل ۲۲-۱۱، چهار حالت را نشان می‌دهد که در آن ذرات باردار روی محوری قرار گرفته‌اند. در کدام حالت در سمت چپ ذرات نقطه‌ای وجود دارد که در آن یک الکترون می‌تواند در حال تعادل باشد؟



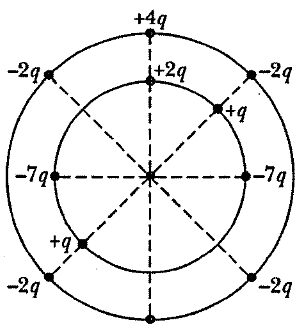
شکل ۲۲-۱۱ پرسش ۳.

۴. شکل ۲۲-۱۲، دو ذرهٔ باردار واقع بر روی یک محور را نشان می‌دهد. این بارها می‌توانند به آزادی حرکت کنند. اما در یک نقطه ذرهٔ باردار سومی می‌توان قرار داد، به گونه‌ای که هر سه ذره در حال تعادل باشند. (الف) آیا این نقطه نسبت به دو ذرهٔ اول، در سمت چپ، در سمت راست یا در فاصلهٔ میان آنها، قرار دارد؟ (ب) آیا ذرهٔ سوم باید دارای بار مثبت یا بار منفی باشد؟ (پ) آیا تعادل پایدار است یا ناپایدار؟



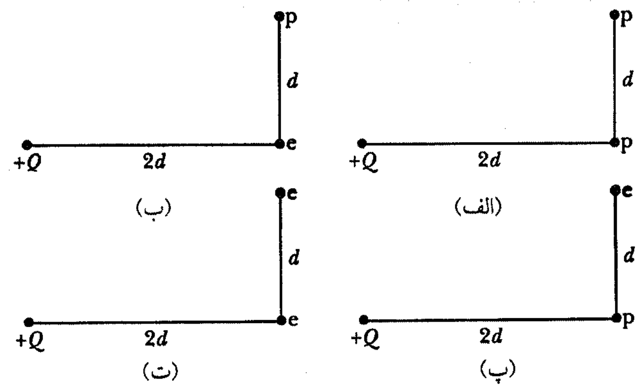
شکل ۲۲-۱۲ پرسش ۴.

۵. در شکل ۲۲-۱۳، یک ذرهٔ مرکزی با بار $-q$ توسط دو حلقهٔ دایره‌ای شامل ذره‌های باردار، با شعاع‌های r و R $(R > r)$ احاطه شده است. بزرگی و جهت نیروی الکتروستاتیکی برایند وارد به ذرهٔ مرکزی از سوی ذره‌های دیگر، چیست؟



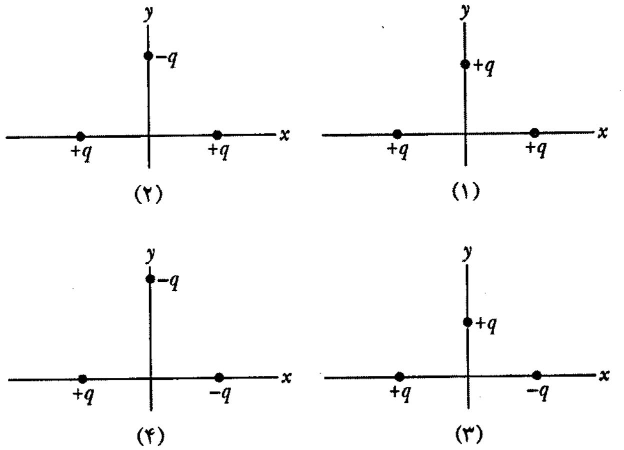
شکل ۲۲-۱۳ پرسش ۵.

۶. شکل ۲۲-۱۴ ، چهار آرایش از ذرات باردار را نشان می‌دهد. این آرایش‌ها را با توجه به بزرگی نیروی الکتروستاتیکی برایند وارد شده به بار $+Q$ ، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



شکل ۲۲-۱۴ پرسش ۶.

۷. شکل ۲۲-۱۵ ، چهار حالت را نشان می‌دهد که در آنها ذره‌های با بار $+q$ یا $-q$ در نقاطی قرار گرفته‌اند. در هر حالت، فاصلهٔ ذره‌های واقع بر محور x نسبت به محور y یکسان است. نخست، ذرهٔ میانی را در حالت ۱ در نظر بگیرید: ذرهٔ میانی از سوی دو ذرهٔ دیگر تحت اثر یک نیروی الکتروستاتیکی قرار می‌گیرد. (الف) آیا F ، بزرگی‌های این نیروها یکسان‌اند یا تفاوت دارند؟ (ب) آیا بزرگی نیروی برایند وارد بر ذرهٔ میانی نسبت به $2F$ ، برابر است، بزرگتر است یا کوچکتر است؟ (پ) آیا مؤلفه‌های x دو نیرو با هم جمع می‌شوند یا یکدیگر را حذف می‌کنند؟ (ت) آیا مؤلفه‌های y آنها با یکدیگر جمع می‌شوند یا یکدیگر را حذف می‌کنند؟ (ث) آیا جهت نیروی برایند وارد به ذرهٔ میانی مربوط به مؤلفه‌هایی است که یکدیگر را حذف می‌کنند یا با هم جمع می‌شوند؟ (ج) جهت نیروی برایند چگونه است؟ اکنون، حالت‌های باقی مانده را در نظر بگیرید: جهت نیروی برایند وارد به ذرهٔ میانی در (چ) حالت ۲ ، (ح) حالت ۳ ، و (خ) حالت ۴ ، چگونه است؟ (در هر حالت، تقارن توزیع بار را در نظر بگیرید و مؤلفه‌های حذف کنندهٔ یکدیگر و مؤلفه‌های جمع‌شونده با هم را معین کنید).



شکل ۲۲-۱۵ پرسش ۷.

۸. یک گلولهٔ با بار مثبت را به یک رسانای منزوی خنثی نزدیک می‌کنیم. سپس، در حالی که گلوله نزدیک رسانا قرار دارد، رسانا را به زمین وصل می‌کنیم. در حالت‌های زیر آیا رسانا بار مثبت دارد، بار منفی دارد، یا خنثی است، (الف) ابتدا گلوله را دور و سپس اتصال زمین را قطع می‌کنیم، و (ب) ابتدا اتصال زمین را قطع و سپس گلوله را دور می‌کنیم؟

۹. (الف) یک میلهٔ شیشه‌ای با بار مثبت، یک شیء آویخته از یک ریسمان نارسانا را می‌رباید. آیا این شیء به طور قطعی بار منفی دارد یا فقط ممکن است بار منفی داشته باشد؟ (ب) یک میلهٔ شیشه‌ای با بار مثبت، شیء آویختهٔ مشابهی را می‌راند. آیا این شیء به طور قطعی بار مثبت دارد یا فقط ممکن است بار مثبت داشته باشد؟

۱۰. در شکل ۲۲-۴ ، میلهٔ پلاستیکی (با بار منفی) باعث می‌شد برخی الکترون‌های رسانش در میلهٔ مسی به آن سر میله حرکت کنند. چرا شارش این الکترون‌های رسانش به سرعت قطع می‌شود؟ به هر حال، تعداد زیادی از آنها می‌توانند به آزادی تا آن سر میله حرکت کنند.

۱۱. شخصی که روی یک سکوی عایق‌بندی شده از نظر الکتریکی ایستاده است، دست خود را به یک رسانای باردار منزوی تماس می‌دهد. آیا این عمل بار الکتریکی رسانا را به طور کامل تخلیه می‌کند؟

تمرین‌ها و مسأله‌ها

بخش ۲۲-۴ قانون کولن

۱ ت*. فاصلهٔ میان بار نقطه‌ای $q_1 = 26.0\,\mu C$ و بار نقطه‌ای $q_2 = -47.0\,\mu C$ چقدر باید باشد تا بزرگی نیروی الکتروستاتیکی میان آنها $5.70\,N$ شود؟

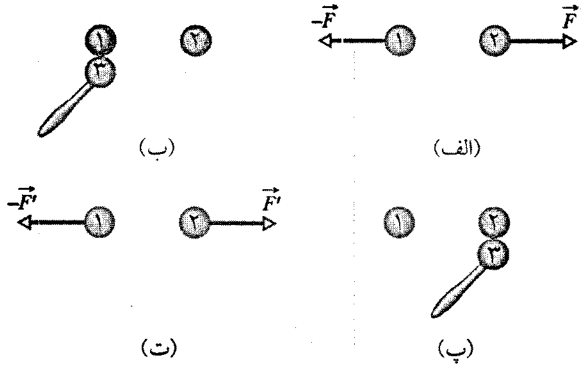
۲ ت. یک بار نقطه‌ای $+3.0 \times 10^{-6}\,C$ به فاصلهٔ ۱۲cm از بار نقطه‌ای $-1.5 \times 10^{-6}\,C$ قرار دارد. بزرگی نیروی وارد بر هر بار را حساب کنید.

۳ ت. دو ذرهٔ با بارهای الکتریکی یکسان و به فاصلهٔ $3.2 \times 10^{-3}\,m$ از هم، از حال سکون رها می‌شوند. شتاب آغازی ذرهٔ اول $7.0\,m/s^2$ و شتاب آغازی ذرهٔ دوم $9.0\,m/s^2$ است. اگر جرم ذرهٔ اول $6.3 \times 10^{-7}\,kg$ باشد، (الف) جرم ذرهٔ دوم، و (ب) بزرگی بار هر ذره، چقدر است؟

۴ ت. دو کرهٔ رسانای مشابه و منزوی ۱ و ۲ دارای بار الکتریکی یکسان‌اند و در مقایسه با قطرشان به فاصلهٔ زیاد از هم قرار گرفته‌اند. (شکل ۲۲-۱۶ الف). نیروی الکتروستاتیکی وارد شده به کرهٔ ۲ از سوی کرهٔ ۱ ، $\vec{F}$ است. حال، کرهٔ مشابه ۳ را که دستهٔ عایقی دارد و در آغاز خنثی است، ابتدا با

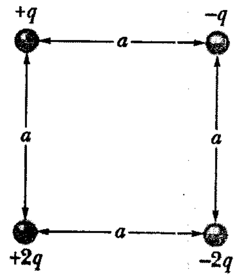
* حرف ت نماد تمرین و حرف م نماد مسأله است. ـ م.

کرهٔ ۱ (شکل ۲۲-۱۶ ب)، سپس با کرهٔ ۲ (شکل ۲۲-۱۶ پ) تماس می‌دهیم و، سرانجام، آن را دور می‌کنیم (شکل ۲۲-۱۶ ت). در این حالت، بزرگی $\vec{F'}$، نیروی الکتروستاتیکی وارد شده به کرهٔ ۲، برحسب بزرگی F، چقدر است؟



شکل ۲۲-۱۶ تمرین ۴.

۵ م. در شکل ۲۲-۱۷، مؤلفه‌های (الف) افقی و (ب) قائم نیروی الکتروستاتیکی برایند وارد بر ذرهٔ باردار گوشهٔ پایین سمت چپ مربع را با فرض $q = ۱٫۰ \times ۱۰^{-۷}\text{C}$ و $a = ۵٫۰\text{cm}$، معین کنید.

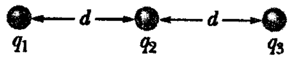


شکل ۲۲-۱۷ مسألهٔ ۵.

۶ م. بارهای نقطه‌ای $q_۱$ و $q_۲$ بر روی محور x، به ترتیب، در نقطه‌های $x = -a$ و $x = +a$ واقع شده‌اند. (الف) رابطهٔ میان $q_۱$ و $q_۲$ چگونه باید باشد تا نیروی الکتروستاتیکی برایند وارد بر بار $+Q$، واقع در نقطهٔ $x = +a/۲$، صفر شود؟ (ب) قسمت (الف) را برای حالتی که بار نقطه‌ای $+Q$ در $x = +۳a/۲$ قرار دارد، تکرار کنید.

۷ م. دو کرهٔ رسانای مشابه وقتی به فاصلهٔ $۵۰٫۰\text{cm}$ از هم (مرکز ـ تا ـ مرکز) قرار می‌گیرند، یکدیگر را با نیروی الکتروستاتیکی $۰٫۱۰۸\text{N}$ می‌ربایند. دراین حال کره‌ها را با یک سیم به هم وصل می‌کنیم. وقتی سیم را بر می‌داریم کره‌ها یکدیگر را با نیروی الکتروستاتیکی $۰٫۰۳۶۰\text{N}$ می‌رانند. مقدار بارهای آغازی روی کره‌ها چقدر بوده است؟

۸ م. در شکل ۲۲-۱۸، سه ذرهٔ باردار روی یک خط راست به فاصلهٔ d از هم قرار دارند. بارهای $q_۱$ و $q_۲$ ثابت نگه داشته شده‌اند. بار $q_۳$، که می‌تواند آزادانه حرکت کند در حال تعادل است. (هیچ نیروی الکتروستاتیکی‌ای به آن وارد نمی‌شود). $q_۱$ را برحسب $q_۲$ پیدا کنید.



شکل ۲۲-۱۸ مسألهٔ ۸.

۹ م. دو ذرهٔ آزاد (یعنی، آزاد برای حرکت کردن) با بارهای $+q$ و $+۴q$ به فاصلهٔ L از هم قرار دارند. بار الکتریکی سوم طوری قرار گرفته که کل دستگاه در حال تعادل است. (الف) مکان، بزرگی و علامت بار سوم را معین کنید. (ب) نشان دهید که این تعادل ناپایدار است.

۱۰ م. دو ذرهٔ ثابت با بارهای $q_۱ = +۱٫۰\mu\text{C}$ و $q_۲ = -۳٫۰\mu\text{C}$ به فاصلهٔ ۱۰cm از هم قرار دارند. بار سومی را در چه فاصله‌ای از هر ذره باید قرار داد تا هیچ نیروی الکتروستاتیکی برایندی به آن وارد نشود؟

۱۱ م. (الف) دو بار الکتریکی مثبت و مساوی یکی روی زمین و دیگری روی ماه قرار داده می‌شود. مقدار هر بار الکتریکی چه قدر باید باشد تا نیروی جاذبهٔ گرانشی میان زمین و ماه خنثی شود؟ آیا برای حل کردن این مسأله به فاصلهٔ میان ماه و زمین نیاز است؟ چرا بله و چرا نه؟ (ب) چند کیلوگرم هیدروژن لازم است تا بار مثبت محاسبه شده در قسمت (الف) تأمین شود؟

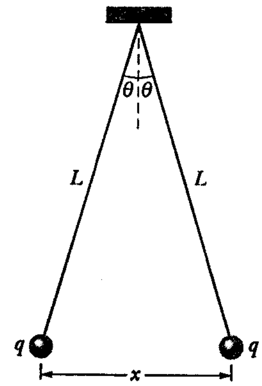
۱۲ م. بارهای الکتریکی و مختصات دو ذرهٔ باردار که در صفحهٔ xy ثابت نگه‌داشته شده‌اند، عبارت‌اند از: $q_۱ = +۳٫۰\mu\text{C}$، $x = ۳٫۵\text{cm}$، $y = ۰٫۵\text{cm}$ و $q_۲ = -۴٫۰\mu\text{C}$، $x = -۲٫۰\text{cm}$، $y = ۱٫۵\text{cm}$. (الف) بزرگی و جهت نیروی الکتروستاتیکی وارد بر $q_۲$ را پیدا کنید. (ب) ذرهٔ سومی با بار $q_۳ = +۴٫۰\mu\text{C}$ را در کجا باید قرار داد تا نیروی الکتروستاتیکی برایند وارد بر $q_۲$ صفر شود؟

۱۳ م. بار الکتریکی معین Q به دو بخش q و $Q - q$ تقسیم می‌شود و بارها به فاصلهٔ معینی از هم قرار داده می‌شوند. q برحسب Q چقدر باید باشد تا نیروی دافعهٔ الکتروستاتیکی میان دو بار بیشینه شود؟

۱۴ م. در هر یک از دو گوشهٔ متقابل یک مربع بار Q و در هر یک از دو گوشهٔ متقابل دیگر مربع ذره‌ای با بار q قرار گرفته است. (الف) اگر نیروی الکتروستاتیکی برایند وارد بر هر ذرهٔ با بار Q صفر باشد، مقدار Q برحسب q چیست؟ (ب) آیا هیچ مقداری از q وجود دارد که به ازای آن نیروی الکتروستاتیکی برایند وارد بر هر یک از چهار ذره صفر شود؟ توضیح دهید.

۱۵ م. در شکل ۲۲-۱۹، دو گلولهٔ رسانای کوچک و مشابه، هر یک به جرم یکسان m و با بار یکسان q از نخهای نارسانایی به طول L آویخته شده‌اند. فرض کنید θ آن قدر کوچک است که به جای $\tan\theta$ می‌توان مقدار تقریباً، مساوی آن $\sin\theta$ را قرار داد. (الف) نشان دهید که در حالت تعادل دستگاه، داریم

$$x = \left(\frac{q^۲L}{۲\pi\varepsilon_۰ mg}\right)^{\frac{۱}{۳}}$$

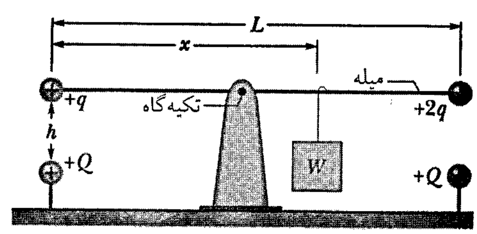


شکل ۲۲ـ۱۹ مسألهٔ ۱۵.

که در آن x فاصلهٔ میان گلوله‌هاست. (ب) به ازای $L = $ ۱۲۰cm ، $m = $ ۱۰g ، و $x = $ ۵٫۰cm ، مقدار q چقدر است؟

۱۶ م. در قسمت (ب) مسألهٔ ۱۵ اگر بار یکی از گلوله‌ها تخلیه شود (مثلاً با اتصال بار q به زمین)، توضیح دهید برای گلوله‌ها چه اتفاقی می‌افتد و فاصلهٔ جدایی تعادل جدید گلوله‌ها، x، را با استفاده از مقادیر معلوم L و m و مقدار محاسبه شدهٔ q، پیدا کنید.

۱۷ م. شکل ۲۲ـ۲۰، یک میلهٔ نارسانای دراز بدون جرم به طول L را نشان می‌دهد که در مرکزش روی تکیه‌گاهی سوار شده و با وزنهٔ W به فاصلهٔ x از انتهای سمت چپ میله در حال تعادل است. دو انتهای چپ و راست میله به کره‌های رسانای کوچکی با بارهای مثبت، به‌ترتیب q و $2q$، وصل شده‌اند. در فاصلهٔ h درست در زیر هر یک از این کره‌ها یک کرهٔ ثابت با بار الکتریکی مثبت Q قرار داده شده است. (الف) فاصلهٔ x را در موقعی که میله افقی و در حال تعادل است، پیدا کنید. (ب) مقدار h چقدر باید باشد تا میلهٔ در حالت تعادل و افقی هیچ نیروی قائمی به تکیه گاه وارد نکند؟



شکل ۲۲ـ۲۰ مسألهٔ ۱۷.

بخش ۲۲ـ۵ بار الکتریکی کوانتیده است

۱۸ ت. در بلور نمک طعام بزرگی نیروی الکتروستاتیکی میان یون سدیوم یک بار یونیده (Na^+، با بار $+e$) و یون کلر یک بار یونیدهٔ مجاور (Cl^-، با بار $-e$) چقدر است؟ فاصلهٔ میان دو یون 10^{-10}m × ۲٫۸۲ است.

۱۹ ت. بار الکتریکی کل ۷۵٫۰kg الکترون چند کولن است؟

۲۰ ت. در ۱٫۰۰mol گاز هیدروژن (H_2) چند مگا کولن بار مثبت (یا بار منفی) وجود دارد؟

۲۱ ت. بزرگی نیروی الکتروستاتیکی میان دو یون مشابه که به فاصلهٔ 10^{-10}m × ۵٫۰ از هم قرار دارند، 10^{-9}N × ۳٫۷ است. (الف) بار الکتریکی هر یون چقدر است؟ (ب) هر یون چند الکترون «از دست داده است» (که در نتیجه از نظر بار الکتریکی ناموازن شده است)؟

۲۲ ت. فاصلهٔ (مرکز ـ تا ـ مرکز) دو قطرهٔ کروی کوچک آب ۱٫۰۰cm و مقدار بارهای هر یک 10^{-16}C × ۱٫۰۰− است. (الف) بزرگی نیروی الکتروستاتیکی مؤثر بین آنها چقدر است؟ (ب) در هر قطره چند الکترون اضافی وجود دارد که بار قطره را ناموازن کرده است؟

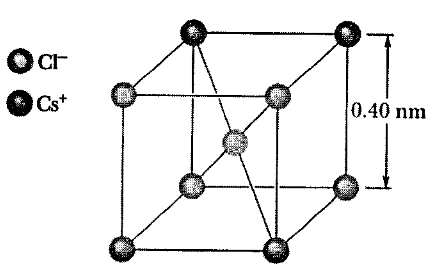
۲۳ ت. چند الکترون باید از یک سکهٔ مسی خارج شود تا بار الکتریکی باقی‌مانده در آن 10^{-7}C × ۱٫۰+ شود؟

۲۴ ت. الکترونی در نزدیکی سطح زمین در خلاء قرار دارد. الکترون دیگری در کجا باید قرار گیرد تا نیروی الکتروستاتیکی که به الکترون اول وارد می‌کند با نیروی گرانشی وارد شده به الکترون اول از سوی زمین، برابر شود.

۲۵ م. جوّ زمین به طور دایم توسط پروتون‌های پرتوهای کیهانی گسیل شده از فضا بمباران می‌شود. اگر پروتون‌ها از جوّ زمین عبور کنند، در هر ثانیه به طور متوسط ۱۵۰۰ پروتون به هر مترمربع از سطح زمین برخورد می‌کند. جریان الکتریکی متناظر با برخورد پروتون‌ها به کل سطح زمین چقدر است؟

۲۶ م. بار الکتریکی مثبت موجود در ۲۵۰cm^3 (در حدود یک لیوان) آب را برحسب کولن حساب کنید.

۲۷ م. در ترکیب CsCl (کلرید سزیوم) یون‌های Cs^+ در گوشه‌های مکعبی واقع‌اند که یون Cl^- در مرکز آن مکعب قرار دارد (شکل ۲۲ـ۲۱). طول ضلع مکعب ۰٫۴۰nm است. هر یک از یون‌های Cs^+ یک الکترون کم دارند (در نتیجه، بار هر یک از آنها $+e$ است)، و یون Cl^- یک الکترون اضافه دارد (در نتیجه، بار آن $-e$ است). (الف) بزرگی نیروی الکتروستاتیکی برایند وارد بر یون Cl^- از سوی هشت یون Cs^+ واقع در گوشه‌های مکعب چقدر است؟ (ب) در صورت حذف شدن یکی از یون‌های Cs^+ گفته می‌شود بلور نقص دارد؛ بزرگی نیروی الکتروستاتیکی برایند وارد بر یون Cl^- از سوی هفت یون Cs^+ باقی مانده چقدر است؟



شکل ۲۲ـ۲۱ مسألهٔ ۲۷.

۲۸ م. می‌دانیم بزرگی بار منفی الکترون با بزرگی بار مثبت پروتون برابر است. با وجود این، فرض کنید این بزرگی‌ها به مقدار ۰٫۰۰۰۱۰ درصد تفاوت داشته باشند. دو سکهٔ مسی واقع در فاصلهٔ $1{,}0\ \mathrm{m}$ از هم با چه نیرویی یکدیگر را می‌رانند؟ فرض کنید هر سکه دارای 3×10^{22} اتم مس است. (راهنمایی: یک اتم خنثای مس ۲۹ پروتون و ۲۹ الکترون دارد). چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

بخش ۲۲ـ۶ بار الکتریکی پایسته است

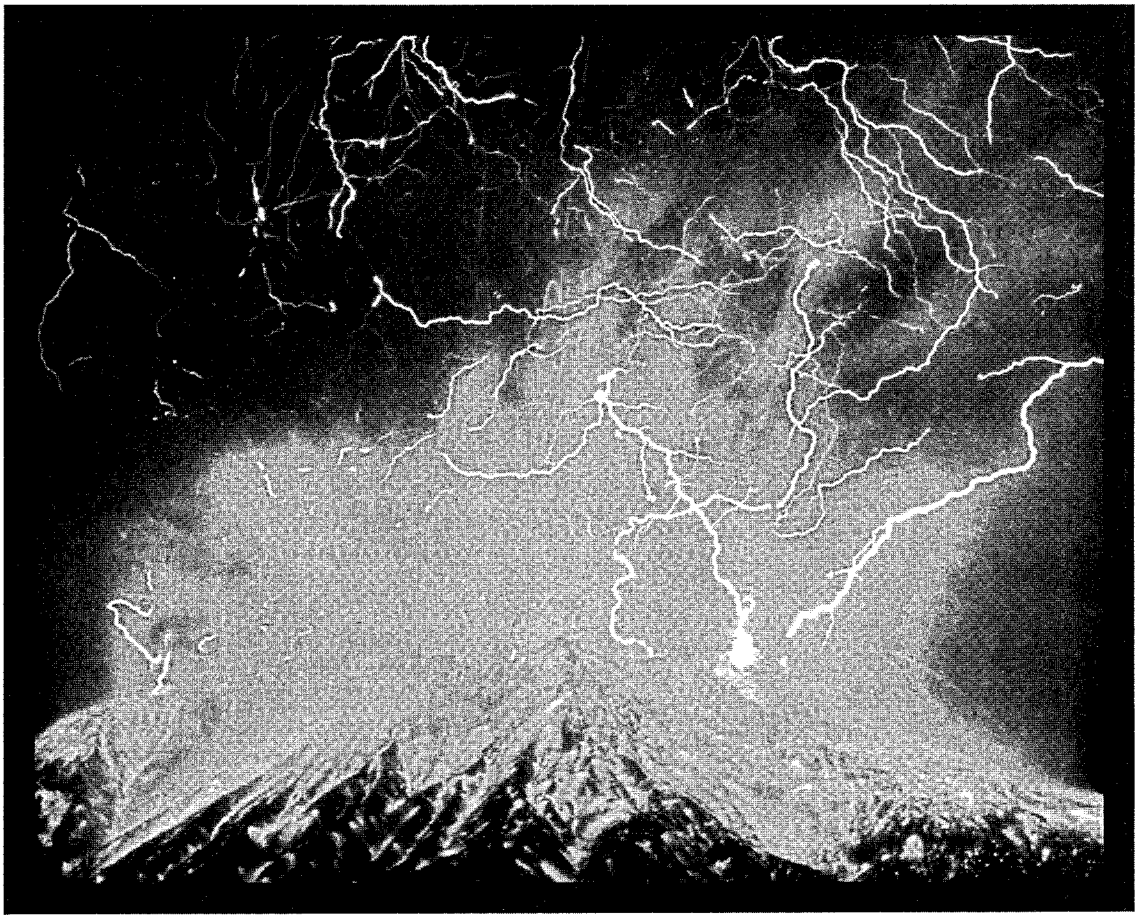
۲۹ ت. در معادله‌های واکنش‌های هسته‌ای زیر، X را معین کنید (در واکنش اول، n معرف نوترون است): (الف) $^{1}\mathrm{H} + {}^{9}\mathrm{Be} \longrightarrow \mathrm{X} + \mathrm{n}$ ؛ (ب) $^{12}\mathrm{C} + {}^{1}\mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{X}$ ؛ (پ) $^{15}\mathrm{N} + {}^{1}\mathrm{H} \longrightarrow {}^{4}\mathrm{He} + \mathrm{X}$. از پیوست ج کتاب استفاده کنید.

مسألهٔ تکمیلی

۳۰. در مسألهٔ ۱۳ فرض کنید $q = \alpha Q$. (الف) رابطهٔ مربوط به بزرگی F، نیروی میان بارهای الکتریکی را برحسب α ، Q و فاصلهٔ بارها d، بنویسید. (ب) نمودار تغییرات F را برحسب α رسم کنید. با استفاده از نمودار، مقادیر α را در (پ) مقدار بیشینهٔ F و (ت) نصف مقدار بیشینهٔ F، به طور ترسیمی پیدا کنید.

۲۳

میدان‌های الکتریکی



در حین فوران‌های پی در پی آتشفشان **ساکوراجیما** در ژاپن درخش‌های تخلیهٔ الکتریکی (جرقه) متعددی در بالای دهانهٔ آتشفشان مشاهده می‌شود، که آسمان را روشن و صداهایی شبیه تندر تولید می‌کنند. اما این اثر نمودی از آذرخش حاصل از توفان تندری ابرهای باردار حاوی قطره‌های آب در هنگام برخورد به زمین نیست و چیزی متفاوت است.

ناحیهٔ بالای آتشفشان چگونه باردار می‌شود و آیا راهی وجود دارد که دریابیم جرقه‌ها از دهانه به بیرون می‌آیند یا به درون می‌روند؟

در این فصل به این پرسش پاسخ داده خواهد شد.

۱ـ۲۳ بارهای الکتریکی و نیروها: نگاهی دقیق

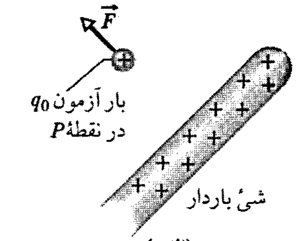
فرض کنید بار الکتریکی نقطه‌ای مثبت q_1 را در جایی ثابت نگه می‌داریم و سپس بار الکتریکی نقطه‌ای دیگر q_2 را، که مثبت است، در نزدیکی آن قرار می‌دهیم. با توجه به قانون کولن می‌دانیم که q_1 یک نیروی دافعهٔ الکتروستاتیکی به q_2 وارد می‌کند و ما با داشتن داده‌های کافی می‌توانیم بزرگی و جهت این نیرو را معین کنیم. اما هنوز این پرسش تردیدآمیز باقی است که: بار q_1 از وجود بار q_2 چگونه «با خبر» می‌شود؟ اگر بارهای الکتریکی با هم تماس ندارند q_1 چگونه می‌تواند به q_2 نیرو وارد کند؟

این پرسش مربوط به پدیدهٔ کنش از دور را می‌توان چنین پاسخ داد که بگوییم q_1 در فضای پیرامون خود یک **میدان الکتریکی** به وجود می‌آورد. در هر نقطه مانند P از این فضا میدان دارای بزرگی و جهت است. بزرگی میدان به بزرگی q_1 و فاصلهٔ میان P و q_1 بستگی دارد. این میدان در راستای خط واصل q_1 به P اثر می‌کند و جهت آن وابسته به علامت الکتریکی بار q_1 است. بنابراین، وقتی q_2 را در نقطهٔ P قرار می‌دهیم q_1 از طریق میدان الکتریکی در نقطهٔ P با q_2 برهم کنش ایجاد می‌کند. بزرگی و جهت میدان الکتریکی، بزرگی و جهت نیروی وارد بر q_2 را معین می‌کند.

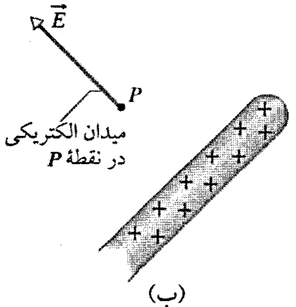
مسألهٔ دیگر در موردکنش از دور هنگامی بروز می‌کند که بار q_1 را مثلاً به طرف بار q_2 حرکت دهیم. بنا به قانون کولن وقتی q_1 به q_2 نزدیکتر می‌شود نیروی دافعهٔ الکتروستاتیکی وارد بر q_2 باید بیشتر شود ـ که می‌شود. اما در اینجا پرسش تردیدآمیز دیگری مطرح می‌شود: آیا میدان الکتریکی در محل q_2، و در نتیجه نیروی وارد بر q_2، بی‌درنگ تغییر می‌کند؟

پاسخ منفی است و اطلاعات مربوط به حرکت q_1 به صورت یک موج الکترومغناطیسی (در تمام جهت‌ها) با تندی نور c ، از q_1 به برون‌سو منتشر می‌شود. وقتی این موج در نهایت به q_2 می‌رسد میدان الکتریکی در q_2، و در نتیجه نیروی وارد بر q_2، تغییر می‌کند.

۲ـ۲۳ میدان الکتریکی



(الف)



(ب)

شکل ۱ـ۲۳ (الف) بار آزمون مثبت q_0 در نقطهٔ P نزدیک یک شیء باردار قرار داده شده است و نیروی الکتروستاتیکی $\vec{F}$ به آن بار اثر می‌کند. (ب) میدان الکتریکی $\vec{E}$ در نقطهٔ P توسط شیء باردار تولید شده است.

در هر نقطه از فضای یک اتاق، دما مقدار معینی دارد. در هر نقطهٔ معین یا ترکیبی از نقطه‌ها این دما با قرار دادن یک دماسنج در آن نقطه اندازه‌گیری می‌شود. توزیع حاصل از دماها را میدان دمایی می‌نامیم. به همین طریق، در جوّ زمین نیز می‌توان یک میدان فشار در نظر گرفت؛ این میدان شامل توزیع مقادیر فشار هوای مربوط به هر نقطه از جوّ است. این دو مثال نمونه‌هایی از میدان‌های نرده‌ای را نشان می‌دهند، زیرا دما و فشار هوا کمیت‌هایی نرده‌ای‌اند.

میدان الکتریکی یک میدان برداری و شامل توزیعی از بردارها است که هر کدام به نقطه‌ای از ناحیهٔ پیرامون یک شیء باردار، مانند یک میلهٔ باردار، مربوط‌اند. اصولاً، در هر نقطه از فضای نزدیک یک شیء باردار، مانند نقطهٔ P در شکل ۱ـ۲۳ الف، می‌توان یک میدان برداری را چنین تعریف کرد: ابتدا بار مثبت q_0 را، که بار آزمون نامیده می‌شود، در آن نقطه قرار می‌دهیم و سپس، $\vec{F}_1$، نیروی الکتروستاتیکی وارد بر بار آزمون را اندازه‌گیری می‌کنیم. آنگاه $\vec{E}$، میدان الکتریکی ناشی از شیء باردار در نقطهٔ P را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \quad \text{(میدان الکتریکی)} \qquad (۱ـ۲۳)$$

بنابراین، بزرگی میدان الکتریکی $\vec{E}$ در نقطهٔ P، مساوی با $E = F/q_0$ و جهت $\vec{E}$ همان جهت نیروی $\vec{F}$ وارد بر بار آزمون مثبت است. طبق شکل ۱ـ۲۳ ب، میدان الکتریکی در نقطهٔ P با برداری که دُم آن در P قرار دارد نشان داده می‌شود. برای تعریف کردن میدان الکتریکی درون هر ناحیه باید آن را برای تمام نقطه‌های آن ناحیه تعریف کرد.

یکای SI میدان الکتریکی **نیوتون بر کولن** (با نماد N/C) است. جدول ۱ـ۲۳ مقادیر میدان‌های الکتریکی مربوط به برخی وضعیت‌های فیزیکی را نشان می‌دهد.

اگر چه برای تعریف میدان الکتریکی یک شیء باردار از بار آزمون مثبت استفاده می‌شود، اما وجود میدان

جدول ۲۳ـ۱ مقادیر مربوط به برخی میدان‌های الکتریکی

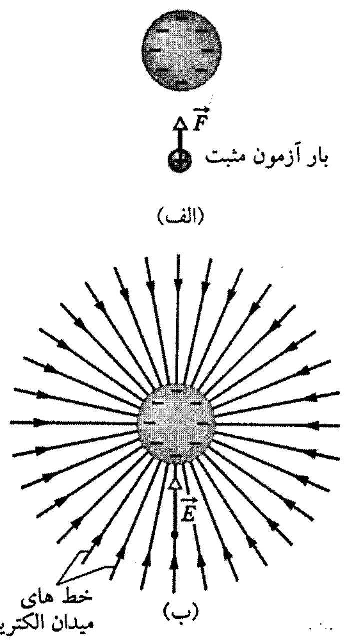
محل میدان یا وضعیت فیزیکی	مقدار (N/C)
در سطح هستهٔ اورانیوم	۳×۱۰^{۲۱}
درون اتم هیدروژن، در شعاع $۵٫۲۹ \times ۱۰^{-۱۱}m$	۵×۱۰^{۱۱}
فرو شکست الکتریکی در هوا	۳×۱۰^{۶}
در نزدیکی غلتک باردار دستگاه فوتوکپی	$۱۰^{۵}$
در نزدیکی یک شانهٔ باردار	$۱۰^{۳}$
در سطح‌های پایین جوّ زمین	$۱۰^{۲}$
درون سیم مسی مدارهای سیم‌کشی خانه	$۱۰^{-۲}$

از بار آزمون مستقل است. میدان در نقطهٔ P در شکل ۲۳ـ۱ ب پیش و پس از قرار دادن بار آزمون در شکل ۲۳ـ۱ الف، وجود داشته است. (در روش تعریف میدان فرض می‌کنیم که وجود بار آزمون توزیع بار الکتریکی روی شیء باردار را تغییر نمی‌دهد. در نتیجه، میدان الکتریکی تعریف شده هم تغییر نمی‌کند.

برای بررسی نقش میدان الکتریکی در برهم کنش میان اشیای باردار دو کار در پیش‌رو داریم: (۱) محاسبهٔ میدان الکتریکی حاصل از یک توزیع بار معین، و (۲) محاسبهٔ نیرویی که یک میدان معین به بارالکتریکی واقع شده در آن وارد می‌کند. کار اول را برای چندین توزیع بار در بخش‌های ۲۳ـ۴ تا ۲۳ـ۷، و کار دوم را در بخش‌های ۲۳ـ۸ و ۲۳ـ۹ در مورد یک بار نقطه‌ای و یک جفت بار نقطه‌ای واقع در میدان الکتریکی، انجام می‌دهیم. اما ابتدا به بحث دربارهٔ نحوهٔ نمایش دادن میدان‌های الکتریکی می‌پردازیم.

۲۳ـ۳ خط‌های میدان الکتریکی

مایکل فارادی، که در سدهٔ نوزدهم میلادی اندیشهٔ میدان‌های الکتریکی را ابراز کرد، فضای پیرامون یک جسم باردار را آکنده از خط‌های نیرو می‌پنداشت. گرچه ما برای این خط‌ها، که **خط‌های میدان الکتریکی** نامیده می‌شوند، دیگر چندان واقعیتی قایل نیستیم، اما آنها هنوز هم برای مشاهدهٔ نقش‌های میدان‌های الکتریکی روش مناسبی هستند.

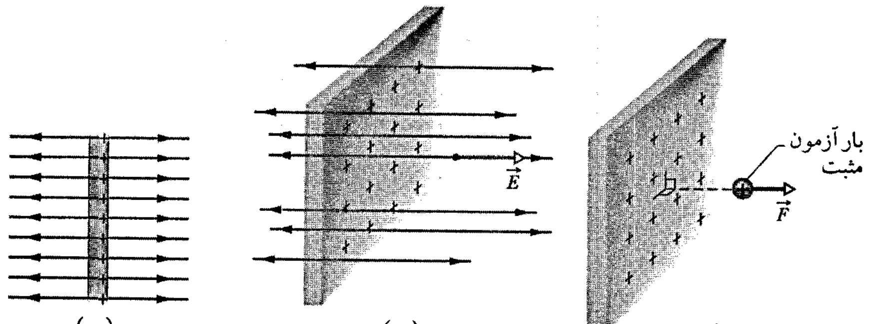


شکل ۲۳ـ۲ (الف) نمودار نیروی الکتروستاتیکی $\vec{F}$ وارد به بار آزمون مثبت نزدیک یک کرهٔ با بار منفی یکنواخت. (ب) نمایش بردار میدان الکتریکی $\vec{E}$ در محل بار آزمون، و خط‌های میدان الکتریکی در فضای پیرامون کره. خط‌های میدان به سمت کرهٔ با بار منفی رسم شده‌اند. (این خط‌ها از بارهای مثبت دور دست آغاز شده‌اند).

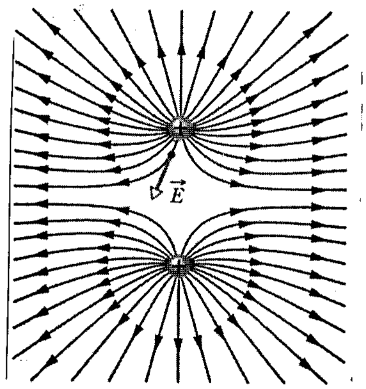
رابطهٔ میان خط‌های میدان و بردارهای میدان الکتریکی چنین است: (۱) در هر نقطه، جهت یک خط راست میدان یا جهت خط مماس بر یک خط خمیدهٔ میدان، جهت $\vec{E}$، میدان الکتریکی در آن نقطه را به دست می‌دهد، و (۲) خط‌های میدان طوری رسم می‌شوند که تعداد آنها در یکای سطح واقع در صفحهٔ عمود بر آن خط‌ها، با بزرگی $\vec{E}$ متناسب باشد. معنای رابطهٔ دوم این است که خط‌های میدان هر جا به هم نزدیک‌اند، E بزرگ و هر جا از هم دورند، E کوچک است.

شکل ۲۳ـ۲ الف، یک کرهٔ با بار منفی یکنواخت را نشان می‌دهد. هرگاه یک بار آزمون مثبت را در نزدیکی کره قرار دهیم یک نیروی الکتروستاتیکی در جهت مرکز کره، مطابق شکل، به این بار وارد می‌شود. به بیان دیگر، بردارهای میدان الکتریکی در تمام نقطه‌های نزدیک کره در راستای شعاع و به سوی مرکز کره‌اند. در شکل ۲۳ـ۲ ب، نقش بردارها با استفاده از خط‌های میدان به طور منظم نمایش داده شده است که همان جهت بردارهای نیرو و میدان را نشان می‌دهند. علاوه بر این، بازتر شدن خط‌های میدان با دور شدن از کره نشان می‌دهد که با افزایش فاصله از کره، بزرگی میدان الکتریکی کاهش می‌یابد.

اگر کرهٔ شکل ۲۳ـ۲، دارای بار مثبت یکنواخت می‌بود، بردارهای میدان الکتریکی در تمام نقاط نزدیک کره در راستای شعاع و در جهت دور شدن از کره رسم می‌شدند. بنابراین، خط‌های میدان الکتریکی هم باید در راستای شعاع و در جهت دور شدن از کره رسم شوند. در این صورت، قاعدهٔ زیر را می‌توان بیان کرد:



شکل ۲۳ـ۳ (الف) نمودار میدان الکتروستاتیکی $\vec{F}$، وارد به بار آزمون مثبت نزدیک یک ورقهٔ نارسانای بسیار بزرگ با توزیع یکنواخت بار الکتریکی مثبت در یک روی ورقه. (ب) نمایش بردار میدان الکتریکی $\vec{E}$، در محل بار آزمون و خط‌های میدان الکتریکی در فضای نزدیک ورقه. خط‌های میدان از ورقهٔ با بار مثبت **دور** می‌شوند. (پ) دید جانبی شکل (ب).



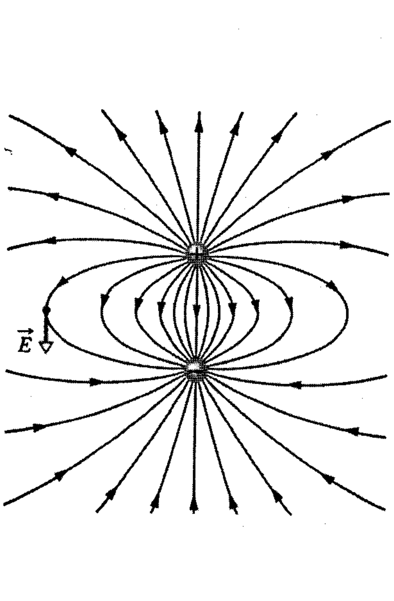
شکل ۲۳ـ۴ نمایش خط‌های میدان مربوط به دو بار الکتریکی نقطه‌ای مثبت و مساوی. این بارها یکدیگر را می‌رانند. (خط‌ها به بارهای منفی دور دست ختم می‌شوند). برای «دیدن» نقش سه بعدی واقعی خط‌های میدان نقش نشان داده شده را به طور ذهنی حول محور گذرنده از هر دو بار واقع در صفحهٔ شکل بچرخانید. گفته می‌شود که این نقش سه بعدی و میدان الکتریکی مربوط به آن دارای **تقارن دورانی** نسبت به آن محور است. بردار میدان الکتریکی مربوط به یک نقطه نشان داده شده است؛ توجه کنید که این بردار بر خط میدان گذرنده از آن نقطه مماس است.

◄ **خط‌های میدان الکتریکی در جهت دور شدن از بار مثبت (جای آغاز شدن) و نزدیک شدن به بار منفی (جای ختم شدن) امتداد پیدا می‌کنند.**

شکل ۲۳ـ۳ الف، بخشی از یک ورقهٔ (یا صفحهٔ) بی‌نهایت بزرگ نارسانا با توزیع یکنواخت بار مثبت در یک روی آن را نشان می‌دهد. اگر یک بار آزمون مثبت را در نقطه‌ای نزدیک ورقهٔ شکل ۲۳ـ۳ الف قرار دهیم نیروی برایند الکتروستاتیکی به طور عمود بر ورقه به بار آزمون وارد می‌شود، زیرا تمام نیروهای وارد شده در جهت‌های دیگر بر اثر تقارن اثر یکدیگر را خنثی می‌کنند. علاوه بر این، چنانکه دیده می‌شود، جهت نیروی برایند وارد بر بار آزمون به برون سوی ورقه است. بنابراین، بردار میدان الکتریکی در هر نقطه از فضا و در روی دیگر ورقه نیز بر ورقه عمود و جهت، آن به برون سوی ورقه است (شکل‌های ۲۳ـ۳ ب و ۲۳ـ۳ پ). چون بار الکتریکی در سر تا سر ورقه به طور یکنواخت توزیع شده است، بزرگی تمام بردارهای میدان یکسان است. این میدان الکتریکی با بزرگی و جهت یکسان در هر نقطه را **میدان الکتریکی یکنواخت** می‌نامند.

البته ورقهٔ نارسانای واقعی (نظیر یک ورقهٔ پهن پلاستیکی) هیچ وقت بی‌نهایت بزرگ نیست، اما اگر ناحیه‌ای را در نزدیکی وسط یک ورقهٔ واقعی و نه در نزدیکی لبه‌های آن، در نظر بگیریم آرایش خط‌های میدان گذرنده از آن ناحیه مطابق شکل‌های ۲۳ـ۳ ب و ۲۳ـ۳ پ خواهد بود.

شکل ۲۳ـ۴، خط‌های میدان حاصل از دو بار مثبت و مساوی را نشان می‌دهد. در شکل ۲۳ـ۵، نقش مربوط به دو بار ناهمنام با بزرگی مساوی نشان داده شده است. این پیکربندی را **دو قطبی الکتریکی** می‌نامند. با آنکه خط‌های میدان به طور کمّی مورد استفاده قرار نمی‌گیرند، اما از نظر مشاهدهٔ چگونگی رفتارشان بسیار مفیدند. آیا تا حدی نمی‌توان «دید» که بارهای الکتریکی در شکل ۲۳ـ۴ یکدیگر را هُل می‌دهند (می‌رانند) و در شکل ۲۳ـ۵ یکدیگر را می‌کشند (می‌ربایند).



شکل ۲۳ـ۵ نمایش خط‌های میدان مربوط به یک بار الکتریکی نقطه‌ای مثبت و یک بار الکتریکی نقطه‌ای منفی نزدیک آن. بارها دارای بزرگی مساوی‌اند و یکدیگر را می‌ربایند. نقش خط‌های میدان و میدان الکتریکی مربوط به آن دارای تقارن دورانی نسبت به محور گذرنده از هر دو بار واقع در صفحهٔ شکل است. بردار میدان الکتریکی مربوط به یک نقطه نشان داده شده است؛ این بردار بر خط میدان گذرنده از آن نقطه مماس است.

مسئلهٔ نمونهٔ ۲۳ـ۱

در شکل ۲۳ـ۲ ، بزرگی میدان الکتریکی برحسب فاصله از مرکز یک کرهٔ باردار یکنواخت چگونه تغییر می‌کند؟ استدلال مبتنی بر خطهای میدان الکتریکی را به کار ببرید.

حل: در اینجا یک **نکتهٔ کلیدی** این است که خطهای میدان در پیرامون کره به طور یکنواخت توزیع شده‌اند و بدون قطع کردن یکدیگر از کره به برون‌سو امتداد یافته‌اند. بنابراین، اگر یک پوستهٔ کروی هم مرکز به شعاع r را در پیرامون کرهٔ باردار قرار دهیم، تمام خطهای میدان ختم شونده به کرهٔ باردار باید از پوسته عبور کنند. فرض می‌کنیم تعداد خطهای میدان N است.

بنابراین، چون مساحت سطح پوسته $4\pi r^2$ است، تعداد خطهای میدان گذرنده از یکای سطح پوسته $N/(4\pi r^2)$ است.

نکتهٔ کلیدی دیگر این است که بزرگی میدان الکتریکی E، با تعداد خطها در یکای سطح عمود بر این خطها متناسب است. چون پوسته بر خطهای میدان عمود است، E با $N/(4\pi r^2)$ متناسب است. از طرفی، چون r تنها متغیر موجود در این عبارت است، پس، E برحسب عکس مجذور فاصله از مرکز کرهٔ باردار تغییر می‌کند.

۲۳ـ۴ میدان الکتریکی ناشی از یک بار نقطه‌ای

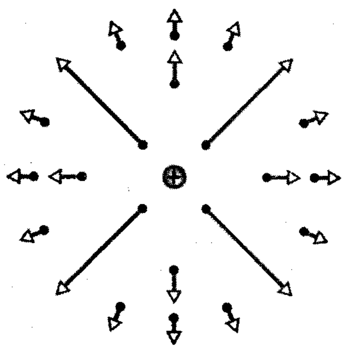
برای تعیین میدان الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای q (یا یک ذرهٔ باردار)، در هر نقطه به فاصلهٔ r از بار نقطه‌ای، یک بار آزمون مثبت q_0 در آن نقطه قرار می‌دهیم. با توجه به قانون کولن (معادلهٔ ۲۲ـ۴)، بزرگی نیروی الکتروستاتیکی وارد بر q_0، برابر است با:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q||q_0|}{r^2} \qquad (۲۳ـ۲)$$

بردار نیروی $\vec{F}$، اگر q مثبت باشد به سمت بیرون و اگر q منفی باشد به سوی بار نقطه‌ای است. بزرگی بردار میدان الکتریکی با استفاده از معادلهٔ ۲۳ـ۱ چنین به دست می‌آید:

$$E = \frac{F}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q|}{r^2} \qquad \text{(بار نقطه‌ای)} \qquad (۲۳ـ۳)$$

■



شکل ۲۳ـ۶ نمودار بردارهای میدان الکتریکی در چند نقطهٔ پیرامون یک بار نقطه‌ای مثبت.

جهت $\vec{E}$ همان جهت نیروی وارد بر بار آزمون مثبت است: این میدان، اگر q مثبت باشد، در برون‌سو و اگر q منفی باشد به سوی بار نقطه‌ای است.

چون هیچ شرط خاصی برای انتخاب جای q_0 وجود ندارد معادلهٔ ۲۳ـ۳ بزرگی میدان را در هر نقطه از فضای پیرامون بار نقطه‌ای q به دست می‌دهد. شکل ۲۳ـ۶ ، میدان مربوط به یک بار نقطه‌ای مثبت را به صورت برداری (نه به صورت خطهای میدان) نشان می‌دهد.

با این روش، میدان الکتریکی برایند، یا خالص ناشی از چند بار نقطه‌ای را هم می‌توان به سرعت معین کرد. اگر بار آزمون مثبت q_0 را نزدیک n بار نقطه‌ای q_1 ، q_2 ، ... ، q_n قرار دهیم، با استفاده از معادلهٔ ۲۲ـ۷ نیروی برایند $\vec{F}_0$ حاصل از n بار نقطه‌ای مؤثر بر بار آزمون برابر است با:

$$\vec{F}_0 = \vec{F}_{01} + \vec{F}_{02} + \dots + \vec{F}_{0n}$$

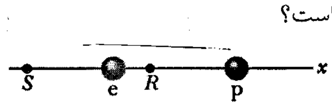
بنابراین، میدان الکتریکی برایند در مکان بار آزمون با استفاده از معادلهٔ ۲۳ـ۱ چنین به دست می‌آید:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_0}{q_0} = \frac{\vec{F}_{01}}{q_0} + \frac{\vec{F}_{02}}{q_0} + \dots + \frac{\vec{F}_{0n}}{q_0} \Rightarrow$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n \qquad (۲۳ـ۴)$$

در اینجا $\vec{E}_i$ میدان الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای i است که به تنهایی حاصل می‌شود. معادلهٔ ۲۳ـ۴ نشان می‌دهد که اصل برهم نهی در مورد میدان‌های الکتریکی هم مانند نیروهای الکتروستاتیکی، به کار می‌رود.

خودآزمایی ۱: شکل زیر، پروتون p و الکترون e را روی محور x نشان می‌دهد. جهت میدان الکتریکی ناشی از الکترون در (الف) نقطهٔ S و (ب) نقطهٔ R، چگونه است؟ جهت میدان الکتریکی برایند در (پ) نقطهٔ R و (ت) نقطهٔ S، چگونه است؟



مسئلهٔ نمونهٔ ۲۳ـ۲

شکل ۲۳ـ۷ الف، سه ذره با بارهای $q_1 = +2Q$، $q_2 = -2Q$ و $q_3 = -4Q$ را که از مبداء به اندازهٔ d فاصله دارند، نشان می‌دهد. $\vec{E}$، میدان الکتریکی برایند تولید شده در مبداء چیست؟

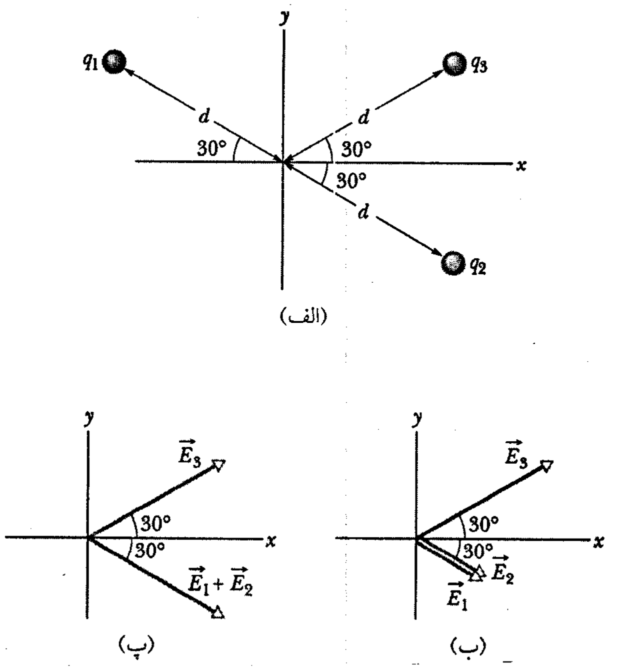
حل: در اینجا **نکتهٔ کلیدی** این است که بارهای q_1، q_2 و q_3 در مبداء، به ترتیب، بردارهای میدان الکتریکی $\vec{E}_1$، $\vec{E}_2$ و $\vec{E}_3$ را تولید می‌کنند و میدان الکتریکی برایند برابر است با مجموع برداری $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$.
برای تعیین این مجموع ابتدا بزرگی‌ها و جهت‌های سه بردار میدان را پیدا می‌کنیم. برای پیدا کردن بزرگی $\vec{E}_1$ حاصل از q_1 از معادلهٔ ۲۳ـ۳ استفاده می‌کنیم و با قرار دادن d به جای r و $2Q$ به جای $|q|$، داریم

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q}{d^2}$$

به همین طریق، بزرگی‌های میدان‌های $\vec{E}_2$ و $\vec{E}_3$ را چنین پیدا می‌کنیم:

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q}{d^2} \quad \text{و} \quad E_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4Q}{d^2}$$

اکنون باید جهت‌های سه بردار میدان الکتریکی را در مبداء پیدا کنیم. چون بار q_1 مثبت است بردار میدان حاصل از آن در برون‌سو است، و چون بارهای q_2 و q_3 هر دو منفی هستند بردارهای میدان حاصل از آنها به‌سوی هر یک از آنهاست. بنابراین، جهت میدان‌های الکتریکی تولید شده توسط ذرهٔ باردار در مبداء، مطابق شکل ۲۳ـ۷ ب، است.



شکل ۲۳ـ۷ مسألهٔ نمونهٔ ۲۳ـ۲. (الف) سه ذره با بارهای الکتریکی q_1، q_2 و q_3 از مبداء به اندازهٔ d فاصله دارند. (ب) نمایش بردارهای میدان الکتریکی $\vec{E}_1$، $\vec{E}_2$ و $\vec{E}_3$ ناشی از سه ذره در مبداء. (پ) نمایش بردار میدان الکتریکی $\vec{E}_3$ و مجموع برداری $\vec{E}_1 + \vec{E}_2$ در مبداء.

یادآوری: توجه کنید که دُم‌های بردارها در نقطه‌ای قرار دارند که محاسبهٔ میدان برایند در آن نقطه مورد نظر است؛ با این کار احتمال خطا کم می‌شود.
اکنون، می‌توان میدان‌ها را به صورت برداری، مانند مسألهٔ نمونهٔ ۲۲ـ۱ پ برای نیروها، جمع کرد. اما در اینجا برای ساده‌تر شدن کار از تقارن استفاده می‌کنیم. با توجه به شکل ۲۳ـ۷ ب، دیده می‌شود که $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ هم جهت‌اند. بنابراین، مجموع برداری هم با آنها همسو است و بزرگی آن برابر است با:

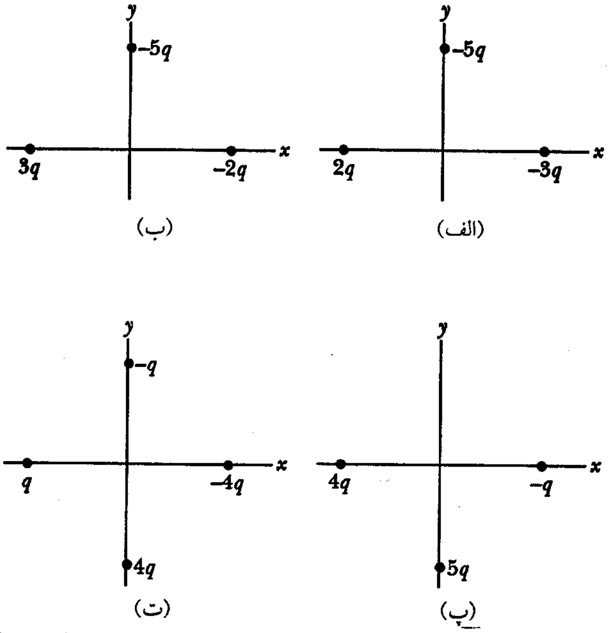
$$E_1 + E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q}{d^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q}{d^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4Q}{d^2}$$

این مقدار برابر با بزرگی میدان الکتریکی $\vec{E}_3$ است.
اکنون، باید دو بردار $\vec{E}_3$ و مجموع برداری $\vec{E}_1 + \vec{E}_2$ را، که بزرگی یکسان دارند، با هم جمع کنیم. همان‌طورکه شکل ۲۳ـ۷ پ نشان می‌دهد دو بردار نسبت به محور x قرینه‌اند. با توجه به تقارن در شکل ۲۳ـ۷ پ، معلوم می‌شود که مؤلفه‌های با بزرگی یکسان دو بردار در راستای محور y یکدیگر را خنثی می‌کنند و مؤلفه‌های با بزرگی یکسان آنها در راستای محور x با هم جمع می‌شوند. بنابراین، $\vec{E}$، میدان الکتریکی برایند در مبداء در جهت محور x است و بزرگی آن چنین به دست می‌آید:

$$E = 2E_{3x} = 2E_3\cos 30^\circ = (2)\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4Q}{d^2}(0.866) \Rightarrow$$

$$E = \frac{6.93Q}{4\pi\varepsilon_0 d^2} \quad \text{(پاسخ)}$$

خودآزمایی ۲: شکل زیر، چهار حالت را که در آن ذره‌های باردار به فاصلهٔ مساوی از مبداء قرار گرفته‌اند، نشان می‌دهد. این حالت‌ها را با توجه به بزرگی میدان الکتریکی برایند در مبداء، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



۲۳ـ۵ میدان الکتریکی ناشی از دو قطبی الکتریکی

شکل ۲۳ـ۸ الف، دو بار الکتریکی مخالف و مساوی را نشان می‌دهد که به فاصلهٔ d از یکدیگر قرار دارند. همان‌طور که در شکل ۲۳ـ۵ دیده شد، این آرایش دو قطبی الکتریکی نامیده می‌شود. می‌خواهیم میدان الکتریکی ناشی از دو قطبی شکل ۲۳ـ۸ الف را در نقطهٔ P به فاصلهٔ z از وسط دو قطبی و واقع شده بر روی محور گذرنده از ذره‌ها به نام محور دو قطبی، پیدا کنیم.

با توجه به تقارن، در نقطهٔ P میدان الکتریکی $\vec{E}$، و هم چنین میدان‌های $\vec{E}_{(+)}$ و $\vec{E}_{(-)}$ ناشی از هر یک از بارهای تشکیل دهندهٔ دو قطبی، باید در راستای محور دو قطبی، که آن را محور z گرفته‌ایم، قرار داشته باشد. E، بزرگی میدان الکتریکی در نقطهٔ P با استفاده از اصل بر هم نهی به دست می‌آید:

$$E = E_{(+)} + E_{(-)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_{(+)}^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_{(-)}^2} \Rightarrow$$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(z-d/2)^2} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(z+d/2)^2} \qquad (۲۳\text{ـ}۵)$$

پس از انجام دادن عملیات جبری این معادله را می‌توان چنین نوشت:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}\left[\left(1-\frac{d}{2z}\right)^{-2} - \left(1+\frac{d}{2z}\right)^{-2}\right] \qquad (۲۳\text{ـ}۶)$$

اثرهای الکتریکی یک دو قطبی، معمولاً، در فاصله‌های زیاد نسبت به ابعاد دو قطبی، یعنی در فاصله‌های $z \gg d$، بیشتر مورد توجه است. در چنین فاصله‌هایی در معادلهٔ ۲۳ـ۶، داریم $d/2z \ll 1$. در این صورت، جمله‌های درون دو پرانتز در معادلهٔ بالا را براساس قضیهٔ دو جمله‌ای می‌توان به صورت زیر بسط داد (پیوست ث کتاب):

$$\left[\left(1+\frac{2d}{2z(1!)}+\ldots\right) - \left(1-\frac{2d}{2z(1!)}+\ldots\right)\right]$$

در نتیجه، داریم

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}\left[\left(1+\frac{d}{z}+\ldots\right) - \left(1-\frac{d}{z}+\ldots\right)\right] \qquad (۲۳\text{ـ}۷)$$

جمله‌های نوشته نشده در بسط دو پرانتز معادلهٔ ۲۳ـ۷ شامل d/z هستند که توان‌های آنها پی در پی زیاد می‌شود. چون به ازای $d/z \ll 1$ تأثیر آن جمله‌ها به تدریج کاهش می‌یابد برای به دست آوردن مقدار تقریبی E در فاصله‌های دور می‌توان از آنها چشم پوشید. با توجه به این محاسبهٔ تقریبی، معادلهٔ ۲۳ـ۷ را می‌توان چنین نوشت:

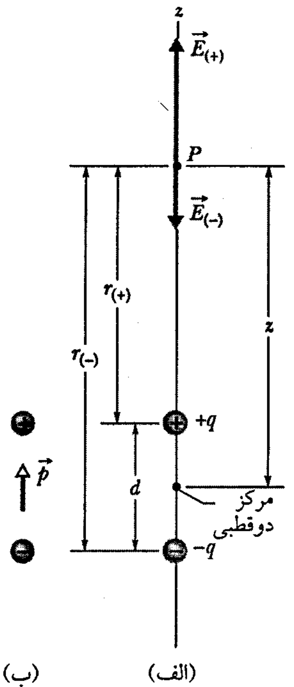
$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}\frac{2d}{z} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{qd}{z^3} \qquad (۲۳\text{ـ}۸)$$

حاصل‌ضرب qd، که شامل دو خاصیت ذاتی دو قطبی، یعنی q و d است، برابر با p، بزرگی کمیت برداری $\vec{p}$، به نام **گشتاور دو قطبی الکتریکی** مربوط به دو قطبی است. (یکای $\vec{p}$ **کولن ـ متر** با نماد C.m است). بنابراین، معادلهٔ ۲۳ـ۸ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{p}{z^3} \qquad \text{(دو قطبی الکتریکی)} \qquad (۲۳\text{ـ}۹)$$ ■

جهت $\vec{p}$، مطابق شکل ۲۳ـ۸ ب، از سر منفی به سر مثبت دو قطبی در نظر گرفته می‌شود. برای مشخص کردن سمتگیری یک دو قطبی می‌توان از بردار $\vec{p}$ استفاده کرد.

معادلهٔ ۲۳ـ۹ نشان می‌دهد که اگر میدان الکتریکی یک دو قطبی را در نقطه‌های دور اندازه‌گیری کنیم، هرگز نمی‌توانیم q و d را به طور مجزا در اختیار داشته باشیم و میدان فقط شامل حاصل‌ضرب آنهاست. برای مثال، اگر q دو برابر و همزمان با آن d نصف شود، میدان در نقطه‌های دور تغییر نمی‌کند. بنابراین، گشتاور دو قطبی خاصیتی بنیادی از یک دو قطبی است.



شکل ۲۳ـ۸ (الف) نمایش یک دو قطبی الکتریکی. نمودار بردارهای میدان الکتریکی $\vec{E}_{(+)}$ و $\vec{E}_{(-)}$ در نقطهٔ P از محور دو قطبی، که از دو بار دو قطبی ناشی می‌شوند. نقطهٔ P از بارهای تشکیل دهندهٔ دو قطبی در فاصله‌های $r_{(+)}$ و $r_{(-)}$ قرار دارد. (ب) بردار گشتاور دو قطبی $\vec{p}$، از بار منفی به سمت بار مثبت است.

با آنکه معادله ۲۳ـ۹ فقط برای نقطه‌های دور واقع بر محور دو قطبی صادق است، می‌توان دریافت که E

مربوط به دو قطبی برای تمام نقطه‌های دور، چه روی محور دو قطبی باشند، چه نباشند، متناسب با $1/r^3$ تغییر می‌کند؛ در اینجا r فاصلهٔ نقطهٔ مورد نظر از مرکز دو قطبی است.

بررسی شکل ۲۳-۸ و خط‌های میدان در شکل ۲۳-۵ نشان می‌دهند که بردار $\vec{E}$ در نقطه‌های دور واقع بر محور دو قطبی همیشه در جهت بردار گشتاور دو قطبی $\vec{p}$، است. این موضوع در شکل ۲۳-۸ الف، برای نقطهٔ P، چه در بالای محور دو قطبی واقع شده باشد، چه در پایین، صادق است.

معادلهٔ ۲۳-۹ نشان می‌دهد که اگر فاصلهٔ نقطه‌ای از دو قطبی دو برابر شود، میدان الکتریکی در آن نقطه ۸ برابر ضعیف‌تر می‌شود. در حالی که اگر فاصلهٔ نقطه‌ای از تک بار نقطه‌ای را دو برابر کنیم (معادلهٔ ۲۳-۳ را ببینید) میدان الکتریکی فقط ۴ برابر ضعیف‌تر می‌شود. بنابراین، میدان الکتریکی یک دو قطبی نسبت به میدان تک بار نقطه‌ای با افزایش فاصله سریعتر کاهش پیدا می‌کند. دلیل فیزیکی کاهش سریع میدان الکتریکی مربوط به یک دو قطبی این است که در فاصله‌های دور دو قطبی مانند دو بار مخالف و با بزرگی یکسانی جلوه می‌کند که تقریباً ـ و نه کاملاً ـ روی یکدیگر قرار دارند. بنابراین، میدان‌های الکتریکی دو بار ناهمنام در نقاط دور دست تقریباً ـ و نه کاملاً ـ یکدیگر را خنثی می‌کنند.

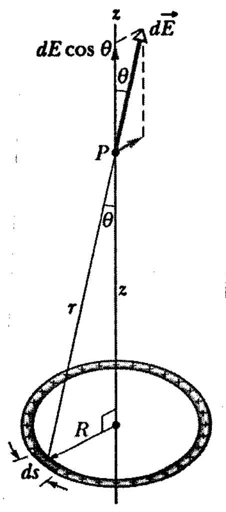
جدول ۲۳-۲ برخی معیارهای اندازه‌گیری بار الکتریکی

نام	نماد	یکای SI
بار الکتریکی	q	C
چگالی خطی بار	λ	C/m
چگالی سطحی بار	σ	C/m^2
چگالی حجمی بار	ρ	C/m^3

۲۳-۶ میدان الکتریکی ناشی از یک خط باردار

تا اینجا میدان الکتریکی‌ای را مطالعه کردیم که توسط یک، یا حداکثر چند، بار نقطه‌ای تولید می‌شد. اکنون توزیع باری را در نظر می‌گیریم که شامل تعداد زیادی (شاید میلیاردها) بار نقطه‌ای نزدیک به هم است که در راستای یک خط، بر روی یک سطح، یا درون یک حجم، گسترده شده‌اند. این نوع توزیع بار به جای مجزا، **پیوسته** نامیده می‌شود. چون این توزیع‌های بار می‌توانند شامل تعداد بسیار زیادی بار نقطه‌ای باشند، میدان‌های الکتریکی ناشی از آنها را، به جای محاسبهٔ میدان تک تک بارهای نقطه‌ای، باید با استفاده حسابان به‌دست آورد. در این بخش، میدان الکتریکی ناشی از یک خط باردار را مورد بحث قرار می‌دهیم. در بخش بعد به میدان حاصل از یک سطح باردار می‌پردازیم و در فصل بعد میدان الکتریکی درون یک کرهٔ با توزیع بار یکنواخت را پیدا خواهیم کرد.

وقتی با توزیع بار پیوسته سروکار داریم بهتر است بار یک شیء را، به جای بار کل، برحسب چگالی بار بیان کنیم. مثلاً برای یک خط باردار می‌توان چگالی خطی بار (یا بار یکای طول) λ، را در نظر گرفت، که یکای SI آن **کولن بر متر** (با نماد C/m) است. جدول ۲۳-۲ ، انواع چگالی‌های بار را که مورد استفاده قرار خواهند گرفت نشان می‌دهد.



شکل ۲۳-۹ نمودار یک حلقهٔ با بار مثبت یکنواخت. نمایش عنصر دیفرانسیلی بار که شامل طول ds است (به خاطر واضح بودن این طول به نحوی اغراق‌آمیز رسم شده است). این عنصر در نقطهٔ P میدان الکتریکی $d\vec{E}$ را به وجود می‌آورد. مؤلفهٔ $d\vec{E}$ در راستای محور مرکزی حلقه $dE\cos\theta$ است.

شکل ۲۳-۹ ، حلقهٔ بار یکی به شعاع R را نشان می‌دهد که شامل چگالی خطی بار مثبت یکنواخت λ در روی محیط حلقه است. فرض کنیم حلقه از پلاستیک یا مادهٔ عایق دیگری ساخته شده است، و در نتیجه، جای بارها را می‌توان ثابت در نظر گرفت. میدان الکتریکی $\vec{E}$ در نقطهٔ P به فاصلهٔ z از صفحهٔ حلقه و در راستای محور مرکزی آن چیست؟

برای پاسخ دادن به این پرسش نمی‌توان به طور مستقیم از معادلهٔ ۲۳-۳ ، که مربوط به میدان الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای است، استفاده کرد، زیرا حلقه یک بار نقطه‌ای نیست. با وجود این، حلقه را می‌توان به طور ذهنی به عنصرهای دیفرانسیلی بار که بسیار کوچک و شبیه بارهای نقطه‌ای‌اند، تقسیم کرد و سپس، در مورد هر یک از آنها معادلهٔ ۲۳-۳ را به کاربرد. پس از آن، میدان‌های الکتریکی تولید شده در نقطهٔ P توسط تمام عنصرهای دیفرانسیلی را می‌توان با هم جمع کرد. مجموع برداری تمام این میدان‌ها میدان تولید شده در نقطهٔ P توسط حلقه را به دست می‌دهد.

فرض می‌کنیم ds طول (کمان) یک عنصر دیفرانسیلی از حلقه باشد. چون λ بار الکتریکی یکای طول است بزرگی بار این عنصر برابر است با:

$$dq = \lambda ds \tag{۲۳-۱۰}$$

این بار دیفرانسیلی در نقطهٔ P به فاصلهٔ r از عنصر، میدان الکتریکی $d\vec{E}$ را تولید می‌کند. اگر عنصر را به صورت یک بار نقطه‌ای در نظر بگیریم و از معادلهٔ ۲۳ـ۱۰ استفاده کنیم می‌توانیم معادلهٔ ۲۳ـ۳ را برای تعیین بزرگی $d\vec{E}$ به کار ببریم:

$$dE = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{dq}{r^۲} = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{\lambda ds}{r^۲} \qquad (۱۱\text{ـ}۲۳)$$

با استفاده از معادلهٔ ۲۳ـ۹ می‌توان معادلهٔ ۲۳ـ۱۱ را به صورت زیر نوشت

$$dE = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{\lambda ds}{(z^۲ + R^۲)} \qquad (۱۲\text{ـ}۲۳)$$

شکل ۲۳ـ۹ ، نشان می‌دهد که $d\vec{E}$ نسبت به محور مرکزی (که می‌تواند محور z در نظر گرفته شود) زاویهٔ θ می‌سازد و دارای مؤلفه‌های عمود بر محور و موازی با محور است.

هر عنصر بار الکتریکی حلقه در نقطهٔ P یک میدان دیفرانسیلی $d\vec{E}$ تولید می‌کند که بزرگی آن از معادلهٔ ۲۳ـ۱۲ به دست می‌آید. تمام بردارهای $d\vec{E}$ دارای مؤلفه‌های مشابهی از نظر بزرگی و جهت هستند که با محور مرکزی موازی‌اند. همهٔ بردارهای $d\vec{E}$ مؤلفه‌های عمود بر محور مرکزی هم دارند که دارای بزرگی یکسان اما جهت‌های متفاوت‌اند. در واقع، به ازای هر مؤلفهٔ عمودی در یک جهت معین مؤلفهٔ عمودی دیگری در جهت مخالف وجود دارد. مجموع این زوج مؤلفه‌ها، مانند مجموع تمام زوج مؤلفه‌های دیگر که جهت مخالف دارند، صفر است.

بنابراین، مؤلفه‌های عمود بر محور یکدیگر را خنثی می‌کنند و لازم نیست آنها را در نظر بگیریم. به این ترتیب، مؤلفه‌های موازی باقی می‌مانند، که تمام آنها همسوی‌اند. در نتیجه، میدان الکتریکی برایند در نقطه P برابر با مجموع این مؤلفه‌هاست.

بزرگی مؤلفهٔ موازی $d\vec{E}$ نشان داده شده در شکل ۲۳ـ۹ برابر با $dE\cos\theta$ است. هم‌چنین، شکل نشان می‌دهد که:

$$\cos\theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{(z^۲ + R^۲)^{\frac{۱}{۲}}} \qquad (۱۳\text{ـ}۲۳)$$

بنابراین، با استفاده از معادله‌های ۲۳ـ۱۳ و ۳۲ـ۱۲ برای مؤلفهٔ موازی $d\vec{E}$، داریم

$$dE\cos\theta = \frac{z\lambda}{۴\pi\varepsilon_۰(z^۲ + R^۲)^{\frac{۳}{۲}}}\, ds \qquad (۱۴\text{ـ}۲۳)$$

برای جمع کردن مؤلفه‌های $dE\cos\theta$ تولید شده توسط تمام عنصرها، از معادلهٔ ۲۳ـ۱۴ روی محیط حلقه، از $s = ۰$ تا $s = ۲\pi R$ انتگرال می‌گیریم. چون تنها کمیتی که در حین انتگرال‌گیری از معادله ۲۳ـ۱۴ تغییر می‌کند s است، کمیت‌های دیگر را می‌توان از انتگرال خارج کرد. در نتیجه، پس از انتگرال‌گیری، داریم

$$E = \int dE\cos\theta = \frac{z\lambda}{۴\pi\varepsilon_۰(z^۲ + R^۲)^{\frac{۳}{۲}}} \int_۰^{۲\pi R} ds \quad \Rightarrow$$

$$E = \frac{z\lambda(۲\pi R)}{۴\pi\varepsilon_۰(z^۲ + R^۲)^{\frac{۳}{۲}}} \qquad (۱۵\text{ـ}۲۳)$$

چون λ بار موجود در یکای طول حلقه است، پس جملهٔ $\lambda(۲\pi R)$ در معادلهٔ ۲۳ـ۱۵ برابر با مقدار q، بار کل روی حلقه است. در نتیجه، معادلهٔ ۲۳ـ۱۵ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$E = \frac{qz}{۴\pi\varepsilon_۰(z^۲ + R^۲)^{\frac{۳}{۲}}} \qquad \text{(حلقهٔ باردار)} \qquad (۱۶\text{ـ}۲۳)$$ ■

اگر به جای بار مثبت فرض شده بار روی حلقه منفی باشد، بزرگی میدان در نقطهٔ P باز هم از معادلهٔ ۲۳ـ۱۶ به‌دست می‌آید. اما در آن صورت، بردار میدان الکتریکی به جای آنکه در برون سوی حلقه باشد به سوی حلقه خواهد بود.

اکنون، معادلهٔ ۲۳-۱۶ را برای یک نقطهٔ واقع بر محور مرکزی و در فاصلهٔ دور $z \gg R$، امتحان می‌کنیم. برای چنین نقطه‌ای، به جای جملهٔ $z^2 + R^2$ در معادلهٔ ۲۳-۱۶ می‌توان مقدار تقریبی z^2 را قرار داد. در نتیجه، معادلهٔ ۲۳-۱۶ به صورت زیر نوشته می‌شود

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{z^2} \qquad \text{(حلقهٔ باردار، در فاصلهٔ دور)} \qquad (۲۳-۱۷)$$

این نتیجه پذیرفتنی است، زیرا از فاصلهٔ دور حلقه «مانند» یک بار نقطه‌ای دیده می‌شود. اگر در معادلهٔ ۲۳-۱۷ به جای z مقدار r را قرار دهیم به معادلهٔ ۲۳-۳ می‌رسیم، که بزرگی میدان الکتریکی ناشی از یک بار نقطه‌ای را به‌دست می‌دهد.

اکنون معادلهٔ ۲۳-۱۶ را برای نقطهٔ واقع بر مرکز حلقه - یعنی برای $z = 0$ - امتحان می‌کنیم. در این نقطه با استفاده از معادلهٔ ۲۳-۱۶ نتیجه می‌گیریم که $E = 0$. این نتیجه هم پذیرفتنی است، چون اگر بار آزمون را در مرکز حلقه قرار دهیم هیچ نیروی الکتروستاتیکی برایندی به آن وارد نمی‌شود؛ نیروی ناشی از هر عنصر حلقه با نیروی ناشی از عنصر واقع در طرف مقابل در حلقه خنثی می‌شود. با توجه به معادلهٔ ۲۳-۱ اگر نیرو در مرکز حلقه صفر باشد میدان الکتریکی در آن نقطه نیز صفر خواهد بود.

مسألهٔ نمونهٔ ۲۳-۳

شکل ۲۳-۱۰ الف، یک میلهٔ پلاستیکی با توزیع بار یکنواخت $-Q$ را نشان می‌دهد. این میله به صورت کمانی دایره‌ای با زاویهٔ ۱۲۰ درجه و شعاع r خم شده است. محورهای مختصات را طوری انتخاب می‌کنیم که محور تقارن میله در راستای محور x و مبداء مختصات در نقطهٔ P، مرکز خمیدگی میله، قرار گیرد. $\vec{E}$، میدان الکتریکی ناشی از میله در نقطهٔ P برحسب Q و r چیست؟

حل: در اینجا **نکتهٔ کلیدی** این است که چون توزیع بار بر روی میله پیوسته است، باید رابطهٔ مربوط به میدان‌های الکتریکی ناشی از عنصرهای دیفرانسیلی میله را پیدا کرد و سپس مجموع این میدان‌ها را با استفاده از حسابان به دست آورد. یک عنصر دیفرانسیلی با طول کمان ds را که در بالای محور x تحت زاویهٔ θ قرار دارد در نظر می‌گیریم (شکل ۲۳-۱۰ ب). اگر λ چگالی خطی بار میله باشد بزرگی بار دیفرانسیلی عنصر ds برابر است با:

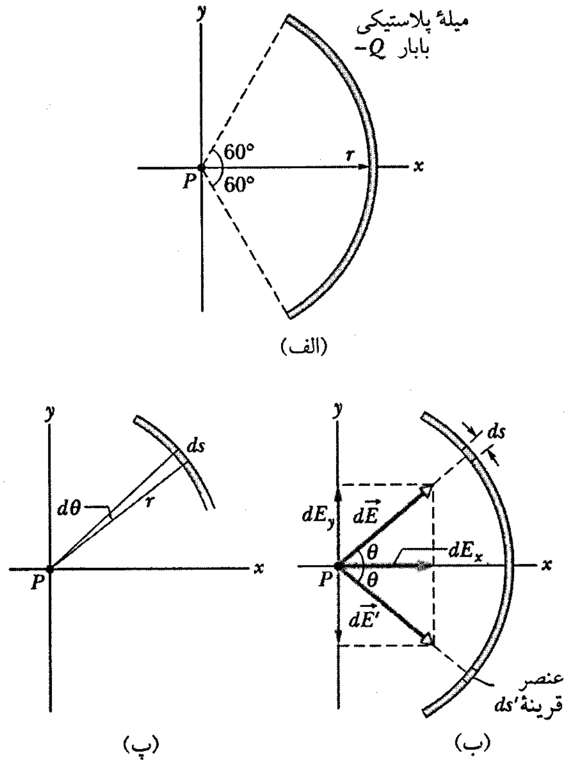
$$dq = \lambda ds \qquad (۲۳-۱۸)$$

عنصر مورد نظر در نقطهٔ P واقع در فاصلهٔ r، میدان الکتریکی دیفرانسیلی $d\vec{E}$ را تولید می‌کند. اگر این عنصر را یک بار نقطه‌ای در نظر بگیریم برای تعیین بزرگی میدان $d\vec{E}$ معادلهٔ ۲۳-۳ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda ds}{r^2} \qquad (۲۳-۱۹)$$

بردار $\vec{E}$ به سوی ds است زیرا بار dq منفی است.

عنصر مورد نظر یک عنصر قرینهٔ ds' (تصویر آینه‌ای) در نیمهٔ پایین میله دارد. بزرگی میدان الکتریکی $d\vec{E}'$ ناشی از ds' در نقطهٔ P نیز از معادلهٔ ۲۳-۱۹ به دست می‌آید و جهت بردار میدان، مطابق شکل ۲۳-۱۰ ب، به سوی ds' است. اگر بردارهای میدان الکتریکی مربوط به ds و ds' را، مطابق شکل ۲۳-۱۰ ب، به مؤلفه‌های x و y تجزیه کنیم ملاحظه می‌شود که مؤلفه‌های y یکدیگر را خنثی می‌کنند (زیرا دارای بزرگی یکسان و جهت مخالف‌اند).



شکل ۲۳-۱۰ مسألهٔ نمونهٔ ۲۳-۳. (الف) میلهٔ پلاستیکی با بار $-Q$ یک بخش دایره‌ای به شعاع r با زاویهٔ مرکزی ۱۲۰ درجه تشکیل می‌دهد؛ نقطهٔ P مرکز خمیدگی میله است. (ب) عنصر دیفرانسیلی واقع در نیمهٔ بالایی میله تحت زاویهٔ θ نسبت به محور x به طول ds، در نقطهٔ P میدان الکتریکی دیفرانسیلی $d\vec{E}$ را تولید می‌کند. عنصر ds' که قرینهٔ ds نسبت به محور x است در نقطهٔ P میدان $d\vec{E}'$ را با همان بزرگی به وجود می‌آورد. (پ) کمان ds نسبت به نقطهٔ P زاویهٔ مرکزی $d\theta$ را تشکیل می‌دهد.

در ضمن، چنانکه می‌بینیم مؤلفه‌های xاین بردارها دارای بزرگی و جهت یکسان‌اند.

بنابراین، برای پیدا کردن میدان الکتریکی حاصل از میله لازم است فقط مؤلفه‌های xمیدان‌های الکتریکی دیفرانسیلی تولید شده توسط تمام عنصرهای دیفرانسیلی بار میله را با هم (از طریق انتگرال‌گیری) جمع کنیم. با توجه به شکل ۲۳ـ۱۰ ب و معادلهٔ ۲۳ـ۱۹ ، رابطهٔ مؤلفهٔ dE_x ناشی از ds را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$dE_x = dE\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r^2}\cos\theta ds \qquad (۲۳\text{ـ}۲۰)$$

معادلهٔ ۲۳ـ۲۰ شامل دو متغیر θ و sاست. پیش از انتگرال‌گیری از این معادله باید یکی از متغیرها را حذف کرد. این کار با حذف کردن ds به کمک رابطهٔ زیر انجام می‌شود:

$$ds = rd\theta$$

که در آن $d\theta$زاویهٔ مرکزی مربوط به کمان با طول ds در نقطهٔ P است (شکل ۲۳ـ۱۰ پ). با انجام دادن این جانشانی می‌توان از معادلهٔ ۲۳ـ۲۰ روی زاویهٔ تشکیل شده توسط میله در نقطهٔ P، از $\theta = -60°$ تا $\theta = 60°$ انتگرال گرفت. در نتیجه، بزرگی میدان الکتریکی ناشی از میلهٔ باردار در نقطهٔ P چنین به دست می‌آید:

$$E = \int dE_x = \int_{-60°}^{60°} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r^2}\cos\theta r d\theta$$

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\int_{-60°}^{60°}\cos\theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\Big[\sin\theta\Big]_{-60°}^{60°}$$

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}[\sin 60° - \sin(-60°)] \quad \Rightarrow$$

$$E = \frac{1.73\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad (۲۳\text{ـ}۲۱)$$

(اگر حدود انتگرال‌گیری را عوض کنیم، همان نتیجه را با علامت منفی به‌دست می‌آوریم. چون انتگرال‌گیری فقط بزرگی $\vec{E}$ را به دست می‌دهد علامت منفی حذف شده است.)

برای محاسبهٔ λ توجه می‌کنیم که زاویه مرکزی میله ۱۲۰ درجه و برابر با یک سوم دایرهٔ کامل است. پس، طول این کمان $2\pi r/3$ و چگالی خطی بار برابر است با:

$$\lambda = \frac{\text{بار الکتریکی}}{\text{طول}} = \frac{Q}{2\pi r/3} = \frac{0.477Q}{r}$$

با جانشانی این مقدار در معادلهٔ ۲۳ـ۲۱ و ساده کردن نتیجهٔ حاصل، داریم

$$E = \frac{(1.73)(0.477Q)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad \Rightarrow$$

$$E = \frac{0.83Q}{4\pi\varepsilon r^2} \qquad \text{(پاسخ)}$$

بردار $\vec{E}$ به طرف میله و در راستای محور تقارن توزیع بار الکتریکی است. بردار $\vec{E}$ با استفاده از نمادگذاری بردارهای یکه به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\vec{E} = \frac{0.83Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\mathrm{i}}$$

روشهای مسأله حل کردن

روش ۱: راهنمایی میدان مربوط به خط‌های باردار

در اینجا به راهنمایی عمومی برای تعیین میدان الکتریکی $\vec{E}$، تولید شده در نقطهٔ P توسط یک خط باردار یکنواخت دایره‌ای یا مستقیم، می‌پردازیم. برای این کار، روش کلی انتخاب کردن یک عنصر بار dq، تعیین $d\vec{E}$ ناشی از آن عنصر بار، و انتگرال گرفتن از $d\vec{E}$ در روی تمام خط باردار است.

مرحلهٔ ۱. اگر خط باردار به صورت دایره باشد، ds، طول کمان یک عنصر توزیع بار را در نظر بگیرید. اگر خط باردار راست باشد، محور xرا در راستای خط قرار دهید و فرض کنید dx طول یک عنصر توزیع بار است. این عنصر را بر روی نموداری مشخص کنید.

مرحلهٔ ۲. رابطهٔ بار dq با طول عنصر را با استفاده از رابطه‌های $dq = \lambda ds$ یا $dq = \lambda dx$ بنویسید. اگر بار الکتریکی منفی هم باشد فرض کنید dq و λ مثبت است. (علامت بار در مرحلهٔ بعدی به کار می‌رود).

مرحلهٔ ۳. رابطهٔ $d\vec{E}$، میدان الکتریکی حاصل از dq در نقطهٔ P را با قرار دادن λds یا λdx به جای q در معادلهٔ ۲۳ـ۳، بنویسید. بردار $d\vec{E}$ در نقطهٔ P را، اگر بار روی خط مثبت است در برون سوی dq و اگر بار منفی است به سوی dq رسم کنید.

مرحلهٔ ۴. همیشه در جستجوی هر نوع تقارنی در مسأله باشید. اگر P روی محور تقارن توزیع بار قرار داشته باشد میدان $d\vec{E}$ حاصل از dq را به مؤلفه‌های عمود بر محور تقارن و موازی با آن تجزیه کنید. سپس عنصر دیگر dq' را در نظر بگیرید که قرینهٔ dq نسبت به خط تقارن است. بردار $d\vec{E}'$ را که این عنصر قرینه در نقطهٔ P تولید می‌کند رسم کنید و آن را به مؤلفه‌هایش تجزیه کنید. یکی از مؤلفه‌های حاصل از dq مؤلفهٔ حذف شونده است؛ این مؤلفه با مؤلفهٔ متناظر حاصل از dq' حذف می‌شود و نیازی به در نظر گرفتن آن نیست. مؤلفهٔ دیگر حاصل از dq یک مؤلفهٔ جمع شونده است؛ این مؤلفه با مؤلفهٔ حاصل از dq' جمع می‌شود. مؤلفه‌های جمع شوندهٔ تمام عنصرها را با روش انتگرال‌گیری با هم جمع کنید.

مرحلهٔ ۵. در اینجا چهار نوع توزیع بار یکنواخت با روشهای مربوط به ساده کردن انتگرال مرحلهٔ ۴ ارائه می‌شود.

حلقه، در حالی که نقطهٔ P، مطابق شکل ۲۳ـ۹، روی محور (مرکزی) تقارن قرار دارد. در رابطهٔ مربوط به dE به جای r^2، طبق معادلهٔ ۲۳ـ۱۲، $z^2 + R^2$ را قرار دهید. مؤلفهٔ جمع شوندهٔ $d\vec{E}$ را

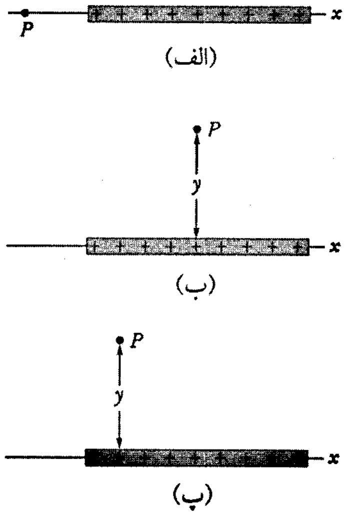
برحسب θ بیان کنید. این مؤلفه شامل $\cos\theta$ است، اما θ برای تمام عنصرها مشابه است و از این رو یک متغیر نیست. مقدار $\cos\theta$ را طبق معادلهٔ ۲۳-۱۳ جانشانی و عبارت حاصل را که شامل متغیر s است روی محیط حلقه انتگرال‌گیری کنید.

کمان دایره‌ای، در حالی که نقطهٔ P، مطابق شکل ۲۳-۱۰، در مرکز خمیدگی کمان قرار دارد. مؤلفهٔ جمع شوندهٔ $d\vec{E}$ را برحسب θ بیان کنید. این مؤلفه شامل $\sin\theta$ یا $\cos\theta$ است. دو متغیر به دست آمدهٔ s و θ را با قرار دادن $rd\theta$ به جای ds به یک متغیر تبدیل کنید. نتیجهٔ حاصل را، طبق مسألهٔ نمونهٔ ۲۳-۳، از یک سر کمان تا سر دیگر آن روی θ انتگرال بگیرید.

خط راست، در حالی که نقطهٔ P، مطابق شکل ۲۳-۱۱ الف، روی امتداد خط قرار دارد. در رابطهٔ مربوط به dE به جای r مقدار x را قرار دهید و از عبارت حاصل از یک سر تا سر دیگر خط باردار روی x انتگرال بگیرید.

خط راست، در حالی که نقطهٔ P، مطابق شکل ۲۳-۱۱ ب، در فاصلهٔ y از خط باردار قرار دارد. در رابطهٔ مربوط به dE به جای r رابطه‌ای شامل x و y قرار دهید. اگر P روی عمود منصف خط باردار قرار دارد رابطهٔ مربوط به مؤلفهٔ جمع شوندهٔ $d\vec{E}$ را به دست آورید. این رابطه شامل $\sin\theta$ یا $\cos\theta$ است. دو متغیر به دست آمدهٔ x و θ را با جانشین کردن تابع مثلثاتی با رابطهٔ شامل x و y (از روی تعریف) به یک متغیر x تبدیل کنید. از رابطهٔ حاصل از یک سر تا سر دیگر خط باردار روی x انتگرال بگیرید. اگر P، مطابق شکل ۲۳-۱۱ پ، روی خط تقارن قرار نداشته باشد، برای جمع کردن مؤلفه‌های dE_x انتگرالی تشکیل دهید و از آن برای تعیین E_x روی x انتگرال بگیرید. همین‌طور، برای جمع کردن مؤلفه‌های dE_y هم انتگرالی تشکیل دهید و از آن برای پیدا کردن E_y روی x انتگرال بگیرید. با استفاده از مؤلفه‌های E_x و E_y بزرگی E و جهت $\vec{E}$ را به روش معمول به دست آورید.

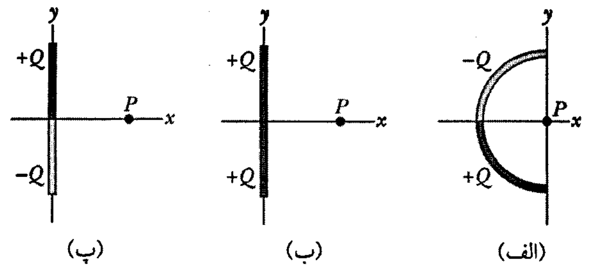
مرحلهٔ ۶. آرایشی از حدود انتگرال‌گیری نتیجهٔ مثبت به دست می‌دهد. اگر آرایش حدود انتگرال عوض شود همان نتیجه با علامت منفی به‌دست



شکل ۲۳-۱۱ (الف) نقطهٔ P در امتداد خط باردار قرار دارد. (ب) نقطهٔ P روی خط تقارن خط باردار و به فاصلهٔ y از آن خط واقع است. (پ) مانند حالت (ب) است، با این تفاوت که نقطهٔ P روی خط تقارن قرار ندارد.

می‌آید؛ علامت منفی را نادیده بگیرید. اگر می‌خواهید نتیجه را برحسب بار Q، بار کل توزیع، بیان کنید به جای λ مقدار Q/L را قرار دهید، که در آن L طول توزیع بار است. برای یک حلقه، L محیط حلقه است.

خودآزمایی ۳: شکل زیر، سه میلهٔ نارسانا را نشان می‌دهد که یکی دایره‌ای و دو تای دیگر مستقیم‌اند. هر یک از میله‌ها دارای یک بار یکنواخت با بزرگی Q در نیمهٔ بالایی و بار دیگری در نیمهٔ پایینی است. جهت میدان الکتریکی برایند در نقطهٔ P برای هر میله چیست؟



۲۳-۷ میدان الکتریکی ناشی از یک قرص باردار

شکل ۲۳-۱۲، یک قرص پلاستیکی دایره‌ای به شعاع R را نشان می‌دهد که دارای بار الکتریکی سطحی مثبت با چگالی یکنواخت σ بر روی سطح بالایی آن است (جدول ۲۳-۲ را ببینید). میدان الکتریکی در نقطهٔ P واقع بر محور مرکزی و به فاصلهٔ z از قرص چیست؟

روش کار این است که قرص را به حلقه‌های تخت هم مرکز تقسیم و سپس میدان الکتریکی در نقطهٔ P را با جمع کردن (یعنی، انتگرال‌گیری) میدان مربوط به تمام حلقه‌ها، حساب کنیم. شکل ۲۳-۱۲ حلقه‌ای به شعاع r و پهنای dr را نشان می‌دهد. چون σ بار الکتریکی یکای سطح است بار روی حلقه برابر است با:

$$dq = \sigma dA = \sigma(2\pi r dr) \qquad (۲۳\text{-}۲۲)$$

که در آن dA مساحت سطح عنصر دیفرانسیلی حلقه است.

مسألهٔ مربوط به میدان الکتریکی ناشی از حلقهٔ باردار را پیشتر حل کرده‌ایم. با قرار دادن dq از معادلهٔ ۲۳-۲۲ به جای q در معادلهٔ ۲۳-۱۶ و قرار دادن r به جای R در معادلهٔ ۲۳-۱۶ رابطهٔ مربوط به dE، میدان الکتریکی ناشی از حلقهٔ تخت مورد نظر در نقطهٔ P، به دست می‌آید:

$$dE = \frac{z\sigma 2\pi r dr}{4\pi\varepsilon_0 (z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

این رابطه را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$dE = \frac{\sigma z}{4\varepsilon_0} \frac{2r dr}{(z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad (۲۳-۲۳)$$

اکنون E را با انتگرال‌گیری در روی سطح قرص، یعنی با انتگرال‌گیری نسبت به متغیر r از $r = 0$ تا $r = R$، به دست می‌آوریم. توجه کنید که در طی این فرایند z ثابت می‌ماند. در نتیجه، داریم

$$E = \int dE = \frac{\sigma z}{4\varepsilon_0} \int_0^R (z^2 + r^2)^{-\frac{3}{2}} (2r)dr \qquad (۲۳-۲۴)$$

برای حل کردن این انتگرال، آن را به شکل $\int X^m dX$ می‌نویسیم، که در آن $X=(z^2+r^2)$، $m=-\frac{3}{2}$ و $dX=(2r)dr$. با انتگرال‌گیری، داریم

$$\int X^m dX = \frac{X^{m+1}}{m+1}$$

بنابراین، معادلهٔ ۲۳-۲۴ به صورت زیر در می‌آید

$$E = \frac{\sigma z}{4\varepsilon_0} \left[\frac{(z^2 + r^2)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right]_0^R \qquad (۲۳-۲۵)$$

پس از قرار دادن حدود در معادلهٔ ۲۳-۲۵ و مرتب کردن نتیجهٔ حاصل، داریم

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right) \quad \text{(قرص باردار)} \qquad (۲۳-۲۶)$$ ■

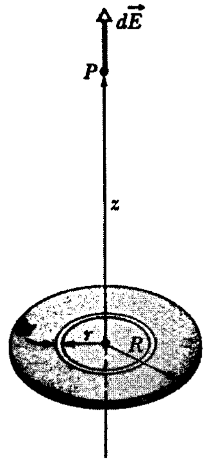
این معادله بزرگی میدان الکتریکی حاصل از یک قرص تخت دایره‌ای باردار را در نقاط واقع بر محور مرکزی قرص به دست می‌دهد. (در هنگام انتگرال‌گیری فرض کرده‌ایم $z \geq 0$).

اگر هنگامی که z متناهی است شرط $R \longrightarrow \infty$ را در نظر بگیریم، جملهٔ دوم درون پرانتز در معادلهٔ ۲۳-۲۶ به سمت صفر میل می‌کند و معادله به صورت زیر ساده می‌شود

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad \text{(ورقهٔ نامتناهی)} \qquad (۲۳-۲۷)$$

با استفاده از این معادله میدان الکتریکی حاصل از یک ورقه نامتناهی دارای بار یکنواخت در روی یک سطح نارسانا مانند پلاستیک، به دست می‌آید. نمودار خط‌های میدان الکتریکی مربوط به این حالت در شکل ۲۳-۳ نشان داده شده است.

در ضمن، اگر در معادلهٔ ۲۳-۲۶، شرط $z \longrightarrow 0$ برقرار و R متناهی باشد، باز هم معادلهٔ ۲۳-۲۷ به دست می‌آید. این امر نشان می‌دهد که در نقطه‌های خیلی نزدیک به قرص، میدان الکتریکی حاصل از قرص همان مقداری را دارد که گویی وسعت قرص نامتناهی است.



شکل ۲۳-۱۲ نمودار قرص به شعاع R، که شامل بار مثبت یکنواخت است. شعاع حلقهٔ نشان داده شده r و پهنای آن dr است. این حلقه میدان الکتریکی دیفرانسیلی $d\vec{E}$ را در نقطهٔ P واقع بر روی محور مرکزی قرص تولید می‌کند.

۲۳-۸ مطالعهٔ بار نقطه‌ای در میدان الکتریکی

در چهار بخش پیش یکی از دو کار پیش‌رو را انجام دادیم: یعنی، با در دست داشتن یک توزیع بار معین میدان الکتریکی حاصل از آن را در فضای پیرامون به دست آوریم. در اینجا به انجام دادن کار دوم می‌پردازیم: یعنی،

می‌خواهیم بدانیم هرگاه ذرهٔ بارداری در یک میدان الکتریکی حاصل از بارهای ساکن یا کم سرعت قرار گیرد، چه اتفاقی می‌افتد.

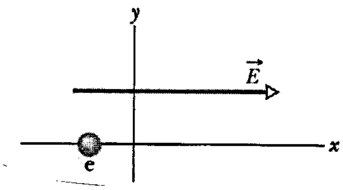
آنچه روی می‌دهد این است که به ذرهٔ باردار یک نیروی الکتروستاتیکی وارد می‌شود. این نیرو از معادلهٔ زیر به دست می‌آید

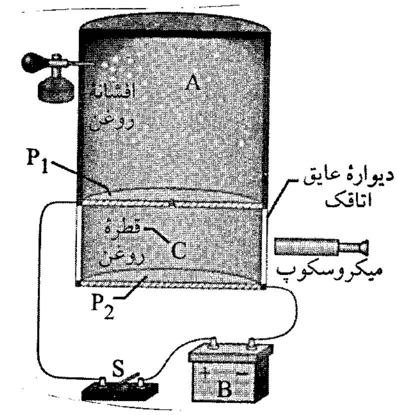
$$\vec{F} = q\vec{E} \qquad (۲۸\text{-}۲۳)$$

که در آن q بار الکتریکی ذره (همراه با علامت بار) و $\vec{E}$ میدان الکتریکی حاصل از بارهای دیگر در محل ذره است. (این میدان، میدان حاصل از خود ذره نیست)؛ برای تمیز دادن این دو میدان، میدان مؤثر بر ذره در معادلهٔ ۲۳-۲۸ را اغلب **میدان خارجی** می‌نامند. یک ذره (یا یک شیء) باردار تحت تأثیر میدان الکتریکی حاصل از خودش قرار نمی‌گیرد. معادلهٔ ۲۳.۲۸ نشان می‌دهد که:

◀ **نیروی الکتروستاتیکی $\vec{F}$ مؤثر بر یک ذرهٔ باردار واقع در میدان الکتریکی خارجی $\vec{E}$، اگر بار q مثبت باشد همسوی با $\vec{E}$، و اگر بار q منفی باشد ناهمسوی با آن است.**

خودآزمایی ۴: (الف) در شکل زیر، جهت نیروی الکتروستاتیکی وارد بر الکترون از سوی میدان الکتریکی نشان داده شده کدام است؟ (ب) اگر الکترون پیش از مواجه شدن با میدان الکتریکی به موازات محور y حرکت کند، در چه جهتی شتاب پیدا می‌کند؟ (پ) حال اگر الکترون ابتدا در حال حرکت کردن به سمت راست باشد، آیا تندی آن افزایش پیدا می‌کند، کاهش پیدا می‌کند، یا ثابت می‌ماند؟





شکل ۲۳-۱۳ نمایی از دستگاه قطرهٔ روغن میلیکان برای اندازه‌گیری بار بنیادی e. وقتی یک قطرهٔ روغن باردار از طریق سوراخ واقع در صفحهٔ P_1 به اتاقک C وارد می‌شود حرکت آن می‌تواند با بستن و باز کردن کلید S کنترل و بدین وسیله میدان الکتریکی اتاقک C برقرار یا حذف شود. میکروسکوپ برای مشاهدهٔ قطره و اندازه‌گیری زمان حرکت آن به کار می‌رود.

اندازه‌گیری بار بنیادی

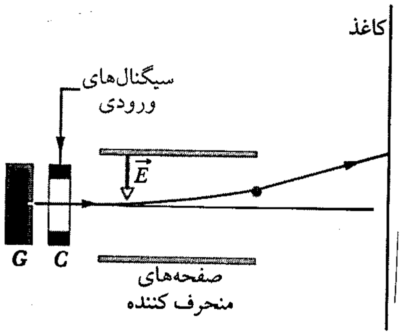
معادلهٔ ۲۳-۲۸ در اندازه‌گیری بار بنیادی e در سال‌های ۱۹۱۰ تا ۱۹۱۳ توسط **رابرت میلیکان**[1] فیزیکدان آمریکایی، نقش داشت. شکل ۲۳-۱۳، نمایی از دستگاه اندازه‌گیری را نشان می‌دهد. وقتی قطره‌های ریز روغن به اتاقک A افشانده می‌شوند، برخی از آنها در طول فرایند به صورت مثبت یا منفی باردار می‌شوند. قطره‌ای را در نظر بگیرید که از سوراخ کوچک صفحهٔ P_1 پایین آمده و به اتاقک C وارد شده است. فرض می‌کنیم این قطره دارای بار منفی q است.

اگر در شکل ۲۳-۱۳، چنانکه می‌بینیم، کلید S باز باشد باتری B هیچ اثر الکتریکی‌ای روی اتاقک C ندارد. اما اگر کلید بسته شود (یعنی اتصال میان اتاقک C و قطب مثبت باتری کامل شود) باتری به صفحهٔ رسانای P_1 بار مثبت و به صفحهٔ رسانای P_2 بار منفی اضافه می‌کند. این صفحه‌های باردار در اتاقک C یک میدان الکتریکی رو به پایین $\vec{E}$ ایجاد می‌کنند. با توجه به معادلهٔ ۲۳-۲۸ این میدان به قطره‌های باردار اتاقک نیروی الکتروستاتیکی وارد می‌کند و بر حرکت آنها اثر می‌گذارد، از جمله اینکه قطره‌های با بار منفی به سمت بالا رانده می‌شوند.

با اندازه‌گیری زمان حرکت قطره‌های روغن در حین باز و بسته شدن کلید، و در نتیجه تعیین بار الکتریکی q، میلیکان کشف کرد که مقادیر q همیشه از رابطهٔ زیر به دست می‌آیند

$$q = ne \qquad (n = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \pm ۳, \ldots \text{ به ازای}) \qquad (۲۹\text{-}۲۳)$$

که در آن e یک ثابت بنیادی به نام بار بنیادی و مقدارش $۱٫۶۰ \times ۱۰^{-۱۹}\text{C}$ است. آزمایش میلیکان دلیل قانع



شکل ۲۳-۱۴ نمایی از اساس کار چاپگر جوهرافشان. قطره‌ها از مولد G به بیرون پرتاب می‌شوند و در قسمت باردار کنندهٔ C باردار می‌شوند. یک سیگنال ورودی حاصل از رایانه بار الکتریکی داده شده به هر قطره، و در نتیجه اثر میدان $\vec{E}$ بر روی قطره و محل فرود قطره در روی کاغذ، را کنترل می‌کند. برای شکل گرفتن هر تک حرف در حدود ۱۰۰ قطرهٔ ریز لازم است.

1. Robert A.Millikan

ننده‌ای بر این واقعیت بود که بار الکتریکی کوانتیده است، و به همین خاطر او در سال ۱۹۲۳/۱۳۰۲ موفق ه دریافت جایزهٔ نوبل شد. اندازه‌گیری‌های جدید بار بنیادی بر آزمایش‌های گوناگون و مرتبط با هم متکی است ـ همهٔ آنها از آزمایش پیشگامانهٔ میلیکان دقیق‌ترند.

چاپ کردن با جوهر افشان

نیاز به چاپ کردن بسیار سریع و با کیفیت مطلوب سبب شده است که برای جایگزینی روش چاپ ضربه‌ای، نظیر آنچه در یک ماشین تحریر استاندارد صورت می‌گیرد، تلاش‌هایی به عمل آید. یکی از روشهای انجام دادن این کار شکل دادن حروف با افشاندن قطره‌های کوچک جوهر بر روی کاغذ است.

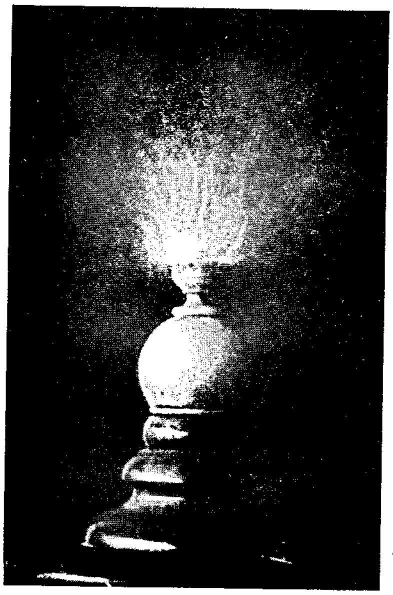
شکل ۲۳ـ۱۴، یک قطرهٔ با بار منفی را نشان می‌دهد که در میان دو صفحهٔ رسانای منحرف کننده حرکت می‌کند. میان این دو صفحه یک میدان الکتریکی یکنواخت رو به پایین برقرار شده است. قطره طبق معادلهٔ ۲۳ـ۲۸ به سمت بالا منحرف می‌شود و سپس در محلی به کاغذ برخورد می‌کند که با بزرگی‌های $\vec{E}$ و بار قطره q، معین می‌شود.

در عمل، E ثابت نگه داشته می‌شود و محل قطره به وسیله q، بار داده شده به قطره در قسمت باردار کننده، که پیش از ورود به سیستم منحرف کننده قرار دارد، معین می‌شود. قسمت باردار کننده با سیگنال‌های الکترونیکی که متن مورد نظر برای چاپ کردن را رمزگذاری کرده‌اند، فعال می‌شود.

آذرخش آتشفشانی

کوه آتشفشان **ساکوراجیما**[1] هنگام فوران کردن، آن طور که تصویر سرآغاز این فصل نشان می‌دهد، خاکستر به هوا می‌پاشد. خاکستر هنگامی به وجود می‌آید که آب درون کوه آتشفشان به طور ناگهانی به بخار تبدیل شود. تبدیل شدن آب به بخار به خاطر شارش گدازهٔ داغ ناشی از خرد شدن و سوختن تخته سنگهاست. عمل تبدیل شدن آب به بخار و انفجار تخته سنگها باعث می‌شود بارهای مثبت و منفی از هم جدا شوند. بنابراین، وقتی بخار آب و خاکستر به هوا پاشیده می‌شوند ابری تشکیل می‌دهند که شامل بسته‌های بار مثبت و بسته‌های بار منفی است.

در حین زیاد شدن بسته‌ها بزرگی میدان‌های الکتریکی میان بسته‌های مجاور و میان بسته‌ها و دهانهٔ آتشفشان افزایش می‌یابد. هرگاه بزرگی میدان الکتریکی به 3×10^6 N/C برسد در هوا **فروشکست الکتریکی** ایجاد می‌شود و جریان را هدایت می‌کند. این مسیرهای رسانای موقتی در هوا در جایی ظاهر می‌شوند که میدان الکتریکی مولکول‌های هوا را یونیده کرده و برخی الکترون‌های آنها را آزاد می‌کند. این الکترون‌ها تحت اثر میدان الکتریکی به حرکت در می‌آیند، در مسیر حرکت خود با مولکول‌های هوا برخورد می‌کنند و باعث گسیل شدن نور توسط این مولکول‌ها می‌شوند. این مسیرهای کوتاه معمولاً جرقه نامیده می‌شوند و به خاطر گسیل داشتن نور می‌توان آنها را دید (نمونه‌ای کوچک ـ مقیاس از جرقه زدن را می‌توان در اطراف کلاهک فلزی باردار شکل ۲۳ـ۱۵ مشاهده کرد).



شکل ۲۳ـ۱۵ در این تصویر کلاهک فلزی به اندازه‌ای باردار شده است که میدان الکتریکی حاصل از آن در هوای پیرامون باعث فروشکست الکتریکی می‌شود. جرقه‌های مرئی در جایی ظاهر می‌شوند که در هوا مسیرهای رسانای موقتی به وجود می‌آیند. در طول این مسیرها میدان الکتریکی الکترون‌ها را از مولکول‌های هوا خارج می‌کند و سپس آنها را برای برخورد با مولکول‌های دیگر شتاب می‌دهد.

جرقه‌ها در بالای کوه آتشفشان مسیر خود را از یک بستهٔ باردار به سمت دیوارهٔ دهانه آتشفشان یا برعکس، به شکلی مارپیچی طی می‌کنند. با توجه به انتهای شاخه شاخه شدهٔ جرقه‌ها می‌توان جهت آنها را معین کرد. اگر شاخه شاخه شدن به سمت پایین باشد جرقه مسیر مارپیچی خود را به سمت پایین طی می‌کند (به امتداد جرقهٔ روشن از طرف راست تصویر سرآغاز فصل به سمت دیوارهٔ دهانهٔ آتشفشان توجه کنید). اگر شاخه شاخه شدن به سمت بالا باشد، جرقه مسیر مارپیچی را به سمت بالا طی می‌کند (به بخش پایینی جرقهٔ روشن مرکزی روی دیوارهٔ دهانه توجه کنید). برخی اوقات یک جرقهٔ مارپیچی رو به پایین و یک جرقهٔ مارپیچی رو به بالا با هم تلاقی می‌کنند. آیا می‌توانید در روی تصویر سرآغاز فصل نمونه‌ای از این حالت را پیدا کنید؟

1. Sakurajima

مسألهٔ نمونهٔ ۲۳ـ۴

شکل ۲۳ـ۱۶، صفحه‌های منحرف کنندهٔ یک چاپگر جوهرافشان را که بر روی محورهای مختصات قرار گرفته‌اند، نشان می‌دهد. قطرهٔ جوهری به جرم $m = ۱٫۳ \times ۱۰^{-۱۰}kg$ و بار منفی $Q = ۱٫۵ \times ۱۰^{-۱۳}C$، که در حال حرکت با تندی آغازی $v_x = ۱۸m/s$ در راستای محور x است، به ناحیهٔ میان صفحه‌ها وارد می‌شود. طول صفحه‌ها L، برابر با ۱٫۶cm است. صفحه‌ها باردار هستند و در تمام نقاط میان آنها یک میدان الکتریکی ایجاد می‌شود. فرض کنید میدان الکتریکی $\vec{E}$ یکنواخت، رو به پایین و دارای بزرگی $۱٫۴ \times ۱۰^{۶}N/C$ است. مقدار انحراف قائم قطره در لبهٔ صفحه‌ها چقدر است؟ (نیروی گرانشی وارد بر قطره در مقایسه با نیروی الکتروستاتیکی وارد بر آن کوچک است و می‌توان از آن چشم‌پوشی کرد).

حل: بار قطره منفی و جهت میدان الکتریکی به سمت پایین است. در اینجا **نکتهٔ کلیدی** این است که با توجه به معادلهٔ ۲۳ـ۲۸، یک نیروی الکتروستاتیکی ثابت با بزرگی QE و به سمت بالا به قطرهٔ باردار وارد می‌شود. در نتیجه، قطره در حین حرکت با تندی ثابت v_x در راستای محور x با یک شتاب ثابت a_y هم به سمت بالا حرکت می‌کند. با استفاده از قانون دوم نیوتون $(F = ma)$ برای مؤلفه‌های مربوط به راستای محور y، داریم

$$a_y = \frac{F}{m} = \frac{QE}{m} \qquad (۲۳ـ۳۰)$$

فرض می‌کنیم t زمان عبور قطره از ناحیهٔ میان صفحه‌ها باشد. در زمان t جابه‌جایی‌های قائم و افقی قطره چنین به دست می‌آیند:

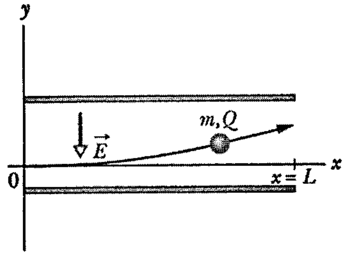
$$L = v_x t \quad \text{و} \quad y = \frac{۱}{۲} a_y t^{۲} \qquad (۲۳ـ۳۱)$$

با حذف کردن t در بین دو معادلهٔ بالا و جانشانی مقدار a_y از معادلهٔ ۲۳ـ۳۰، داریم

$$y = \frac{QEL^{۲}}{۲mv_x^{۲}}$$

$$y = \frac{(۱٫۵ \times ۱۰^{-۱۳}C)(۱٫۴ \times ۱۰^{۶}N/C)(۱٫۶ \times ۱۰^{-۲}m)^{۲}}{(۲)(۱٫۳ \times ۱۰^{-۱۰}kg)(۱۸m/s)^{۲}} \Rightarrow$$

$$y = ۶٫۴ \times ۱۰^{-۴}m = ۰٫۶۴mm \qquad \text{(پاسخ)}$$



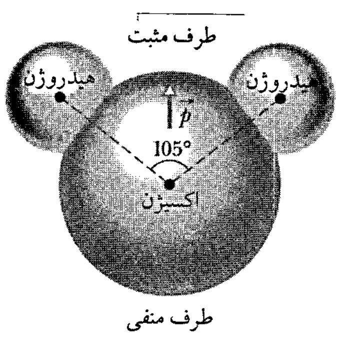
شکل ۲۳ـ۱۶ مسألهٔ نمونهٔ ۲۳ـ۴. یک قطرهٔ مرکب به جرم m و بار Q در میدان الکتریکی یک چاپگر جوهرافشان منحرف می‌شود.

۲۳ـ۹ مطالعهٔ دو قطبی در میدان الکتریکی

گشتاور دو قطبی الکتریکی یک دو قطبی الکتریکی $\vec{p}$، به صورت برداری تعریف شد که جهتش از سر منفی به سر مثبت دو قطبی است. چنانکه خواهیم دید، رفتار دو قطبی در میدان الکتریکی خارجی یکنواخت $\vec{E}$ را می‌توان به طور کامل برحسب دو بردار $\vec{E}$ و $\vec{p}$ توصیف کرد و نیازی به دانستن جزئیات مربوط به ساختار دوقطبی نیست.

مولکول آب (H_2O) یک دو قطبی الکتریکی است و شکل ۲۳ـ۱۷ دلیل این امر را نشان می‌دهد. در این شکل خال‌های سیاه هستهٔ اتم اکسیژن (با هشت پروتون) و هسته‌های اتم هیدروژن (هرکدام با یک پروتون) را نشان می‌دهند. سطح‌های محصور سایه زده ناحیه‌هایی را نشان می‌دهند که در آنها الکترون‌ها می‌توانند در پیرامون هسته‌ها حضور داشته باشند.

در مولکول آب دو اتم هیدروژن و یک اتم اکسیژن در یک راستا واقع نیستند، بلکه مطابق شکل ۲۳ـ۱۷، با هم زاویه‌ای در حدود ۱۰۵ درجه می‌سازند. در نتیجه، مولکول آب به طور مشخص دارای «طرف اکسیژن» و «طرف هیدروژن» است. علاوه بر این، ۱۰ الکترون مولکول آب مایل‌اند به هستهٔ اکسیژن نزدیکتر باشند تا به هستهٔ هیدروژن. در نتیجه، طرف اکسیژن مولکول اندکی منفی‌تر از طرف هیدروژن می‌شود و یک گشتاور دو قطبی الکتریکی $\vec{p}$ به وجود می‌آید که، مطابق شکل، در راستای محور تقارن مولکول است. اگر مولکول آب را در میدان الکتریکی خارجی قرار دهیم انتظار می‌رود مانند دو قطبی الکتریکی منفرد شکل ۲۳ـ۸ رفتار کند.



شکل ۲۳ـ۱۷ مولکول H_2O، که نمایش دهندهٔ سه هسته (مشخص شده با خال‌های سیاه) و ناحیه‌های حضور الکترون‌هاست. جهت گشتاور دو قطبی الکتریکی $\vec{p}$ از سوی اکسیژن (طرف منفی) به سوی هیدروژن (طرف مثبت) مولکول است.

برای مطالعهٔ این رفتار یک دو قطبی الکتریکی منفرد را در میدان الکتریکی خارجی یکنواخت $\vec{E}$، مطابق شکل ۲۳ـ۱۸ الف، در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم دو قطبی ساختاری صُلب دارد و شامل دو مرکز با بارهای مخالف q و به فاصلهٔ d از یکدیگر است. گشتاور دو قطبی $\vec{p}$ با میدان الکتریکی $\vec{E}$ زاویهٔ θ می‌سازد.

دو انتهای باردار دو قطبی تحت اثر نیروهای الکتروستاتیکی قرار می‌گیرند. به خاطر یکنواخت بودن میدان الکتریکی این نیروها دارای بزرگی یکسان $F = qE$ هستند، اما در جهت‌های مخالف (مطابق شکل ۲۳ـ۱۸) اثر می‌کنند. بنابراین، چون میدان یکنواخت است، نیروی برایند وارد بر دو قطبی از سوی میدان صفر است و مرکز جرم دو قطبی (com) حرکت نمی‌کند. با وجود این، نیروهای وارد بر دو انتهای باردار نسبت به مرکز جرم دو قطبی یک گشتاور نیروی برایند $\vec{\tau}$، ایجاد می‌کنند. مرکز جرم روی خط واصل دو انتهای باردار دو قطبی در فاصلهٔ x از یک انتها و به فاصلهٔ $d - x$ از انتهای دیگر قرار دارد. با استفاده از معادلهٔ ۱۱ـ۳۱ $(\tau = rF\sin\phi)$ بزرگی گشتاور نیروی برایند $\vec{\tau}$، چنین به دست می‌آید:

$$\tau = Fx\sin\theta + F(d - x)\sin\theta = Fd\sin\theta \qquad (۲۳\text{ـ}۳۲)$$

بزرگی $\vec{\tau}$ را برحسب بزرگی‌های میدان الکتریکی E و گشتاور دو قطبی $p = qd$ نیز می‌توان نوشت. برای این کار در معادلهٔ ۲۳ـ۳۲ به جای F مقدار qE و به جای d مقدار p/q را قرار می‌دهیم. در این صورت، بزرگی $\vec{\tau}$ برابر است با:

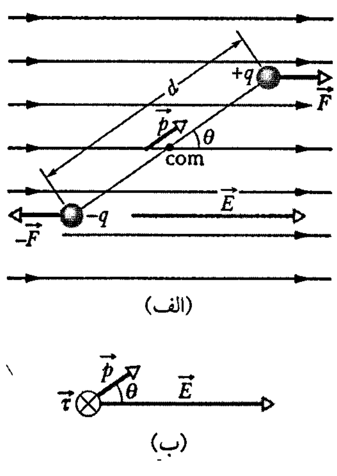
$$\tau = pE\sin\theta \qquad (۲۳\text{ـ}۳۳)$$

معادلهٔ بالا را می‌توان به شکل برداری زیر تعمیم داد:

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E} \quad \text{(گشتاور نیروی دو قطبی الکتریکی)} \qquad (۲۳\text{ـ}۳۴) \quad ■$$

در شکل ۲۳ـ۱۸ ب، بردارهای $\vec{p}$ و $\vec{E}$ معرفی شده‌اند. گشتاور نیروی وارد بر یک دو قطبی، بردار $\vec{p}$ (و در نتیجه دو قطبی) را در جهت میدان $\vec{E}$ می‌چرخاند و در نتیجه θ را کاهش می‌دهد. در شکل ۲۳ـ۱۸، این چرخش در جهت ساعتگرد است. همان‌طور که در فصل ۱۱ دیدیم، گشتاور نیروی ناشی از چرخش ساعتگرد را می‌توان با نسبت دادن علامت منفی به بزرگی گشتاور نیرو نمایش داد. با این نمادگذاری رابطهٔ مربوط به گشتاور نیرو در شکل ۲۳ـ۱۸ چنین است:

$$\tau = -pE\sin\theta \qquad (۲۳\text{ـ}۳۵)$$



(الف)

(ب)

شکل ۲۳ـ۱۸ (الف) نمودار دو قطبی الکتریکی در میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$. دو مرکز شامل بارهای الکتریکی مخالف و با بزرگی یکسان به اندازهٔ d از هم فاصله دارند. خط واصل دو مرکز ارتباط صُلب آنها را نشان می‌دهد. (ب) میدان $\vec{E}$ گشتاور نیروی $\vec{\tau}$ را به دو قطبی وارد می‌کند. جهت $\vec{\tau}$ در درون سوی صفحهٔ شکل است که با نماد ⊗ نشان داده شده است.

انرژی پتانسیل دو قطبی الکتریکی

چگونگی سمتگیری دو قطبی الکتریکی در میدان الکتریکی می‌تواند به یک انرژی پتانسیل وابسته باشد. دوقطبی موقعی کمترین انرژی پتانسیل را دارد که در حالت سمتگیری تعادل باشد، یعنی گشتاور دو قطبی $\vec{p}$ با میدان الکریکی $\vec{E}$ همسو باشد (در نتیجه $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E} = ۰$). در تمام سمتگیری‌های دیگر دو قطبی انرژی پتانسیل بیشتری دارد. بنابراین، دو قطبی مانند یک آونگ است، که در حالت سمتگیری تعادل در پایین‌ترین نقطهٔ مسیر حرکت دارای کمترین انرژی پتانسیل گرانشی است. برای چرخاندن دو قطبی یا آونگ به هر سمتگیری‌ای نیاز به انجام دادن کار توسط یک عامل خارجی است.

در موارد مربوط به انرژی پتانسیل ما آزادیم پیکربندی انرژی صفر را کاملاً به اختیار تعریف کنیم، زیرا فقط اختلاف انرژی پتانسیل معنای فیزیکی دارد. معلوم است که ساده‌ترین رابطهٔ انرژی پتانسیل یک دوقطبی واقع در میدان خارجی مربوط به حالتی است که انرژی صفر به ازای θ برابر با ۹۰ درجه در شکل ۲۳ـ۱۸، انتخاب شود. در این صورت، U، انرژی پتانسیل دو قطبی مربوط به هر مقدار دیگر θ را با استفاده از معادله ۸ـ۱ $(\Delta U = -W)$ و با محاسبهٔ W، کار انجام شده توسط میدان روی دو قطبی، در حین چرخش دو قطبی از زاویهٔ ۹۰ درجه تا زاویهٔ θ، می‌توان به دست آورد. با استفاده از معادلهٔ ۱۱ـ۴۵ $(W = \int \tau d\theta)$ و معادلهٔ ۲۳ـ۳۵، معلوم می‌شود که انرژی پتانسیل U به ازای زاویهٔ θ برابر است با:

$$U = -W = -\int_{۹۰^\circ}^{\theta} \tau d\theta = \int_{۹۰^\circ}^{\theta} pE\sin\theta d\theta \qquad (۲۳\text{ـ}۳۶)$$

پس از محاسبهٔ انتگرال، داریم

$$U = -pE\cos\theta \qquad (۲۳\text{ـ}۳۷)$$

این معادله را می‌توان به صورت برداری زیر تعمیم داد

$$U = -\vec{p}\cdot\vec{E} \quad \text{(انرژی پتانسیل دو قطبی الکتریکی)} \qquad (۳۸\text{-}۲۳)$$ ■

معادله‌های ۲۳-۳۷ و ۲۳-۳۸ نشان می‌دهند که انرژی پتانسیل دو قطبی به ازای $\theta = 0$، یعنی همسو بودن $\vec{p}$ و $\vec{E}$، کمترین مقدار $(U = -pE)$ و به ازای $\theta = 180°$، یعنی ناهمسو بودن $\vec{p}$ و $\vec{E}$، بیشترین مقدار $(U = pE)$ را دارد.

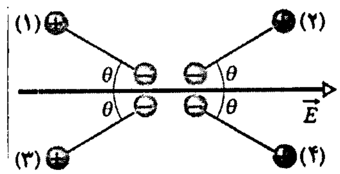
وقتی یک دو قطبی از سمتگیری آغازی θ_i تا سمتگیری دیگر θ_f می‌چرخد، W کار انجام شده توسط میدان الکتریکی روی دو قطبی برابر است با:

$$W = -\Delta U = -(U_f - U_i) \qquad (۳۹\text{-}۲۳)$$

که در آن U_f و U_i با استفاده از معادلهٔ ۲۳-۳۸ به دست می‌آیند. اگر تغییر سمتگیری ناشی از یک گشتاور نیروی وارد شده (که معمولاً گفته می‌شود ناشی از یک عامل خارجی است) باشد، W_a، کار انجام شده توسط گشتاور نیروی وارد شده روی دو قطبی برابر با مقدار کار انجام شده توسط میدان روی دو قطبی با علامت منفی است؛ یعنی

$$W_a = -W = (U_f - U_i) \qquad (۴۰\text{-}۲۳)$$

خودآزمایی ۵: شکل زیر، چهار سمتگیری یک دو قطبی الکتریکی را در میدان الکتریکی خارجی نشان می‌دهد. این سمتگیری‌ها را با توجه به (الف) بزرگی گشتاور نیروی وارد بر دو قطبی و (ب) انرژی پتانسیل دو قطبی، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



مسألهٔ نمونهٔ ۲۳-۵

بزرگی گشتاور دو قطبی الکتریکی یک مولکول بخار آب (H_2O) $۶٫۲ \times ۱۰^{-۳۰}$C.m است. (الف) در این مولکول فاصلهٔ مرکزهای بار منفی و بار مثبت چقدر است؟

حل: در اینجا **نکتهٔ کلیدی** این است که گشتاور دو قطبی مولکول به بزرگی q، بار مثبت یا منفی مولکول و d، فاصلهٔ میان بارها بستگی دارد. در مولکول آب ۱۰ الکترون و ۱۰ پروتون وجود دارد. در نتیجه، بزرگی گشتاور دو قطبی مولکول آب برابر است با:

$$p = qd = (۱۰e)(d)$$

که در آن d فاصلهٔ مورد نظر و e بار بنیادی است. در این صورت، داریم

$$d = \frac{p}{۱۰e} = \frac{۶٫۲ \times ۱۰^{-۳۰}\text{C.m}}{(۱۰)(۱٫۶۰\ ۱۰^{-۱۹}\text{C})} = ۳٫۹ \times ۱۰^{-۱۲}\text{m} \Rightarrow$$

$$d = ۳٫۹\text{pm} \qquad \text{(پاسخ)}$$

این فاصله بسیار کم و از شعاع اتم هیدروژن هم کمتر است.

(ب) اگر این مولکول در میدان الکتریکی $۱٫۵ \times ۱۰^۴$N/C قرار گیرد بیشینهٔ گشتاور نیرویی که میدان می‌تواند به آن وارد کند، چقدر است؟ (چنین میدانی را می‌توان به آسانی در آزمایشگاه ایجاد کرد).

حل: نکتهٔ کلیدی این است که گشتاور نیروی وارد بر دو قطبی هنگامی بیشینه است که θ، زاویهٔ بین $\vec{p}$ و $\vec{E}$ برابر با ۹۰ درجه باشد. با جانشانی این مقدار θ در معادلهٔ ۲۳-۳۳، داریم

$$\tau = pE\sin\theta$$

$$\tau = (۶٫۲ \times ۱۰^{-۳۰}\text{C.m})(۱٫۵ \times ۱۰^۴\text{N/C})(\sin ۹۰°) \Rightarrow$$

$$\tau = ۹٫۳ \times ۱۰^{-۲۶}\text{N.m} \qquad \text{(پاسخ)}$$

(پ) یک عامل خارجی چه مقدار کار باید انجام دهد تا این مولکول را از حالت هم خط بودن با میدان، یعنی $\theta = 0$، بچرخاند و آن را سر و ته کند؟

حل: در اینجا **نکتهٔ کلیدی** این است که کار انجام شده توسط عامل خارجی (به وسیلهٔ گشتاور نیروی وارد شده به مولکول)، برابر با تغییر انرژی پتانسیل مولکول به خاطر تغییر سمتگیری، است. با استفاده از معادلهٔ ۲۳-۴۰، داریم

$$W_a = U(۱۸۰°) - U(0)$$

$$W_a = (-pE\cos ۱۸۰°) - (-pE\cos 0)$$

$$W_a = ۲pE = (۲)(۶٫۲ \times ۱۰^{-۳۰}\text{C.m})(۱٫۵ \times ۱۰^۴\text{N/C}) \Rightarrow$$

$$W_a = ۱٫۹ \times ۱۰^{-۲۵}\text{J} \qquad \text{(پاسخ)}$$

مرور و خلاصهٔ مطالب فصل

میدان الکتریکی یکی از راههای تبیین نیروهای الکتروستاتیکی میان دو بار الکتریکی این است که فرض کنیم هر بار الکتریکی در فضای پیرامون خود یک میدان الکتریکی به وجود می‌آورد. بنابراین، نیروی الکتروستاتیکی وارد بر هر بار از میدان الکتریکی تولید شده در محل آن بار توسط بار دیگر، ناشی می‌شود.

تعریف میدان الکتریکی میدان الکتریکی $\vec{E}$ در هر نقطه برحسب نیروی الکتروستاتیکی $\vec{F}$ وارد بر یک بار آزمون مثبت q_0 واقع شده در آن نقطه تعریف می‌شود:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \qquad (۲۳\text{-}۱)$$

خط‌های میدان الکتریکی خط‌های میدان الکتریکی وسیله‌ای برای نمایش دادن جهت و بزرگی میدان‌های الکتریکی هستند. بردار میدان الکتریکی در هر نقطه برخط میدان گذرنده از آن نقطه مماس است. چگالی خط‌های میدان در هر ناحیه با بزرگی میدان الکتریکی در آن ناحیه متناسب است. خط‌های میدان از بارهای مثبت آغاز و به بارهای منفی ختم می‌شوند.

میدان الکتریکی ناشی از یک بار نقطه‌ای بزرگی میدان الکتریکی $\vec{E}$ ناشی از بار نقطه‌ای q در فاصلهٔ r از بار الکتریکی، برابر است با:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q|}{r^2} \qquad (۲۳\text{-}۳)$$

جهت میدان $\vec{E}$، اگر بار نقطه‌ای مثبت باشد به برون سو و اگر بار نقطه‌ای منفی باشد به سوی بار الکتریکی است.

میدان ناشی از دو قطبی الکتریکی دو قطبی الکتریکی شامل دو بار مخالف با بزرگی یکسان q است که به فاصلهٔ کوچک d از هم قرار دارند. **گشتاور دو قطبی** $\vec{p}$ دارای بزرگی qd است و جهت آن از بار منفی به سوی بار مثبت است. بزرگی میدان الکتریکی ناشی از دو قطبی در یک نقطهٔ دور واقع بر محور دو قطبی (که از هر دو بار می‌گذرد) برابر است با:

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{p}{z^3} \qquad (۲۳\text{-}۹)$$

که در آن z فاصلهٔ میان نقطهٔ مورد نظر و مرکز دو قطبی است.

میدان ناشی از توزیع بار پیوسته میدان الکتریکی ناشی از توزیع بار پیوسته با در نظر گرفتن عنصرهای بار به صورت بارهای نقطه‌ای و سپس جمع کردن بردارهای میدان الکتریکی تولید شده توسط تمام عنصرهای بار با استفاده از انتگرال‌گیری به دست می‌آید.

نیروی وارد بر یک بار نقطه‌ای در میدان الکتریکی هرگاه بار نقطه‌ای q در $\vec{E}$، میدان الکتریکی ناشی از بارهای دیگر قرار گیرد، نیروی الکتروستاتیکی وارد شده بر بار نقطه‌ای $\vec{F}$، برابر است با:

$$\vec{F} = q\vec{E} \qquad (۲۳\text{-}۲۸)$$

اگر q مثبت باشد، $\vec{F}$ با $\vec{E}$ همسو و اگر q منفی باشد، $\vec{F}$ با $\vec{E}$ ناهمسو است.

مطالعهٔ دو قطبی در میدان الکتریکی وقتی یک دو قطبی الکتریکی با گشتاور $\vec{p}$ را در میدان الکتریکی $\vec{E}$ قرار می‌دهیم از سوی میدان گشتاور نیروی $\vec{\tau}$ به دو قطبی وارد می‌شود:

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E} \qquad (۲۳\text{-}۳۴)$$

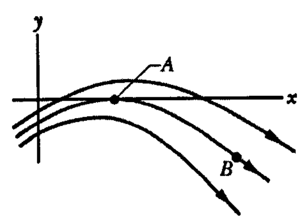
انرژی پتانسیل مربوط به سمتگیری دو قطبی در میدان الکتریکی چنین به‌دست می‌آید:

$$U = -\vec{p}\cdot\vec{E} \qquad (۲۳\text{-}۳۸)$$

این انرژی پتانسیل موقعی صفر در نظر گرفته می‌شود که $\vec{p}$ بر $\vec{E}$ عمود باشد؛ اگر $\vec{p}$ با $\vec{E}$ همسو باشد انرژی پتانسیل کمترین مقدار $(U = -pE)$ و اگر $\vec{p}$ با $\vec{E}$ ناهمسو باشد انرژی پتانسیل بیشترین مقدار $(U = pE)$ را دارد.

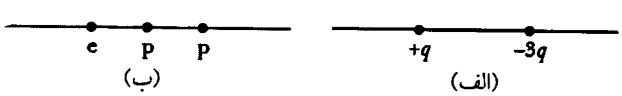
پرسش‌ها

۱. شکل ۲۳-۱۹، سه خط میدان الکتریکی را نشان می‌دهد. جهت نیروی الکتروستاتیکی وارد بر بار آزمون مثبت واقع در (الف) نقطهٔ A و (ب) نقطه B، کدام است؟ (پ) اگر بار آزمون را در یکی از نقطه‌های A یا B رها کنیم شتاب آن در کدام نقطه بیشتر است؟



شکل ۲۳-۱۹ پرسش ۱.

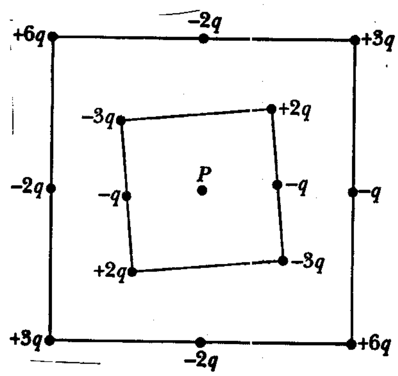
۲. شکل ۲۳-۲۰ الف، دو ذرهٔ باردار واقع بر روی محور x را نشان می‌دهد. (الف) در کدام نقطه از محور x (به جز نقطهٔ واقع در فاصلهٔ بی‌نهایت) میدان الکتریکی برایند حاصل از ذره‌ها صفر است: در بین بارها، در سمت چپ آنها یا در سمت راست آنها؟ (ب) آیا در خارج از محور x (به جز نقطهٔ واقع در فاصلهٔ بی‌نهایت) نقطه‌ای با میدان الکتریکی صفر وجود دارد؟



شکل ۲۳-۲۰ پرسش‌های ۲ و ۳.

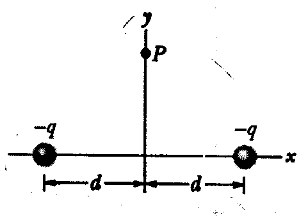
۳. شکل ۲۳-۲۰ ب، دو پروتون و یک الکترون را نشان می‌دهد که به فاصله‌های مساوی از هم بر روی محور x قرار دارند. در کجای محور (به جز نقطهٔ واقع در فاصلهٔ بی‌نهایت) نقطه‌ای وجود دارد که در آنجا میدان الکتریکی برایند صفر است: در سمت چپ ذره‌ها، در سمت راست ذره‌ها، در بین دو پروتون، یا در بین الکترون و پروتون نزدیک به آن؟

۴. شکل ۲۳-۲۱، دو آرایهٔ مربع شکل از ذره‌های باردار را نشان می‌دهد. ضلع‌های این مربع‌ها که مرکزشان در نقطهٔ P قرار دارد هم‌راستا نیستند. در روی محیط مربع‌ها فاصلهٔ بارها از یکدیگر d یا $\frac{d}{۲}$ است. بزرگی و جهت میدان الکتریکی برایند در نقطهٔ P چیست؟



شکل ۲۳-۲۱ پرسش ۴.

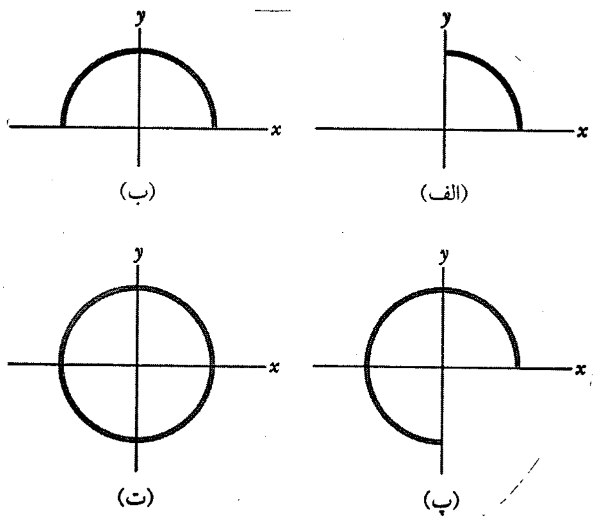
۵. در شکل ۲۳-۲۲، دو ذرهٔ با بار $-q$ نسبت به محور y به طور متقارن قرار گرفته‌اند؛ هر یک از این بارها در نقطهٔ P واقع بر محور x یک میدان الکتریکی تولید می‌کند. (الف) آیا بزرگی‌های میدان‌ها در نقطهٔ P با هم برابرند؟ (ب) آیا جهت هر میدان به سوی بار مولد میدان، یا به برون سوی آن است؟ (پ) آیا بزرگی میدان الکتریکی برایند در نقطهٔ P برابر با مجموع بزرگی‌های E دو بردار میدان (یعنی مساوی با $۲E$) است؟ (ت) آیا مؤلفه‌های x این دو بردار میدان با هم جمع می‌شوند یا یکدیگر را خنثی می‌کنند؟ (ث) آیا مؤلفه‌های y بردارها با هم جمع می‌شوند یا یکدیگر را خنثی می‌کنند؟ (ج) آیا میدان برایند در نقطهٔ P در جهت مؤلفه‌های حذف کنندهٔ یکدیگر یا مؤلفه‌های جمع شونده با یکدیگر است؟ (چ) جهت میدان برایند کدام است؟



شکل ۲۳-۲۲ پرسش ۵.

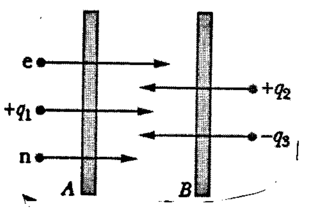
۶. سه میلهٔ نارسانای دایره‌ای با شعاع خمیدگی یکسان دارای بارهای یکنواخت‌اند. میلهٔ A دارای بار $+۲Q$ با زاویهٔ کمان ۳۰ درجه، میلهٔ B دارای بار $+۶Q$ با زاویهٔ کمان ۹۰ درجه و میلهٔ C دارای بار $+۴Q$ با زاویهٔ کمان ۶۰ درجه است. این میله‌ها را با توجه به چگالی خطی بار آنها، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.

۷. در شکل ۲۳-۲۳ الف، یک میلهٔ پلاستیکی دایره‌ای با بار یکنواخت $+Q$ در مرکز خمیدگی میله (در مبدأ مختصات) یک میدان الکتریکی به بزرگی E ایجاد می‌کند. در شکل‌های ۲۳-۲۳ ب، پ و ت، به میلهٔ اولی میله‌های دایره‌ای دیگری با بارهای یکنواخت و یکسان $+Q$ افزوده می‌شوند تا دایره کامل شود. آرایش پنجمی (که با شکل ث مشخص می‌شود) مانند آرایش ت را با این تفاوت که میله در ربع چهارم دارای بار $-Q$ است، در نظر می‌گیریم. این پنج آرایش را با توجه به بزرگی میدان الکتریکی حاصل در مرکز خمیدگی، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



شکل ۲۳-۲۳ پرسش ۷.

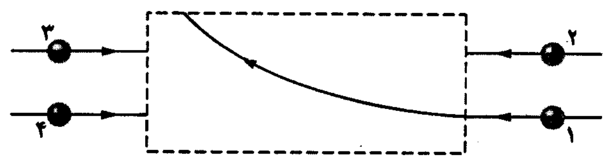
۸. در شکل ۲۳-۲۴، الکترون e از سوراخ کوچک واقع در صفحهٔ A می‌گذرد و به سوی صفحهٔ B می‌رود. میدان الکتریکی یکنواخت موجود در ناحیهٔ میان صفحه‌ها تندی الکترون را بدون منحرف کردن آن کاهش می‌دهد. (الف) جهت میدان چگونه است؟ (ب) چهار ذرهٔ دیگر به همین ترتیب، پس از عبور از سوراخ‌های کوچک واقع در صفحهٔ A یا صفحهٔ B به ناحیهٔ میان صفحه‌ها وارد می‌شوند. بارهای سه تا از این ذره‌ها $+q_1$،



شکل ۲۳-۲۴ پرسش ۸.

$+q_۲$ و $+q_۳$ هستند. ذرهٔ چهارم (مشخص شده با n) یک نوترون است که از نظر الکتریکی خنثی است. آیا تندی هر یک از چهار ذرهٔ دیگر در ناحیهٔ میان صفحه‌ها افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد، یا ثابت می‌ماند؟

۹. شکل ۲۳ـ۲۵ ، مسیر ذرهٔ با بار منفی ۱ را در ناحیهٔ مستطیل شکل شامل میدان الکتریکی یکنواخت نشان می‌دهد؛ این ذره به سمت بالای صفحهٔ شکل منحرف شده است. (الف) آیا جهت میدان الکتریکی به سمت چپ، به سمت راست، به سمت بالا یا به سمت پایین صفحه است؟ (ب) سه ذرهٔ باردار دیگر که نشان داده شده‌اند به ناحیهٔ شامل میدان الکتریکی نزدیک می‌شوند. کدام ذره به سمت بالا و کدام ذره به سمت پایین صفحهٔ شکل منحرف می‌شود؟



شکل ۲۳ـ۲۵ پرسش ۹.

۱۰. (الف) در خودآزمایی ۵، اگر دو قطبی از حالت ۱ تا حالت ۲ بچرخد، آیا کار انجام شده روی دو قطبی توسط میدان مثبت است، منفی است، یا صفر است؟ (ب) اکنون، اگر دو قطبی از حالت ۱ تا حالت ۴ بچرخد، آیا کار انجام شده توسط میدان نسبت به قسمت (الف) بیشتر است، کمتر است، یا مساوی است؟

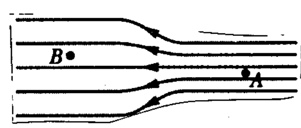
۱۱. انرژی‌های پتانسیل وابسته به چهار سمتگیری یک دو قطبی الکتریکی در میدان الکتریکی، (۱) $-5U_۰$ ، (۲) $-7U_۰$ ، (۳) $3U_۰$ ، و (۴) $5U_۰$ هستند، که در آن $U_۰$ مثبت است. این سمتگیری‌ها را با توجه به (الف) زاویهٔ میان گشتاور دو قطبی الکتریکی $\vec{p}$ و میدان الکتریکی $\vec{E}$ ، و (ب) بزرگی گشتاور نیروی وارد بر دو قطبی الکتریکی، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.

۱۲. اگر در روزی که هوا خشک است روی قالی راه بروید و سپس دست خود را به دستگیرهٔ فلزی دَر یا به پشت گردن کسی (به منظور شوخی) نزدیک کنید، ممکن است جرقه تولید شود. چرا جرقه تولید می‌شود؟ (اگر با نوک انگشت، یا بهتر از آن با نوک یک کلید فلزی، به دستگیرهٔ دَر نزدیک شوید نور و صدای جرقه بیشتر خواهد شد).

تمرین‌ها و مسأله‌ها

بخش ۲۳ـ۳ خط‌های میدان الکتریکی

۱ ت. در شکل ۲۳ـ۲۶ ، خط‌های میدان الکتریکی در طرف چپ به اندازه دو برابر خط‌های طرف راست از هم فاصله دارند. (الف) اگر بزرگی میدان در نقطهٔ A برابر با ۴۰N/C باشد چه نیرویی به یک پروتون واقع در این نقطه وارد می‌شود؟ (ب) بزرگی میدان در نقطهٔ B چقدر است؟



شکل ۲۳ـ۲۶ تمرین ۱.

۲ ت. نقش خط‌های میدان الکتریکی میان و بیرون دو پوستهٔ کروی رسانا و هم مرکز را وقتی که بار یکنواخت روی کرهٔ درونی $q_۱$ و بار یکنواخت روی کرهٔ بیرونی $q_۲$ است، به طور کیفی رسم کنید. حالت‌های $q_۱ > q_۲$ ، $q_۱ = q_۲$ و $q_۱ < q_۲$ را در نظر بگیرید.

۳ ت. نقش خط‌های میدان الکتریکی مربوط به یک قرص نازک به شعاع R را، که به طور یکنواخت باردار شده است، به طور کیفی رسم کنید. (راهنمایی: به عنوان حالت‌های حدی نقطه‌های بسیار نزدیک به قرص را، که در آنها میدان الکتریکی بر سطح قرص عمود است و نقطه‌های بسیار دور از قرص را، که در آنها میدان الکتریکی مانند میدان یک بار نقطه‌ای است، در نظر بگیرید).

بخش ۲۳ـ۴ میدان الکتریکی ناشی از یک بار نقطه‌ای

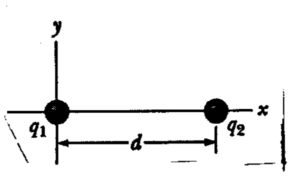
۴ ت. بزرگی بار الکتریکی یک بار نقطه‌ای که در نقاط واقع در فاصلهٔ ۰۰m ر۱ میدان الکتریکی ۰۰N/C ر۱ را تولید می‌کند چیست؟

۵ ت. بزرگی بار الکتریکی یک بار نقطه‌ای چقدر باید باشد تا بزرگی میدان الکتریکی حاصل در فاصلهٔ ۵۰ سانتی‌متری آن برابر با ۰N/C ر۲ شود؟

۶ ت. دو بار مخالف که هر کدام دارای بزرگی $۲ر۰ \times ۱۰^{-۷}C$ هستند به فاصلهٔ ۱۵cm از هم قرار گرفته‌اند. بزرگی و جهت $\vec{E}$ در نقطهٔ واقع در وسط فاصلهٔ میان بارها چیست؟

۷ ت. اتم پلوتونیوم ـ ۲۳۹ دارای هسته‌ای به شعاع ۶۴fm ر۶ و عدد اتمی $Z = ۹۴$ است. با این فرض که بار مثبت به طور یکنواخت درون هسته توزیع شده است بزرگی و جهت میدان الکتریکی ناشی از این بار مثبت در سطح هسته چیست؟

۸ م. در شکل ۲۳ـ۲۷ ، فاصلهٔ میان بارهای نقطه‌ای ثابت با بارهای $q_۱ = +۱ر۰ \times ۱۰^{-۶}C$ و $q_۲ = +۳ر۰ \times ۱۰^{-۶}C$ برابر است با $d = ۱۰cm$. نمودار میدان الکتریکی برایند $E(x)$ حاصل از این بارها را



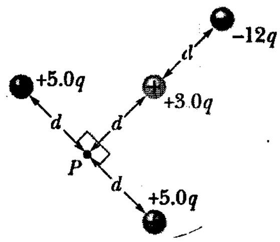
شکل ۲۳ـ۲۷ مسأله‌های ۸ و ۱۰.

برحسب x به ازای مقادیر مثبت و منفی x رسم کنید. میدان E را وقتی که بردار $\vec{E}$ به سمت راست است مثبت و وقتی که به سمت چپ است منفی بگیرید.

۹ م. دو بار نقطه‌ای با بارهای $q_۱ = ۲٫۱ \times ۱۰^{-۸}\text{C}$ و $q_۲ = -۴٫۰ q_۱$ به فاصلهٔ ۵۰cm از هم قرار گرفته‌اند. در راستای خط واصل دو بار، نقطه‌ای را پیدا کنید که در آنجا میدان الکتریکی صفر باشد.

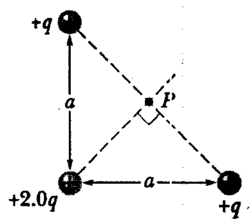
۱۰ م. (الف) در شکل ۲۳ـ۲۷ ، دو بار نقطه‌ای ثابت با بارهای $q_۱ = -۵q$ و $q_۲ = +۲q$ به فاصلهٔ d از هم قرار گرفته‌اند. مکان نقطه (یا نقطه‌هایی) را پیدا کنید که در آنجا میدان الکتریکی برایندناشی از دو بار صفر باشد. (ب) نقش خط‌های میدان الکتریکی برایند را به طور کیفی رسم کنید.

۱۱ م. در شکل ۲۳ـ۲۸ ، بزرگی میدان الکتریکی در نقطهٔ P که از چهار بار نقطه‌ای نشان داده شده حاصل می‌شود، چقدر است؟



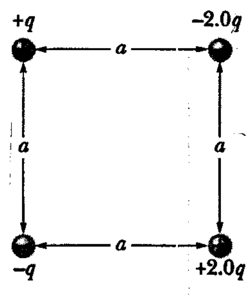
شکل ۲۳ـ۲۸ مسألهٔ ۱۱.

۱۲ م. جهت و بزرگی میدان الکتریکی را در نقطهٔ P در شکل ۲۳ـ۲۹ ، که از سه بار نقطه‌ای ناشی می‌شود، معین کنید.



شکل ۲۳ـ۲۹ مسألهٔ ۱۲.

۱۳ م. در شکل ۲۳ـ۳۰ ، به ازای $q = ۱٫۰ \times ۱۰^{-۸}\text{C}$ و $a = ۵٫۰\text{cm}$ بزرگی و جهت میدان الکتریکی در مرکز مربع چیست؟



شکل ۲۳ـ۳۰ مسألهٔ ۱۳.

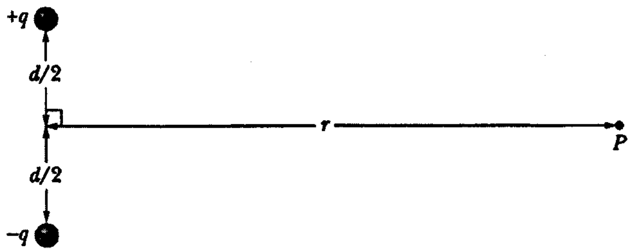
بخش ۲۳ـ۵ میدان الکتریکی ناشی از دو قطبی الکتریکی

۱۴ ت. فرض کنید در شکل ۲۳ـ۸ هر دو بار الکتریکی مثبت‌انـد. بـه ازای $z \gg d$، نشان دهید که در آن شکل بزرگی E در نـقطهٔ P از مـعادلهٔ زیـر به‌دست می‌آید

$$E = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰} \frac{۲q}{z^۲}$$

۱۵ ت. گشتاور دو قطبی الکتریکی یک الکـترون و یک پـروتون واقـع در فاصلهٔ ۴٫۳۰nm از یکدیگر را حساب کنید.

۱۶ م. بزرگی و جهت میدان الکتریکی در نقطه P را که از دو قطبی الکتریکی شکل ۲۳ـ۳۱ ناشی شده است، پیدا کنید. نقطهٔ P روی عمود منصف خط واصل بارها و در فاصلهٔ $r \gg d$ واقع است. پـاسخ را بـرحسب بـزرگی و جهت گشتاور دو قطبی الکتریکی $\vec{p}$ بیان کنید.

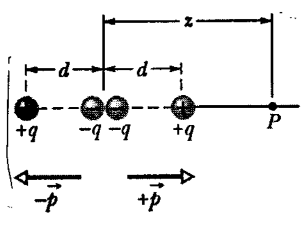


شکل ۲۳ـ۳۱ مسألهٔ ۱۶.

***۱۷ م.** چهار قطبی الکتریکی. شکل ۲۳ـ۳۲ ، یک چهار قطبی الکتریکی را نشان می‌دهد. این چهار قطبی شامل دو دوقطبی است که گشتاورهای دو قطبی آنها مخالف و از لحاظ بزرگی با هم برابرند. نشان دهید که مقدار E برای نقطهٔ P واقع بر روی محور چهار قطبی و به فاصلهٔ z از مرکز آن (با فرض $z \gg d$) برابر است با:

$$E = \frac{۳Q}{۴\pi\varepsilon_۰ z^۴}$$

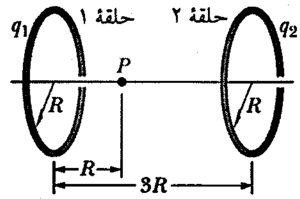
که در آن Q (مساوی با $۲qd^۲$) را گشتاور چهار قطبی توزیع بار می‌نامند.



شکل ۲۳ـ۳۲ مسألهٔ ۱۷.

بخش ۲۳ـ۶ میدان الکتریکی ناشی از یک خط باردار

۱۸ ت. شکل ۲۳ـ۳۳ ، دو حلقهٔ نارسانای موازی را که‌محور مرکزی مشترکی دارند، نشان می‌دهد. حلقهٔ ۱ دارای بار یکنواخت $q_۱$ و شعاع R و حلقهٔ ۲ دارای بار یکنواخت $q_۲$ و شعاع R است. فاصلهٔ حلقه‌ها از یکـدیگر $۳R$



شکل ۲۳ـ۳۳ تمرین ۱۸.

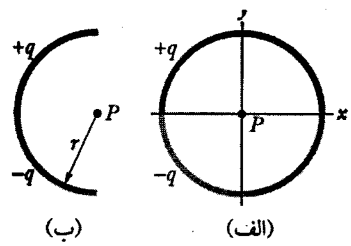
است. میدان الکتریکی برایند در نقطهٔ P واقع بر محور مشترک و به فاصلهٔ R از حلقهٔ ۱ صفر است. نسبت q_1/q_2 چقدر است؟

۱۹ م. الکترونی مقید به حرکت در راستای محور مرکزی حلقهٔ باردار به شعاع R است، که در بخش ۲۳ـ۶ مورد بحث قرار گرفته است. نشان دهید که نیروی الکتروستاتیکی وارد بر الکترون می‌تواند آن را حول مرکز حلقه با بسامد زاویه‌ای زیر به نوسان در آورد

$$\omega = \sqrt{\frac{eq}{4\pi\varepsilon_0 mR^3}}$$

که در آن q بار حلقه و m جرم الکترون است.

۲۰ م. در شکل ۲۳ـ۳۴ الف، دو میلهٔ پلاستیکی خمیده، یکی با بار $+q$ و دیگری با بار $-q$ دایره‌ای به شعاع R در صفحهٔ xy تشکیل می‌دهند. محور x از نقاط اتصال میله‌ها عبور می‌کند، و بارها به طور یکنواخت روی دو میله توزیع شده‌اند. بزرگی و جهت $\vec{E}$، میدان الکتریکی تولید شده در نقطهٔ P، مرکز دایره، چیست؟

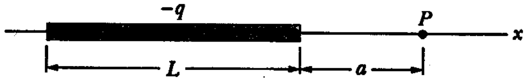


شکل ۲۳ـ۳۴ مسأله‌های ۲۰ و ۲۱.

۲۱ م. میله‌ای شیشه‌ای باریکی به صورت نیمدایره‌ای به شعاع r خم شده است. بار $+q$ به طور یکنواخت در نیمهٔ بالایی و بار $-q$ به طور یکنواخت در نیمهٔ پایینی میله، مطابق شکل ۲۳ـ۳۴ ب، توزیع شده است. بزرگی و جهت میدان الکتریکی $\vec{E}$ در نقطهٔ P، مرکز نیمدایره، چیست؟

۲۲ م. در چه فاصله‌ای از مرکز روی محور حلقه‌ای به شعاع R و حامل بار یکنواخت، بزرگی میدان الکتریکی ناشی از بار حلقه بیشینه است؟

۲۳ م. در شکل ۲۳ـ۳۵، میله‌ای نارسانا به طول L حامل بار $-q$ است که به‌طور یکنواخت در طول آن توزیع شده است. (الف) چگالی خطی بار میله چیست؟ (ب) میدان الکتریکی در نقطهٔ P به فاصلهٔ a از انتهای میله چقدر است؟ (پ) اگر فاصلهٔ P از انتهای میله در مقایسه با L خیلی زیاد باشد میله مانند یک بار نقطه‌ای به نظر می‌رسد. نشان دهید که پاسخ

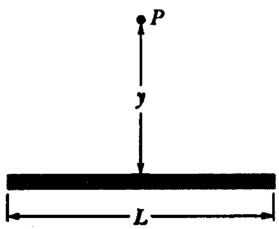


شکل ۲۳ـ۳۵ مسألهٔ ۲۳.

مربوط به قسمت (ب) به ازای $a \ll L$، میدان الکتریکی یک بار نقطه‌ای را به دست می‌دهد.

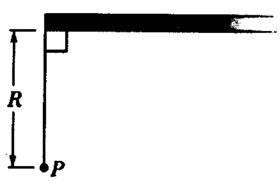
۲۴ م. یک میلهٔ باریک نارسانا به طول متناهی L، حامل بار q است که به طور یکنواخت در طول میله توزیع شده است. نشان دهید که E بزرگی میدان الکتریکی در نقطهٔ P واقع بر عمود منصف میله (شکل ۲۳ـ۳۶) از معادلهٔ زیر به دست می‌آید

$$E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 y}\,\frac{1}{(L^2 + 4y^2)^{\frac{1}{2}}}$$



شکل ۲۳ـ۳۶ مسألهٔ ۲۴.

۲۵ م.* در شکل ۲۳ـ۳۷، میلهٔ نارسانای «نیم ـ نامتناهی» (یعنی نامتناهی فقط از یک طرف) دارای چگالی خطی بار یکنواخت λ است. نشان دهید که راستای میدان الکتریکی در نقطهٔ P با میله زاویهٔ ۴۵ درجه می‌سازد و این نتیجه از فاصلهٔ R مستقل است. (راهنمایی: مؤلفه‌های موازی و عمود (بر میله) میدان الکتریکی در نقطهٔ P را به طور جداگانه پیدا کنید و سپس آنها را با هم مقایسه کنید.)



شکل ۲۳ـ۳۷ مسألهٔ ۲۵.

بخش ۲۳ـ۷ میدان الکتریکی ناشی از یک قرص باردار

۲۶ ت. قرصی به شعاع $2{,}5\,\text{cm}$ دارای چگالی سطحی بار در روی وجه بالایی $5{,}3\,\mu\text{C/m}^2$ است. بزرگی میدان الکتریکی تولید شده توسط قرص در نقطه‌ای واقع بر محور مرکزی و به فاصلهٔ $z = 12\,\text{cm}$ از قرص چقدر است؟

۲۷ م. در طول محور مرکزی در چه فاصله‌ای از یک قرص پلاستیکی باردار یکنواخت به شعاع R، بزرگی میدان الکتریکی برابر با نصف بزرگی میدان در مرکز سطح قرص است؟

* مسأله‌های مشکل‌تر با علامت ستاره (*) مشخص شده‌اند. ـ م.

بخش ۲۳ـ۸ مطالعهٔ بار نقطه‌ای در میدان الکتریکی

۲۸ ت. الکترونی با شتاب $۱٫۸۰ \times ۱۰^{۹}\,m/s^{۲}$ ناشی از یک میدان الکتریکی به‌طرف شرق حرکت می‌کند. بزرگی و جهت میدان الکتریکی را معین‌کنید.

۲۹ ت. الکترونی از حال سکون در یک میدان الکتریکی یکنواخت به بزرگی $۲٫۰۰ \times ۱۰^{۴}\,N/C$ رها می‌شود. شتاب الکترون را حساب کنید (اثر گرانش را نادیده بگیرید).

۳۰ ت. جرم یک ذرهٔ آلفا (هستهٔ اتم هلیوم) $۶٫۶۴ \times ۱۰^{-۲۷}\,kg$ و بار الکتریکی آن $+۲e$ است. بزرگی و جهت میدان الکتریکی لازم برای متوازن شدن با نیروی گرانشی وارد بر ذره چیست؟

۳۱ ت. بزرگی نیروی وارد شده از سوی یک دو قطبی الکتریکی با گشتاور دو قطبی $۳٫۶ \times ۱۰^{-۲۹}\,C.m$ به الکترونی واقع در فاصلهٔ ۲۵nm از مرکز در طول محور دو قطبی، چقدر است؟ فرض کنید این فاصله در مقایسه با فاصلهٔ میان بارهای دو قطبی بزرگ است.

۳۲ ت. هوای مرطوب در میدان الکتریکی $۳٫۰ \times ۱۰^{۶}\,N/C$ فرو می‌شکند (مولکول‌های هوا یونیده می‌شوند). در این میدان بزرگی نیروی الکتروستاتیکی وارد بر (الف) یک الکترون و (ب) یک یون تک الکترون از دست داده، چقدر است؟

۳۳ ت. سیستم ابر باردار در هوای نزدیک سطح زمین میدان الکتریکی تولید می‌کند. هرگاه ذره‌ای با بار الکتریکی $-۲٫۰ \times ۱۰^{-۹}\,C$ در این میدان قرار گیرد به آن نیروی الکتروستاتیکی رو به پایین $۳٫۰ \times ۱۰^{-۶}\,N$ وارد می‌شود. (الف) بزرگی این میدان الکتریکی چقدر است؟ (ب) بزرگی و جهت نیروی الکتروستاتیکی وارد بر یک پروتون واقع در این میدان چیست؟ (پ) نیروی گرانشی وارد بر پروتون چقدر است؟ (ت) در این شرایط، نسبت بزرگی نیروی الکتروستاتیکی به بزرگی نیروی گرانشی چقدر است؟

۳۴ ت. جهت میدان الکتریکی $\vec{E}$ با بزرگی متوسط در حدود ۱۵۰N/C در جوّ نزدیک سطح زمین به سمت پایین است. می‌خواهیم کره‌ای از گوگرد به وزن ۴٫۴N را با باردار کردن آن در این میدان «شناور» کنیم. (الف) از کدام بار از (از لحاظ علامت و بزرگی) باید استفاده کرد؟ (ب) چرا این آزمایش اجرا نشدنی است؟

۳۵ ت. باریکه‌های پروتون‌های بسیار سریع را می‌توان با «تفنگ‌ها»یی که از میدان‌های الکتریکی شتاب دهندهٔ پروتون استفاده می‌کنند، تولید کرد. (الف) اگر میدان الکتریکی این تفنگ $۲٫۰۰ \times ۱۰^{۴}\,N/C$ باشد پروتون تحت اثر چه شتابی قرار می‌گیرد؟ (ب) اگر میدان الکتریکی در طی مسافت ۱٫۰۰cm به‌پروتون شتاب بدهد تندی پروتون چقدر خواهد شد؟

۳۶ ت. الکترونی با تندی $۵٫۰۰ \times ۱۰^{۸}\,cm/s$ به میدان الکتریکی با بزرگی $۱٫۰۰ \times ۱۰^{۳}\,N/C$ وارد می‌شود. الکترون در طول خط‌های میدان در جهتی پیش می‌رود که حرکتش کند می‌شود. (الف) الکترون تا پیش از متوقف شدن به طور لحظه‌ای چه مسافتی را در میدان می‌پیماید، و (ب) پیمودن این مسافت چه مدت طول می‌کشد؟ (پ) اگر طول ناحیه‌ای که در آن میدان الکتریکی وجود دارد ۸٫۰۰mm باشد (مسافتی که برای متوقف شدن الکترون نسبتاً کوتاه است) چه کسری از انرژی جنبشی آغازی الکترون در این ناحیه تلف می‌شود؟

۳۷ ت. در آزمایش میلیکان قطرهٔ روغنی به شعاع $۱٫۶۴\mu m$ و چگالی $۰٫۸۵۱\,g/cm^{۳}$ در اتاقک C (شکل ۲۳ـ۱۳) با وارد کردن میدان الکتریکی رو به پایین $۱٫۹۲ \times ۱۰^{۵}\,N/C$ به حال تعلیق در می‌آید. بار الکتریکی روی قطره را برحسب e پیدا کنید.

۳۸ م. میلیکان در یکی از آزمایش‌های خود مشاهده کرد که در میان بارهای الکتریکی اندازه‌گیری شده برای یک تک قطره در زمان‌های مختلف مقادیر زیر وجود دارند:

$۶٫۵۶۳ \times ۱۰^{-۱۹}C$	$۱۳٫۱۳ \times ۱۰^{-۱۹}C$	$۱۹٫۷۱ \times ۱۰^{-۱۹}C$
$۸٫۲۰۴ \times ۱۰^{-۱۹}C$	$۱۶٫۴۸ \times ۱۰^{-۱۹}C$	$۲۲٫۸۹ \times ۱۰^{-۱۹}C$
$۱۱٫۵۰ \times ۱۰^{-۱۹}C$	$۱۸٫۰۸ \times ۱۰^{-۱۹}C$	$۲۶٫۱۳ \times ۱۰^{-۱۹}C$

با استفاده از این داده‌ها چه مقداری برای بار بنیادی e می‌توان به دست آورد؟

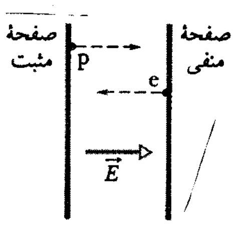
۳۹ م. در ناحیهٔ میان دو صفحهٔ با بارهای مخالف یک میدان الکتریکی یکنواخت وجود دارد. الکترونی در روی صفحهٔ منفی از حال سکون رها می‌شود و پس از مدت $۱٫۵ \times ۱۰^{-۸}\,s$ به صفحهٔ مقابل واقع در فاصلهٔ ۲٫۰ سانتی‌متری برخورد می‌کند. (الف) تندی الکترون در موقع برخورد به صفحهٔ مقابل چقدر است؟ (ب) بزرگی میدان الکتریکی $\vec{E}$ چیست؟

۴۰ م. در لحظهٔ معینی مؤلفه‌های سرعت یک الکترون در حال حرکت در میان دو صفحهٔ متوازی باردار عبارت‌اند از:

$$v_x = ۱٫۵ \times ۱۰^{۵}\,m/s \quad و \quad v_y = ۳٫۰ \times ۱۰^{۳}\,m/s$$

فرض کنید میدان الکتریکی میان صفحه‌ها $\vec{E} = (۱۲۰N/C)\hat{j}$ است. (الف) شتاب الکترون چیست؟ (ب) سرعت الکترون پس از تغییر کردن مختصهٔ x آن به اندازهٔ ۲٫۰cm ، چیست؟

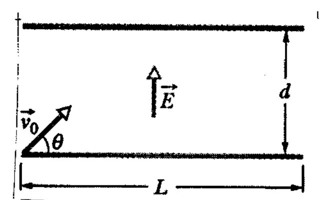
۴۱ م. در میان دو صفحهٔ مسی بزرگ و متوازی به فاصلهٔ ۵٫۰cm از هم میدان الکتریکی یکنواختی مطابق شکل ۲۳ـ۳۸ ، وجود دارد. الکترونی از صفحهٔ منفی و همزمان با آن پروتونی از صفحهٔ مثبت رها می‌شود. با چشم‌پوشی از نیرویی که ذره‌ها به هم وارد می‌کنند، فاصلهٔ دو ذره از صفحهٔ مثبت را در موقع عبور کردن از کنار یکدیگر پیدا کنید. (از اینکه برای حل کردن این مسأله نیازی به دانستن میدان الکتریکی ندارید تعجب می‌کنید؟)



شکل ۲۳ـ۳۸ مسألهٔ ۴۱.

۴۲ م. جسمی به جرم ۰ر۱۰g و بار الکتریکی $+8.00 \times 10^{-5}$C در میدان الکتریکی $\vec{E} = (3.00 \times 10^{3})\hat{i} - 600\hat{j}$ قرار دارد، که در آن $\vec{E}$ برحسب نیوتون بر کولن است. (الف) بزرگی و جهت نیروی وارد بر جسم چیست؟ (ب) اگر جسم در مبداء مختصات و در لحظهٔ $t = 0$ از حال سکون شروع به حرکت کند، مختصات محل آن در زمان $t = 3.00$s چه خواهد بود؟

۴۳ م. در شکل ۲۳ـ۳۹، میدان الکتریکی یکنواخت رو به بالای $\vec{E}$ با بزرگی 2.00×10^{3}N/C، بین دو صفحهٔ متوازی، با دادن بار مثبت بـه صـفحهٔ پایینی و بار منفی به صفحهٔ بالایی، بـرقرار شـده است. طـول صـفحه‌ها $L = 10.0$cm و فاصلهٔ میان آنها $d = 2.00$cm است. الکترونی از لبهٔ سمت چپ صفحهٔ پایینی به میان صفحه‌ها پرتاب می‌شود. بردار سرعت آغازی الکترون $\vec{v}_0$، با صفحهٔ پایینی زاویهٔ $\theta = 45.0°$ تشکیل می‌دهد و بزرگی آن 6.00×10^{6}m/s است. (الف) آیا الکترون با یکی از صفحه‌ها برخورد می‌کند؟ (ب) اگر برخورد می‌کند، به کدام صفحه و در چه فاصلهٔ افقی از لبهٔ سمت چپ؟



شکل ۲۳ـ۳۹ مسألهٔ ۴۳.

بخش ۲۳ـ۹ مطالعهٔ دو قطبی در میدان الکتریکی

۴۴ ت. یک دو قطبی الکتریکی که شامل بارهایی به بزرگی 1.50nC و به فـاصلهٔ 6.20μm از یکـدیگر است، در یک مـیدان الکـتریکی بـه شـدت 1100N/C قرار گرفته است. (الف) بزرگی گشتاور دو قـطبی الکـتریکی چقدر است؟ (ب) اختلاف انرژی پتانسیل متناظر در سمتگیری‌های مـوازی (همسو) و پادموازی (ناهمسو) دو قطبی با میدان الکتریکی، چقدر است؟

۴۵ ت. یک دو قطبی الکـتریکی شـامل بـارهای $+2e$ و $-2e$ بـه فـاصلهٔ 0.78nm از یکدیگر است. این دو قطبی در میدان الکتریکی بـه شـدت 3.4×10^{6}N/C قرار می‌گیرد. بزرگی گشتاور نیروی وارد بر دو قطبی را در موقعی که گشتاور دو قـطبی (الف) مـوازی بـا، (ب) عـمود بـر، و (پ) پادموازی با، میدان الکتریکی است، حساب کنید.

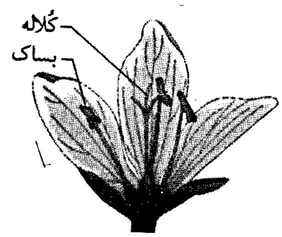
۴۶ م. کـار لازم بـرای سـر و تـه کـردن یک دوقـطبی الکـتریکی در مـیدان یکنواخت $\vec{E}$ را برحسب p، بزرگی گشتاور دوقطبی، E، بزرگی میدان و θ_0، زاویهٔ آغازی میان $\vec{p}$ و $\vec{E}$، پیدا کنید.

۴۷ م. بسامد نوسان یک دو قطبی الکتریکی با گشتاور دو قطبی $\vec{p}$ و لختی دورانی I را برای دامنه‌های کوچک نوسان حول وضعیت تعادل در میدان الکتریکی یکنواخت به بزرگی E، پیدا کنید.

مسألهٔ تکمیلی

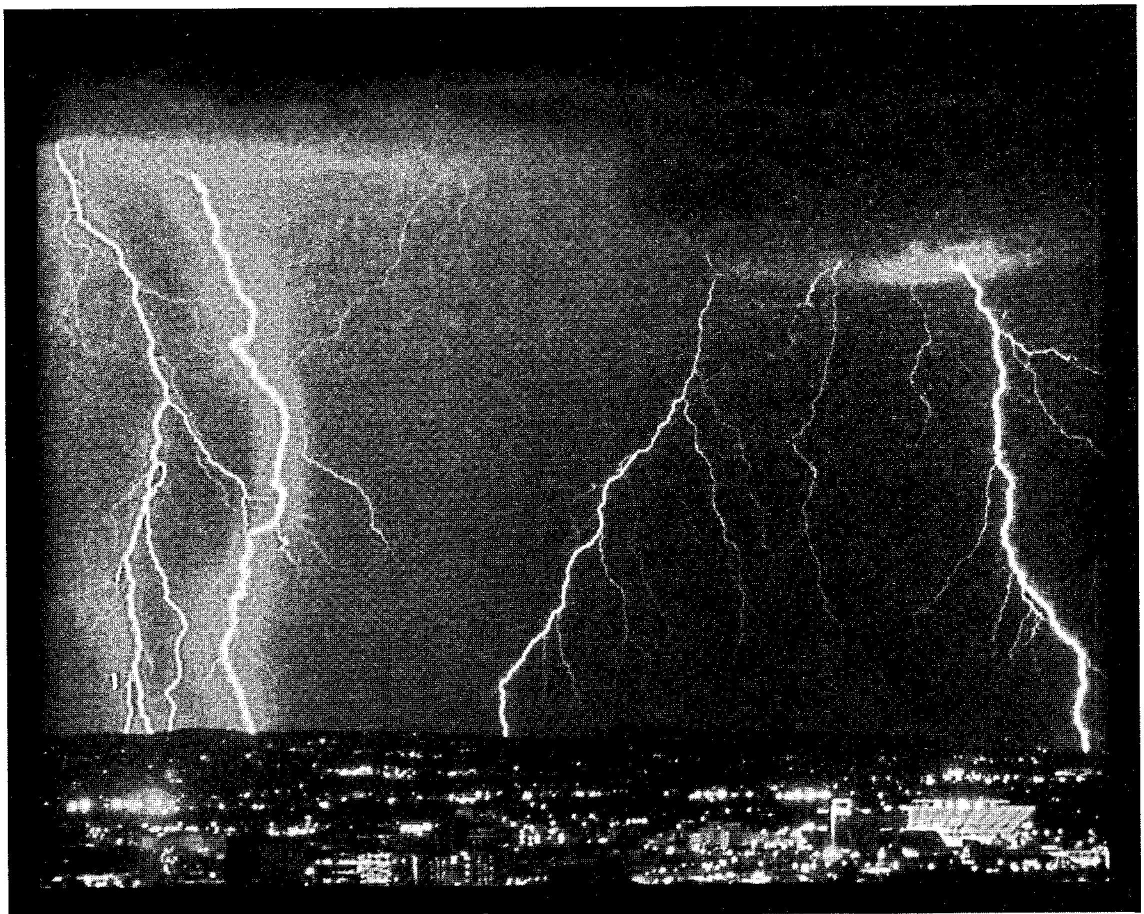
۴۸. باز تولید گلها به حشراتی بستگی دارد که دانه‌های گرده را از گلی به گل دیگر انتقال می‌دهند. یکی از راه‌های عملی شدن این کار توسط زنبورهای عسل بدین‌گونه است که آنها گرده‌ها را با استفاده از خـواص الکـتریکی جمع می‌کنند، زیرا زنبورها معمولاً دارای بار مثبت‌انـد. وقـتی زنـبور در نزدیکی بساک یک گل (شکل ۲۳ـ۴۰)، که از نظر الکتریکی عایق است پر می‌زند دانه‌های گرده (که نسبتاً رسانا هستند) به سوی زنبور می‌جهند و در حین پرواز کردن زنبور تا گل دیگر، به آن می‌چسبند. هنگامی که زنبور به کلالهٔ آن گل نزدیک می‌شود، چون کُلاله از نظر الکتریکی از طریق قسمت درونی گل به زمین وصل شده است دانه‌های گرده از زنبور به سمت کُلاله می‌جهند و گل را بارور می‌کنند.

(الف) با این فرض که یک زنبور به شکل یک رسانای کروی و حامل بار الکتریکی 45pC است، بزرگی میدان الکتریکی زنبور را در محل یک دانهٔ گرده به فاصلهٔ 2.0cm از مرکز زنبور پیدا کنید. (ب) آیا ایـن مـیدان یکنواخت است یا نـایکنواخت؟ (پ) بـا اسـتدلال تـوضیح دهـید چـرا دانه‌های گرده به طرف زنبور می‌جهند، در حین پرواز کردن زنـبور بـه آن می‌چسبند، و سپس از زنبور به کُلالهٔ متصل به زمین جـذب مـی‌شوند. (راهنمایی: شکل ۲۲ـ۵ را در نظر بگیرید). وقتی یک دانهٔ گرده به زنبور می‌رسد، آیا با آن تماس الکتریکی پیدا می‌کند، به گونه‌ای که بار روی دانه تغییر کند؟



شکل ۲۳ـ۴۰ مسألهٔ ۴۸.

۲۴
قانون گاؤس

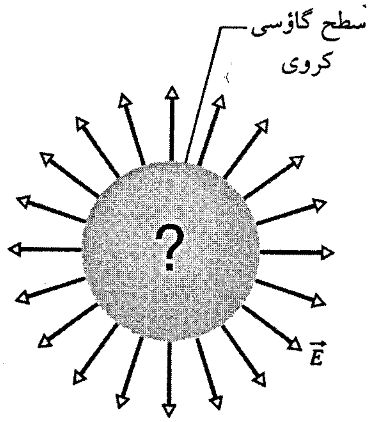


در یک نمایش درخشان صاعقه در آسمان شهر توسان در هر صاعقه تقریباً 10^{20} الکترون از ابرها به زمین منتقل می‌شود.

پهنای هر صاعقه چقدر است؟ از آنجا که هر صاعقه را از کیلومترها فاصله می‌توان مشاهده کرد، آیا پهنای آن مثلاً به اندازهٔ پهنای یک اتومبیل هست؟

در این فصل به این پرسش پاسخ داده خواهد شد.

۲۴ـ۱ نگاهی تازه به قانون کولن



شکل ۲۴ـ۱ نمودار یک سطح گاؤسی کروی. اگر بردارهای میدان الکتریکی دارای بزرگی یکسان و در تمام نقاط روی سطح در راستای شعاع و در برون سوی سطح باشند، می‌توان نتیجه گرفت که درون سطح یک توزیع بار الکتریکی مثبت خالص با تقارن کروی وجود دارد.

اگر بخواهیم مرکز جرم یک سیب زمینی را پیدا کنیم، از طریق آزمایش یا با انجام دادن محاسبات دشوار، که شامل محاسبهٔ عددی یک انتگرال سه‌گانه است، می‌توانیم این کار را انجام دهیم. اما اگر سیب‌زمینی اتفاقاً به شکل یک بیضیوار یکنواخت باشد، با توجه به تقارن می‌دانیم که مرکز جرم آن دقیقاً و بدون محاسبه در کجا قرار دارد. این نتیجه از مزایای تقارن است. حالت‌های متقارن در تمام شاخه‌های فیزیک وجود دارند، و هرگاه ممکن باشد، قانون‌های فیزیک را می‌توان به شکلی در آورد که در آنها از مزایای تقارن به طور کامل استفاده شود.

قانون کولن قانون حاکم بر الکتروستاتیک است، اما به شکلی در نمی‌آید که به نحوی استثنایی در حالت‌های متقارن کار را آسان کند. در این فصل فرمولبندی جدیدی از قانون کولن را معرفی می‌کنیم که توسط ریاضیدان و فیزیکدان آلمانی، **کارل فریدریش گاؤس**[1] (۱۷۷۷/۱۱۵۶ ـ ۱۸۵۵/۱۲۳۴)، استنتاج شده است. این قانون، که **قانون گاؤس** نام دارد، می‌تواند با استفاده از حالت‌های متقارن خاص به کار برده شود. در مسأله‌های مربوط به الکتروستاتیک این قانون با قانون کولن کاملاً هم‌ارز است و ما بسته به مسألهٔ مورد نظر، می‌توانیم یکی از آن دو را انتخاب کنیم.

موضوع اصلی در قانون گاؤس یک سطح بستهٔ فرضی به نام **سطح گاؤسی** است. سطح گاؤسی می‌تواند هر شکلی که بخواهیم داشته باشد، اما مفیدترین سطح آن است که با تقارن مسألهٔ مورد نظر سازگار باشد. بنابراین، سطح گاؤسی اغلب به شکل کره، استوانه، یا هر شکل متقارن دیگر خواهد بود. این سطح باید همیشه بسته باشد، گونه‌ای که بتوان نقاط واقع در درون سطح، روی سطح، و بیرون سطح را به راحتی تشخیص داد.

تصور کنید می‌خواهید یک سطح گاؤسی واقع در پیرامون توزیعی از بارها را بررسی کنید. در این صورت، نقش قانون گاؤس چنین بیان می‌شود:

◄ قانون گاؤس میدان‌های الکتریکی در نقاط واقع بر سطح گاؤسی (بسته) را به بار الکتریکی خالص محصور شده در آن سطح ارتباط می‌دهد.

شکل ۲۴ـ۱ ، حالت ساده‌ای را نشان می‌دهد که در آن سطح گاؤسی یک کره است. فرض کنید می‌دانید که در هر نقطهٔ واقع در روی سطح یک میدان الکتریکی با بزرگی یکسان در راستای شعاع و در برون سوی سطح وجود دارد. بدون آنکه چیزی دربارهٔ قانون گاؤس بدانید می‌توانید حدس بزنید که باید بار الکتریکی خالص مثبتی توسط سطح گاؤسی محصور شده باشد. اگر قانون گاؤس را بدانید، می‌توانید مقدار این بار خالص مثبت محصور شده در سطح بسته را حساب کنید. برای این محاسبه فقط لازم است بدانید که «چه مقدار» خط میدان الکتریکی از سطح عبور کرده است. این «مقدار» مبین شار میدان الکتریکی گذرنده از سطح گاؤسی است.

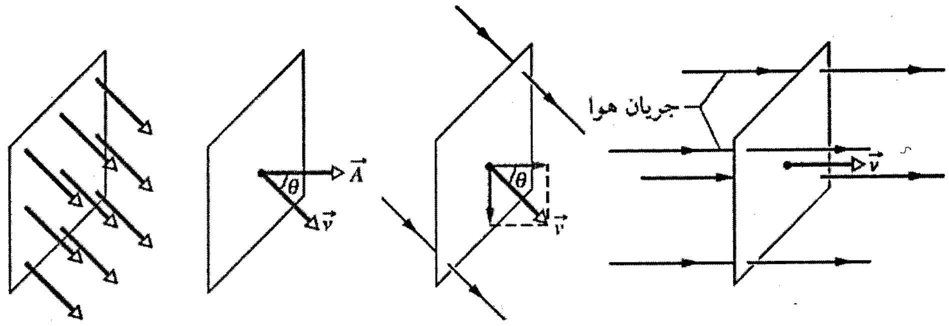
۲۴ـ۲ شار

فرض کنید یک حلقهٔ کوچک چهارگوش به مساحت A را، مطابق شکل ۲۴ـ۲ الف، به طور عمود در معرض جریان هوای با سرعت یکنواخت، $\vec{v}$ قرار می‌دهیم. فرض می‌کنیم Φ مبین آهنگ **شارش حجمی** (حجم در یکای زمان) هوای گذرنده از حلقه است. این آهنگ به زاویهٔ میان $\vec{v}$ و صفحهٔ حلقه بستگی دارد. اگر $\vec{v}$ بر صفحه عمود باشد، آهنگ Φ برابر با vA است.

اگر $\vec{v}$ با صفحهٔ حلقه موازی باشد، هیچ هوایی از حلقه عبور نمی‌کند و در نتیجه Φ صفر است. برای مقادیر میانی زاویهٔ θ، آهنگ Φ به مؤلفه‌ای از $\vec{v}$ که عمود بر صفحه است (شکل ۲۴ـ۲ ب) بستگی دارد. چون مقدار این مؤلفه $v\cos\theta$ است، آهنگ شارش حجمی گذرنده از حلقه برابر است با:

$$\Phi = (v\cos\theta)A \qquad (۲۴\text{ـ}۱)$$

1. Carl Friedrich Gauss



شکل ۲۴ـ۲ (الف) نمایش جریان یکنواخت هوا که با سرعت $\vec{v}$ به طور عمود بر صفحهٔ یک حلقهٔ مربعی به مساحت A می‌گذرد. (ب) مؤلفهٔ عمود بر صفحهٔ حلقهٔ بردار $\vec{v}$ برابر با $v\cos\theta$ است، که در آن θ زاویهٔ میان $\vec{v}$ و خط عمود بر صفحه است. (پ) بردار سطح $\vec{A}$ بر صفحهٔ حلقه عمود است و با $\vec{v}$ زاویهٔ θ می‌سازد. (ت) نمودار بردار میدان سرعت که توسط سطح حلقه قطع شده است.

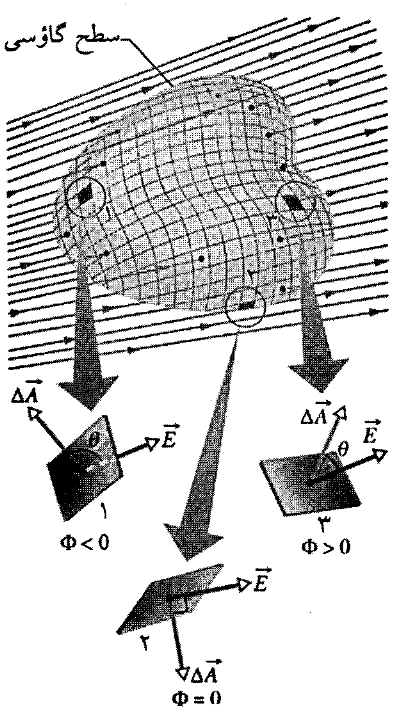
آهنگ شارش گذرنده از سطح مثالی از **شار** ـ در این حالت **شار حجمی** ـ است. پیش از بحث دربارهٔ شار مربوط به الکتروستاتیک لازم است معادلهٔ ۲۴ـ۱ به صورت برداری نوشته شود.

برای انجام دادن این کار، ابتدا **بردار سطح** $\vec{A}$ را به صورت برداری تعریف می‌کنیم که بر سطح عمود، بزرگی‌اش برابر با مساحت سطح (در اینجا مساحت حلقه) و جهتش در برون سوی سطح است (شکل ۲۴ـ۲ پ). اکنون معادلهٔ ۲۴ـ۱ را به صورت حاصل‌ضرب نرده‌ای (یا نقطه‌ای) بردار سرعت جریان هوا $\vec{v}$، در بردار سطح حلقه $\vec{A}$، می‌نویسیم:

$$\Phi = vA\cos\theta = \vec{v} \cdot \vec{A} \qquad (۲۴\text{ـ}۲)$$

در اینجا θ زاویهٔ میان $\vec{v}$ و $\vec{A}$ است.

واژهٔ «flux» به معنای شار، از یک واژهٔ لاتین گرفته شده و به مفهوم «جاری شدن» است. کاربرد این معنا هنگامی مناسب است که از جریان یافتن حجم هوا از حلقه صحبت کنیم، اما معادلهٔ ۲۴ـ۲ را به طریق مجردتری هم می‌توان در نظر گرفت. برای این منظور به هر نقطه از جریان هوای گذرنده از حلقه (شکل ۲۴ـ۲ ت) می‌توان یک بردار سرعت نسبت داد. حاصل ترکیب همهٔ این بردارها یک میدان سرعت است، به گونه‌ای که معادلهٔ ۲۴ـ۲ را می‌توان به صورت **شار میدان سرعت گذرنده** از **حلقه** تعبیر کرد. با این تعبیر، دیگر شار به معنای شارش واقعی چیزی از یک سطح نیست ـ بلکه به معنای حاصل ضرب یک مساحت در میدان در برگیرندهٔ آن مساحت است.



شکل ۲۴ـ۳ نمایش یک سطح گاؤسی با شکل اختیاری غوطه‌ور در یک میدان الکتریکی. این سطح به مربع‌های کوچکی به مساحت ΔA تقسیم شده است. بردارهای میدان الکتریکی $\vec{E}$ و بردارهای سطح $\Delta\vec{A}$ مربوط به سه مربع نمونهٔ مشخص شده با ۱ ، ۲ و ۳ ، نشان داده شده‌اند.

۲۴ـ۳ شار میدان الکتریکی

برای تعریف کردن شار میدان الکتریکی، شکل ۲۴ـ۳ را که نشان دهندهٔ یک سطح گاؤسی اختیاری (نامتقارن) غوطه‌ور در میدان الکتریکی نایکنواخت است، در نظر می‌گیریم. این سطح را به مربع‌های کوچکی به مساحت ΔA تقسیم می‌کنیم. مربع‌ها را آن قدر کوچک می‌گیریم که بتوانیم از خمیدگی سطح آنها چشم‌پوشی کنیم و هر مربع مجزا را به صورت تخت در نظر بگیریم. هر یک از این عنصرهای سطح را با بردار $\Delta\vec{A}$ که بزرگی‌اش برابر با مساحت ΔA است، نمایش می‌دهیم. بردار $\Delta\vec{A}$ بر سطح گاؤسی عمود و جهتش در برون سوی سطح است.

چون مربع‌ها به اختیار کوچک فرض شده‌اند میدان الکتریکی بالای هر مربع $\vec{E}$، را می‌توان ثابت فرض کرد. بردارهای $\Delta\vec{A}$ و $\vec{E}$ مربوط به هر مربع با هم زاویه‌ای مانند θ تشکیل می‌دهند. شکل ۲۴ـ۳، نمای بزرگ شدهٔ سه مربع (۱ ، ۲ و ۳) واقع بر سطح گاؤسی و θ زاویه مربوط به هر یک را نشان می‌دهد.

تعریف موقتی مربوط به شار میدان الکتریکی سطح گاؤسی شکل ۲۴ـ۳ را با معادلهٔ زیر بیان می‌کنیم

$$\Phi = \sum \vec{E} \cdot \Delta\vec{A} \qquad (۳\text{ـ}۲۴)$$

این معادله به ما نشان می‌دهد که با توجه به هر مربع روی سطح گاؤسی باید حاصل‌ضرب نرده‌ای دو بردار $\vec{E}$ و $\Delta\vec{A}$، یعنی، $\vec{E} \cdot \Delta\vec{A}$، را محاسبه و نتیجه‌های حاصل را برای تمام مربع‌های تشکیل دهندهٔ سطح به طور جبری (یعنی، با علامت‌های مربوط) با هم جمع کنیم. علامت نتیجهٔ به دست آمده یا صفر بودن هر یک از حاصل‌ضرب‌های نرده‌ای معین می‌کند که شار گذرنده از مربع مربوط مثبت است، منفی است، یا صفر است. مربعی مانند ۱، که در آن $\vec{E}$ به درون سوی سطح است، در حاصل جمع معادلهٔ ۲۴ـ۳ با علامت منفی شرکت می‌کند. مربعی مانند ۲، که در آن $\vec{E}$ بر سطح منطبق است، در این حاصل جمع سهمی برابر با صفر دارد. مربعی مانند ۳، که در آن $\vec{E}$ به برون سوی سطح است، در حاصل جمع با علامت مثبت شرکت می‌کند.

تعریف دقیق شار میدان الکتریکی گذرنده از یک سطح بسته، با کوچکتر اختیار کردن مربع‌ها در شکل ۲۴ـ۳ و نزدیک کردن مساحت مربع به حد دیفرانسیلی dA، به دست می‌آید. در این صورت، بردارهای سطح به حد دیفرانسیلی $d\vec{A}$ میل می‌کنند. در نتیجه، حاصل جمع در معادلهٔ ۲۴ـ۳ به انتگرال تبدیل می‌شود و برای تعریف شار الکتریکی، داریم

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad \text{(شار الکتریکی گذرنده از یک سطح گاؤسی)} \qquad (۴\text{ـ}۲۴)$$ ■

حلقهٔ روی علامت انتگرال نشان می‌دهد که انتگرال‌گیری باید روی سطح کامل (بسته) انجام شود. شار میدان الکتریکی کمیتی نرده‌ای، و یکای SI آن **نیوتون متر مربع بر کولن** (با نماد $N.m^2/C$) است.

معادله ۲۴ـ۴ را می‌توان چنین توضیح داد: نخست یادآوری می‌شود که چگالی خط‌های میدان الکتریکی گذرنده از یک سطح را می‌توان به عنوان معیاری متناسب با میدان الکتریکی $\vec{E}$ مورد استفاده قرار داد. به بیانی دقیق‌تر، بزرگی E با تعداد خط‌های میدان الکتریکی در یکای سطح متناسب است. بنابراین، حاصل‌ضرب نرده‌ای $\vec{E} \cdot d\vec{A}$ در معادلهٔ ۲۴ـ۴، با تعداد خط‌های میدان الکتریکی گذرنده از سطح $d\vec{A}$، تناسب دارد. پس، چون در معادلهٔ ۲۴ـ۴ انتگرال‌گیری روی سطح گاؤسی، که بسته است، انجام می‌شود، می‌توان گفت که:

◀ شار الکتریکی گذرنده از یک سطح گاؤسی Φ، با تعداد خالص خط‌های میدان الکتریکی گذرنده از آن سطح متناسب است.

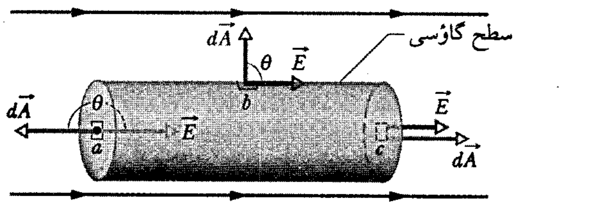
مسألهٔ نمونهٔ ۲۴ـ۱

شکل ۲۴ـ۴، یک سطح گاؤسی استوانه‌ای به شعاع R واقع در میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ را نشان می‌دهد. محور استوانه با خط‌های میدان موازی است. شار میدان الکتریکی گذرنده از این سطح بسته Φ، چقدر است؟

حل: در اینجا **نکتهٔ کلیدی** این است که شار گذرنده از سطح را می‌توان با انتگرال‌گیری از حاصل‌ضرب $\vec{E} \cdot d\vec{A}$ روی سطح گاؤسی پیدا کرد. این کار با نوشتن شار به صورت مجموع سه جمله، شامل انتگرال‌های روی قاعدهٔ سمت چپ استوانه a، روی سطح جانبی استوانه b، و روی قاعدهٔ سمت راست استوانه c، انجام می‌شود. بنابراین، با استفاده از معادلهٔ ۲۴ـ۴، داریم

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

$$\Phi = \int_a \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_b \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_c \vec{E} \cdot d\vec{A} \qquad (۵\text{ـ}۲۴)$$



شکل ۲۴ـ۴ مسألهٔ نمونهٔ ۲۴ـ۱. سطح گاؤسی استوانه‌ای بسته شده در دو انتها در میدان الکتریکی یکنواخت غوطه‌ور است. محور استوانه با راستای میدان موازی است.

برای تمام نقاط روی قاعدهٔ سمت چپ، θ زاویهٔ میان $\vec{E}$ و $d\vec{A}$ برابر با ۱۸۰ درجه و بزرگی میدان E، ثابت است. پس، می‌توان نوشت

$$\int_a \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int E(\cos 180°)dA = -E\int dA = -EA$$

که در آن $\int dA$ برابر با A، مساحت قاعده (مساوی با $\pi R^۲$) است. به همین ترتیب، برای قاعدهٔ سمت راست که در تمام نقاط آن θ برابر با صفر است، داریم

$$\int_c \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int E(\cos ۰^\circ)dE = EA$$

سرانجام، برای سطح جانبی استوانه، که در تمام نقاط آن θ برابر با ۹۰ درجه است، داریم

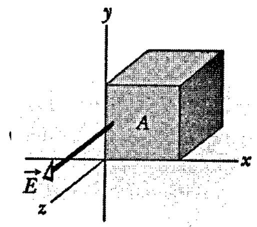
$$\int_b \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int E(\cos ۹۰^\circ)dA = ۰$$

با جانشانی مقادیر به دست آمده در معادلهٔ ۲۴ـ۵ ، خواهیم داشت

$$\Phi = -EA + ۰ + EA = ۰$$ (پاسخ)

این نتیجه شگفت‌انگیز نیست: چون خط‌های میدان نشان دهندهٔ میدان الکتریکی به‌طور کامل از سطح گاؤسی عبور می‌کنند، یعنی، آنها به قاعدهٔ سمت چپ استوانه وارد و از قاعدهٔ سمت راست خارج می‌شوند. در نتیجه، شار خالص صفر است.

خودآزمایی ۱: شکل زیر، یک مکعب گاؤسی را که مساحت هر وجه آن A است نشان می‌دهد. این مکعب در میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$، که همسو با محور z مثبت است، قرار دارد. شار گذرنده از (الف) وجه روبه‌رو (وجه واقع در صفحهٔ xy)، (ب) وجه پشتی، (پ) وجه بالایی، و (ت) تمام وجه‌های مکعب، برحسب E و A چیست؟



مسألهٔ نمونهٔ ۲۴ـ۲

میدان الکتریکی نایکنواخت $\vec{E} = ۳٫۰x\hat{i} + ۴٫۰\hat{j}$، بر مکعب گاؤسی نشان داده شده در شکل ۲۴ـ۵ اثر می‌کند. (E برحسب نیوتون بر کولن و x برحسب متر است). شار الکتریکی گذرنده از وجه سمت راست، وجه سمت چپ و وجه بالایی مکعب، چقدر است؟

حل: در اینجا **نکتهٔ کلیدی** این است که شار گذرنده از سطح Φ، را می‌توان با انتگرال‌گیری از حاصل‌ضرب نرده‌ای $\vec{E} \cdot d\vec{A}$، روی هر وجه به‌دست آورد.

وجه سمت راست : بردار سطح $\vec{A}$ همیشه بر این سطح عمود و جهتش همیشه از سطح گاؤسی به سوی بیرون است. بنابراین، بردار $d\vec{A}$ برای وجه سمت راست مکعب باید در جهت x مثبت باشد. در این صورت، با استفاده از نمادگذاری بردارهای یکه، داریم

$$d\vec{A} = dA\hat{i}$$

پس، با توجه به معادلهٔ ۲۴ـ۴ ، شار گذرنده از وجه سمت راست Φ_r ، برابر است با:

$$\Phi_r = \int \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int (۳٫۰x\hat{i} + ۴٫۰\hat{j}) \cdot (dA\hat{i})$$

$$\Phi_r = \int [(۳٫۰x)(dA)\hat{i} \cdot \hat{i} + (۴٫۰)(dA)\hat{j} \cdot \hat{i}]$$

$$\Phi_r = \int (۳٫۰xdA + ۰) = ۳٫۰\int xdA$$

در محاسبهٔ انتگرال روی وجه سمت راست باید توجه کنیم که مقدار x در تمام نقاط آن وجه یکسان و برابر است با $x = ۳٫۰\text{m}$. نتیجه این است که این مقدار ثابت می‌تواند به جای x قرار داده شود. در این صورت، داریم

$$\Phi_r = ۳٫۰\int (۳٫۰)dA = ۹٫۰\int dA$$

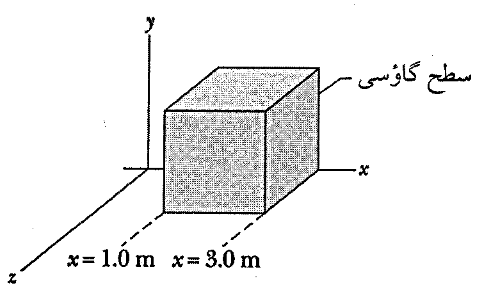
اکنون با توجه به انتگرال، مساحت وجه سمت راست برابر است با $A = ۴٫۰\text{m}^۲$ و نتیجه می‌گیریم که:

$$\Phi_r = (۹٫۰\text{N/C})(۴٫۰\text{m}^۲) \Rightarrow$$

$$\Phi_r = ۳۶\text{N.m}^۲/\text{C}$$ (پاسخ)

وجه سمت چپ : روش پیدا کردن شار گذرنده از وجه سمت چپ همان روش مربوط به وجه سمت راست است. اما در اینجا دو مورد تغییر می‌کند. (۱) بردار دیفرانسیلی سطح $d\vec{A}$ در جهت x منفی است، و از آنجا $d\vec{A} = -dA\hat{i}$. (۲) جملهٔ x باز هم در انتگرال‌گیری ظاهر می‌شود، و بر روی وجه مورد نظر ثابت است. اما در وجه سمت چپ، داریم $x = ۱٫۰\text{m}$. با توجه به این دو مورد تغییر نتیجه می‌گیریم که شار گذرنده از وجه سمت چپ Φ_l ، برابر است با:

$$\Phi_l = -۱۲\text{N.m}^۲/\text{C}$$ (پاسخ)



شکل ۲۴ـ۵ مسألهٔ نمونهٔ ۲۴ـ۲ . یک مکعب گاؤسی، که یک ضلعش روی محور x واقع است، درون میدان الکتریکی نایکنواخت قرار دارد.

وجه بالایی : بردار دیفرانسیلی سطح $d\vec{A}$ در جهت y مثبت است، و از آنجا $d\vec{A} = dA\hat{j}$. پس، شار گذرنده از وجه بالایی Φ_t ، برابر است با:

$$\Phi_t = \int (۳٫۰x\hat{i} + ۴٫۰\hat{j}) \cdot (dA\hat{i})$$

$$\Phi_t = \int [(۳٫۰x)(dA)\hat{i} \cdot \hat{j} + (۴٫۰)(dA)\hat{j} \cdot \hat{j}]$$

$$\Phi_t = \int (۰ + ۴٫۰dA) = ۴٫۰\int dA \Rightarrow$$

$$\Phi_t = ۱۶\text{N.m}^۲/\text{C}$$ (پاسخ)

۴-۲۴ قانون گاؤس

قانون گاؤس بیان کنندهٔ رابطهٔ Φ، شار خالص میدان الکتریکی گذرنده از یک سطح بسته (یک سطح گاؤسی) با q_{enc}، بار الکتریکی خالص محصور شده در آن سطح است. این رابطه چنین نوشته می‌شود:

$$\varepsilon_\circ \Phi = q_{enc} \qquad \text{(قانون گاؤس)} \qquad (۶\text{-}۲۴)$$

با جانشانی تعریف شار از معادلهٔ ۲۴-۴ رابطهٔ قانون گاؤس را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\varepsilon_\circ \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{enc} \qquad \text{(قانون گاؤس)} \qquad (۷\text{-}۲۴)$$

معادله‌های ۲۴-۶ و ۲۴-۷ تنها هنگامی معتبرند که بار الکتریکی خالص در خلاء یا در هوا (شرایط موجود در غالب موارد عملی) قرار گیرد. در بخش ۲۶-۸ رابطهٔ قانون گاؤس برای حالت‌هایی که در آنها ماده‌ای مانند میکا، روغن یا شیشه وجود دارد، اصلاح خواهد شد.

در معادله‌های ۲۴-۶ و ۲۴-۷، q_{enc}، بار الکتریکی خالص برابر است با مجموع جبری تمام بارهای مثبت و منفی محصور شده، که ممکن است، مثبت، منفی یا صفر باشد. در محاسبات باید علاوه بر بزرگی بار الکتریکی محصور شده علامت بار را هم وارد کنیم، زیرا این علامت دربارهٔ شار خالص گذرنده از سطح گاؤسی اطلاعاتی به ما می‌دهد: اگر q_{enc} مثبت باشد شار خالص به برون سوی سطح و اگر منفی باشد شار خالص به درون سوی سطح است.

بار الکتریکی بیرون سطح با هر بزرگی یا فاصله‌ای نسبت به سطح در جملهٔ q_{enc} در قانون گاؤس وارد نمی‌شود. شکل یا محل دقیق بارهای درون سطح گاؤسی هم اهمیتی ندارد؛ تنها موضوع مهم این است که جملهٔ سمت راست در معادلهٔ ۲۴-۷ شامل بزرگی و علامت بار الکتریکی خالص محصور شده است. اما کمیت $\vec{E}$ در سمت چپ معادلهٔ ۲۴-۷ میدان الکتریکی ناشی از تمام بارهای درون و بیرون سطح گاؤسی است. این امر ممکن است ناسازگار به نظر برسد، اما آنچه را که در مسألهٔ نمونهٔ ۲۴-۱ دیدید به یاد بیاورید: میدان الکتریکی ناشی از بار الکتریکی واقع در بیرون سطح گاؤسی هیچ شار خالصی از سطح عبور نمی‌دهد، زیرا از میدان ناشی شده از آن بار هر تعداد خط که به سطح وارد شود همان تعداد خط از سطح خارج می‌شود.

اکنون، این نقطه نظرها را در مورد شکل ۲۴-۶، که نشان دهندهٔ دو بار نقطه‌ای با بزرگی مساوی و با علامت مخالف و خط‌های میدان توصیف کنندهٔ میدان‌های الکتریکی تولید شده در فضای پیرامون است، به کار می‌بریم. در این شکل مقطع چهار سطح گاؤسی نیز نشان داده شده است. اینک هر یک از سطح‌ها را به نوبت بررسی می‌کنیم.

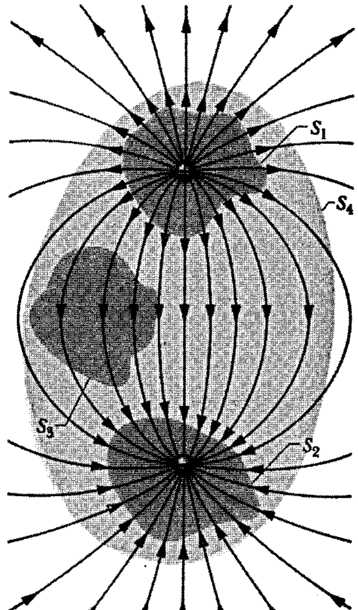
سطح $S_۱$. جهت میدان الکتریکی در تمام نقاط روی این سطح به برون سو است. بنابراین، شار میدان الکتریکی گذرنده از این سطح مثبت است. در نتیجه، چنانکه قانون گاؤس ایجاب می‌کند، بار خالص درون سطح نیز مثبت است (یعنی، در معادلهٔ ۲۴-۶، اگر Φ مثبت باشد، q_{enc} نیز مثبت است).

سطح $S_۲$. جهت میدان الکتریکی در تمام نقاط این سطح به درون سو است. بنابراین، شار میدان الکتریکی منفی و در نتیجه، طبق قانون گاؤس، بار محصور شده نیز منفی است.

سطح $S_۳$. این سطح هیچ باری را محصور نمی‌کند و در نتیجه، داریم $q_{enc} = ۰$. قانون گاؤس (معادلهٔ ۲۴-۶) ایجاب می‌کند که شار خالص میدان الکتریکی گذرنده از این سطح صفر باشد. این موضوع پذیرفتنی است زیرا تمام خط‌های میدان گذرنده از سطح از بالا وارد و از پایین خارج می‌شوند.

سطح $S_۴$. این سطح هیچ بار خالصی را محصور نمی‌کند، زیرا بارهای مثبت و بارهای منفی از نظر بزرگی با هم برابرند. قانون گاؤس ایجاب می‌کند که شار خالص میدان الکتریکی گذرنده از این سطح صفر باشد. این موضوع نیز پذیرفتنی است، زیرا هر تعداد خط میدان که به سطح $S_۴$ وارد شود همان تعداد خط از آن سطح خارج می‌شود.

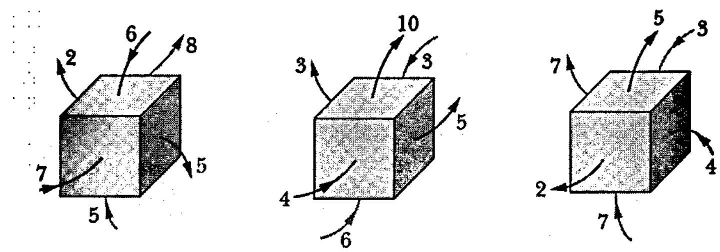
اگر بار الکتریکی بسیار بزرگ Q را به سطح $S_۴$ در شکل ۲۴-۶ نزدیک کنیم چه اتفاقی می‌افتد؟ نقش خط‌های میدان به یقین تغییر می‌کند اما شار خالص مربوط به هر یک از چهار سطح گاؤسی تغییر نمی‌کند. دلیل این



شکل ۲۴-۶ نمایش دو بار نقطه‌ای با بزرگی مساوی و با علامت مخالف و خط‌های میدان نشان دهندهٔ میدان الکتریکی برایند آنها. مقطع چهار سطح گاؤسی نشان داده شده است. سطح $S_۱$ بار مثبت و سطح $S_۲$ بار منفی را محصور کرده است. سطح $S_۳$ محصور کنندهٔ هیچ باری نیست. سطح $S_۴$ هر دو بار را محصور کرده است و در نتیجه شامل بار خالص نیست.

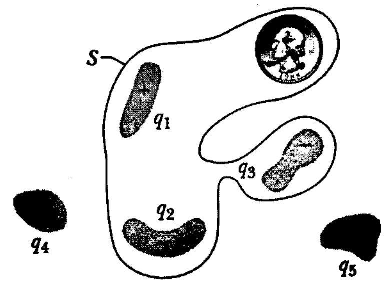
موضوع آن است که خط‌های میدان وابسته به اضافه شدن Q به طور کامل از هر یک از چهار سطح گاؤسی می‌گذرند بی‌آنکه سهمی در شار خالص گذرنده از هر کدام داشته باشند. مقدار بار الکتریکی Q به هیچ وجه در قانون گاؤس وارد نمی‌شود، زیرا Q در خارج از چهار سطح گاؤسی مورد نظر قرار دارد.

خودآزمایی ۲: شکل زیر، سه حالت را نشان می‌دهد که در آنها یک مکعب گاؤسی در میدان الکتریکی قرار دارد. پیکان‌ها و عددها جهت خط‌های میدان و بزرگی شار گذرنده از شش وجه هر مکعب را (برحسب $N.m^2/C$) نشان می‌دهند. (پیکان‌های کم‌رنگ مربوط به وجه‌هایی هستند که دیده نمی‌شوند). در کدام حالت، مکعب شامل (الف) بار خالص مثبت، (ب) بار خالص منفی، و (پ) بار خالص صفر است؟



مسألهٔ نمونهٔ ۲۴ـ۳

شکل ۲۴ـ۷ پنج تکهٔ پلاستیک باردار و یک سکه از نظر الکتریکی خنثی را نشان می‌دهد. در شکل، مقطع سطح گاؤسی S نشان داده شده است. شار الکتریکی خالص گذرنده از این سطح به ازای $q_1 = q_4 = +3{,}1\text{nC}$، $q_2 = q_5 = -5{,}9\text{nC}$ و $q_3 = -3{,}1\text{nC}$، چقدر است؟



شکل ۲۴ـ۷ مسألهٔ نمونهٔ ۲۴ـ۳. نمودار پنج شیء پلاستیکی، که هر یک دارای بار الکتریکی هستند و یک سکه که هیچ بار الکتریکی خالصی ندارد. مقطع یک سطح گاؤسی که سه شیء پلاستیکی و سکه را محصور کرده نشان داده شده است.

حل: در اینجا **نکتهٔ کلیدی** این است که شار خالص گذرنده از سطح Φ، به q_{enc}، بار خالص محصور شده در سطح S بستگی دارد. به این ترتیب، سکه و بارهای q_4 و q_5 در Φ دخالتی ندارند. سکه به این دلیل در محاسبهٔ شار دخالت ندارد که خنثی است و شامل بارهای مثبت و منفی با بزرگی یکسان است. بارهای q_4 و q_5 نیز به این جهت در محاسبه دخالت ندارند که در بیرون سطح S واقع شده‌اند. بنابراین، q_{enc} مساوی با $q_1 + q_2 + q_3$ است و با استفاده از معادلهٔ ۲۴ـ۶، داریم

$$\Phi = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} = \frac{q_1 + q_2 + q_3}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi = \frac{+3{,}1 \times 10^{-9}\text{C} - 5{,}9 \times 10^{-9}\text{C} - 3{,}1 \times 10^{-9}\text{C}}{8{,}85 \times 10^{-12}\text{C}^2/\text{N.m}^2} \Rightarrow$$

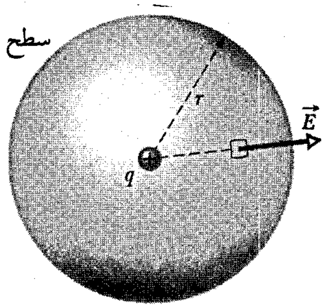
$$\Phi = -670\,\text{N.m}^2/\text{C}$$ (پاسخ)

علامت منفی نشان می‌دهد که شار خالص گذرنده از سطح به درون سو است و در نتیجه بار خالص درون سطح، منفی است.

۲۴ـ۵ قانون گاؤس و قانون کولن

اگر قانون گاؤس و قانون کولن هم ارز باشند باید بتوان یکی را از دیگری استنتاج کرد. در اینجا می‌خواهیم قانون کولن را با استفاده از قانون گاؤس و با توجه به برخی نکات مربوط به تقارن به دست آوریم.

شکل ۲۴ـ۸، بار نقطه‌ای مثبت q را نشان می‌دهد که در پیرامون آن یک سطح گاؤسی کروی به شعاع r و به مرکز بار رسم شده است. این سطح را به مساحت‌های دیفرانسیلی dA تقسیم می‌کنیم. بنا به تعریف بردار



شکل ۲۴ـ۸ نمودار یک سطح گاؤسی کروی که بار نقطه‌ای q در مرکز آن قرار دارد.

سطح $d\vec{A}$، در هر نقطه بر سطح عمود و جهتش به برون سوی سطح است. با توجه به تقارن می‌دانیم که در هر نقطه میدان الکتریکی $\vec{E}$ نیز بر سطح عمود و جهتش به برون سوی سطح است. بنابراین، چون θ، زاویهٔ میان $\vec{E}$ و $d\vec{A}$ صفر است معادلهٔ ۲۴ـ۷ مربوط به قانون گاؤس را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \varepsilon_0 \oint E dA = q_{\text{enc}} \qquad (۲۴ـ۸)$$

در اینجا، داریم $q_{\text{enc}} = q$. اگر چه E برحسب فاصله از q تغییر می‌کند، مقدار آن در همه جای سطح کروی یکسان است. چون در معادلهٔ ۲۴ـ۸ انتگرال روی تمام سطح گرفته می‌شود، E در انتگرال‌گیری مقداری ثابت است و می‌توان آن را به جلو علامت انتگرال آورد. در نتیجه، خواهیم داشت

$$\varepsilon_0 E \oint dA = q \qquad (۲۴ـ۹)$$

حاصل انتگرال همان مجموع مساحت‌های دیفرانسیلی dA بر روی کره، و در نتیجه، برابر با مساحت سطح، $4\pi r^2$، است. با جانشانی این مقدار، داریم

$$\varepsilon_0 E(4\pi r^2) = q \Rightarrow$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \qquad (۲۴ـ۱۰)$$

این مقدار دقیقاً میدان الکتریکی ناشی از یک بار نقطه‌ای (معادلهٔ ۲۳ـ۳) است که با استفاده از قانون کولن به دست آمد. بنابراین، قانون گاؤس با قانون کولن هم ارز است.

خودآزمایی ۳: Φ_i، شار خالص گذرنده از یک سطح کروی به شعاع r و محصور کنندهٔ یک ذرهٔ باردار منزوی است. فرض کنید سطح گاؤسی محصور کننده به (الف) یک کرهٔ گاؤسی بزرگتر، (ب) یک مکعب گاؤسی به ضلع r، و (پ) یک مکعب گاؤسی به ضلع $2r$، تغییر می‌کند. در هر حالت، آیا شار خالص گذرنده از سطح گاؤسی جدید نسبت به Φ_i بیشتر است، کمتر است یا مساوی است؟

روشهای مسأله حل کردن

روش ۱: انتخاب سطح گاؤسی

استنتاج معادلهٔ ۲۴ـ۱۰ با استفاده از قانون گاؤس تمرینی برای استنتاج میدان‌های الکتریکی حاصل از پیکربندی‌های بارالکتریکی دیگر است. پس، مرحله‌های مربوط را دوباره مرور می‌کنیم. ما کار را از بار نقطه‌ای مثبت q آغاز کردیم. می‌دانیم که در یک نقش متقارن کروی خط‌های میدان در راستای شعاع کره و به برون سوی q رسم می‌شوند.

برای تعیین E، بزرگی میدان الکتریکی در فاصلهٔ r با استفاده از قانون گاؤس (معادلهٔ ۲۴ـ۷)، یک سطح گاؤسی بستهٔ فرضی را در پیرامون q طوری در نظر گرفتیم که فاصلهٔ هر نقطهٔ آن از q برابر با r باشد. سپس، مجموع مقادیر $\vec{E} \cdot A\vec{d}$ را از طریق انتگرال‌گیری بر روی کل سطح گاؤسی به دست آوریم. برای ساده کردن انتگرال‌گیری تا حد امکان، یک سطح گاؤسی کروی (سازگار با تقارن کروی میدان الکتریکی) انتخاب کردیم. این انتخاب از سه جنبه ساده کننده بود. (۱) حاصل ضرب نقطه‌ای $\vec{E} \cdot d\vec{A}$ ساده شد، زیرا در تمام نقطه‌های روی سطح گاؤسی زاویهٔ میان $\vec{E}$ و $d\vec{A}$ صفر بود. در نتیجه، در تمام نقطه‌ها، داریم $\vec{E} \cdot d\vec{A} = EdA$. (۲) بزرگی میدان الکتریکی E، در تمام نقطه‌های روی سطح گاؤسی کروی یکسان است. در نتیجه، E در انتگرال‌گیری یک مقدار ثابت بود و ما توانستیم آن را به جلو علامت انتگرال بیاوریم. (۳) نتیجهٔ کار به یک انتگرال‌گیری بسیار ساده منجر شد، که جمع کردن مساحت‌های دیفرانسیلی کره بود، و ما توانستیم نتیجه را به صورت $4\pi r^2$ بنویسیم.

توجه کنید که قانون گاؤس بدون توجه به شکل سطح گاؤسی انتخاب شده در پیرامون بار الکتریکی q_{enc} صادق است. اما اگر یک سطح گاؤسی، مثلاً به شکل مکعب انتخاب می‌کردیم، سه جنبهٔ ساده‌کنندگی را از دست می‌دادیم و انتگرال‌گیری از $\vec{E} \cdot d\vec{A}$ روی سطحی به شکل مکعب بسیار مشکل می‌شد. در اینجا موضوع مهم این است که سطح گاؤسی باید طوری انتخاب شود که انتگرال‌گیری در قانون گاؤس را، هر چه بیشتر، آسان کند.

۲۴-۶ رسانای منزوی باردار

قانون گاؤس به ما کمک می‌کند که قضیهٔ مهم زیر را دربارهٔ رساناهای منزوی ثابت کنیم:

◄ هرگاه یک بار الکتریکی اضافی روی یک رسانای منزوی قرار داده شود آن بار به طور کامل روی سطح رسانا توزیع می‌شود و درون جسم رسانا هیچ بار اضافی‌ای وجود نخواهد داشت.

با توجه به اینکه بارهای همنام یکدیگر را می‌رانند، این موضوع پذیرفتنی است. می‌توان تصور کرد که با حرکت کردن بارهای افزوده شده به طرف سطح، این بارها تا می‌توانند از هم دور می‌شوند. برای نشان دادن این موضوع می‌توان از قانون گاؤس استفاده کرد.

شکل ۲۴-۹ الف، مقطع یک قطعه مس منزوی را که از نخ عایقی آویخته شده و حامل بار اضافی q است، نشان می‌دهد. یک سطح گاؤسی را درست در زیر سطح واقعی جسم رسانا (قطعه مس) در نظر می‌گیریم.

میدان الکتریکی در درون این رسانا باید صفر باشد. اگر چنین نباشد، میدان به الکترون‌های (آزاد) موجود در رسانا نیرو وارد می‌کند و در نتیجه در درون رسانا همیشه جریانی برقرار می‌شود. (یعنی، درون رسانا بار الکتریکی از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر حرکت می‌کند). معلوم است که درون رسانای منزوی این گونه جریان‌ها وجود ندارد و در نتیجه میدان الکتریکی درونی صفر است.

(میدان الکتریکی درونی در حین باردار شدن رسانا ظاهر می‌شود. اما بار افزوده شده به رسانا چنان خود را به سرعت توزیع می‌کند که میدان الکتریکی درونی برایند ـ مجموع برداری میدان‌های الکتریکی ناشی از تمام بارها، چه در درون و چه در بیرون ـ صفر می‌شود. در این حالت حرکت بارها متوقف می‌شود، زیرا نیروی برایند وارد بر هر بار صفر است و در نتیجه بارها در حال تعادل الکتروستاتیکی قرار می‌گیرند).

اگر $\vec{E}$ در همه جای درون فلز رسانای مس صفر باشد، در تمام نقاط روی سطح گاؤسی هم باید صفر باشد، زیرا این سطح اگر چه به سطح رسانا نزدیک است قطعاً در درون رسانا قرار دارد. از این گفته‌ها چنین بر می‌آید که شار گذرنده از سطح‌گاؤسی صفر است. در نتیجه، بنا به قانون گاؤس بار خالص درون سطح گاؤسی نیز باید صفر باشد. بنابراین، بار اضافی چون درون سطح گاؤسی وجود ندارد، پس باید در بیرون سطح، یعنی بر روی سطح واقعی رسانا قرار داشته باشد.

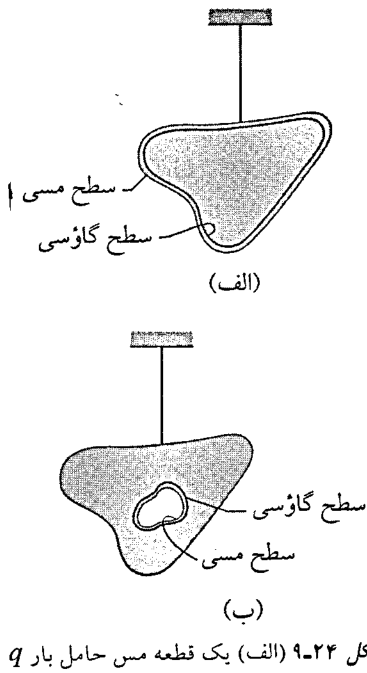
رسانای منزوی دارای کاواک

شکل ۲۴-۹ ب، همان رسانای آویخته شده را نشان می‌دهد که کاواکی به طور کامل درون آن وجود دارد. شاید پذیرفتنی باشد که فرض کنیم وقتی برای تشکیل شدن کاواک قطعه‌ای از رسانای از نظر الکتریکی خنثی را جدا می‌کنیم، توزیع بار یا نقش میدان الکتریکی موجود در شکل ۲۴-۹ الف را تغییر نمی‌دهیم. باز هم برای اثبات کمی این موضوع باید به قانون گاؤس رجوع کنیم.

در پیرامون کاواک و در نزدیکی دیوارهای آن، اما در درون جسم رسانا، یک سطح گاؤسی رسم می‌کنیم. چون درون رسانا، داریم $\vec{E} = 0$، هیچ شاری از این سطح گاؤسی جدید نمی‌گذرد. بنابراین، طبق قانون گاؤس این سطح هیچ بار خالصی را نمی‌تواند محصور کند و نتیجه می‌گیریم که در روی دیوارهای کاواک هیچ باری وجود ندارد؛ همان طور که شکل ۲۴-۹ الف نشان می‌دهد، تمام بار اضافی روی سطح خارجی رسانا باقی می‌ماند.

از میان برداشتن رسانا

فرض کنید بارهای اضافی روی سطح رسانا را به طریقی سحرآمیز، مثلاً با ترتیب دادن آنها به صورت یک روکش نازک پلاستیکی، در جای خود «ثابت» کنیم و آنگاه رسانا را به طور کامل برداریم. این کار هم‌ارز است با



شکل ۲۴-۹ (الف) یک قطعه مس حامل بار q از نخ عایقی آویخته شده است. یک سطح گاؤسی در داخل فلز و درست در زیر سطح واقعی رسم شده است. (ب) در این حالت قطعه مس دارای یک کاواک است. یک سطح گاؤسی در درون فلز و نزدیک به سطح کاواک قرار دارد.

این که کاواک شکل ۲۴ـ۹ ب را آن قدر بزرگ کنیم تا تمام رسانا برداشته شود و فقط بارها باقی بمانند. در این حالت میدان الکتریکی ابداً تغییر نمی‌کند؛ میدان در درون پوستهٔ نازکی از بارها صفر است و در تمام نقاط خارجی بدون تغییر می‌ماند. این امر نشان می‌دهد که میدان الکتریکی توسط بارها به وجود می‌آید نه توسط رسانا. رسانا فقط مسیری را به وجود می‌آورد که بارها بتوانند جای خود را اشغال کنند.

میدان الکتریکی خارجی

دیدیم که بار الکتریکی افزوده شده به رسانای منزوی به طور کامل در سطح رسانا توزیع می‌شود، اما بار، به جز در رساناهای کروی، در روی سطح به طور یکنواخت توزیع نمی‌شود. به عبارت دیگر، در روی سطح غیر کروی چگالی سطحی بار σ (بار یکای سطح) از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر تغییر می‌کند. به طور کلی، این تغییرات تعیین میدان الکتریکی تولید شده توسط بارهای روی سطح را بسیار مشکل می‌کند.

با وجود این، تعیین میدان الکتریکی درست در بیرون سطح یک رسانا با استفاده از قانون گاؤس آسان است. برای انجام دادن این کار مقطع سطحی را که به قدر کافی کوچک است در نظر می‌گیریم. این کار به ما اجازه می‌دهد که از خمیدگی سطح چشم پوشی و این مقطع را تخت فرض کنیم. اکنون یک سطح گاؤسی استوانه‌ای باریک، مطابق شکل ۲۴ـ۱۰، در این مقطع در نظر می‌گیریم: یکی از قاعده‌های استوانه به طور کامل در درون رسانا و قاعدهٔ دیگر به طور کامل در بیرون رسانا قرار دارد و استوانه بر سطح رسانا عمود است.

بدین ترتیب، میدان الکتریکی $\vec{E}$ درست در بیرون سطح رسانا نیز باید بر آن سطح عمود باشد. اگر چنین نباشد، میدان در سطح رسانا مؤلفه‌ای خواهد داشت که به بارهای سطحی نیرو وارد می‌کند و آنها را حرکت می‌دهد. اما این حرکت فرض ضمنی مبتنی بر وجود تعادل الکتروستاتیکی را نقض می‌کند. بنابراین، $\vec{E}$ بر سطح رسانا عمود است.

اکنون شارهای گذرندهٔ از سطح گاؤسی را با هم جمع می‌کنیم. قاعدهٔ درونی هیچ شاری از خود عبور نمی‌دهد، زیرا میدان الکتریکی در درون رسانا صفر است. سطح خمیدهٔ استوانه هم هیچ شاری عبور نمی‌دهد، چون در درون رسانا میدان الکتریکی وجود ندارد و در بیرون آن هم میدان الکتریکی با بخش خمیدهٔ سطح گاؤسی موازی است. تنها شار گذرنده از سطح گاؤسی مربوط به قاعدهٔ بیرونی است که $\vec{E}$ بر صفحهٔ آن عمود است. فرض می‌کنیم مساحت قاعده A، آن قدر کوچک است که بزرگی میدان E، در روی قاعده ثابت است. بنابراین، شار گذرنده از قاعده EA و شار خالص گذرنده از سطح گاؤسی Φ است.

بار محصور شده توسط سطح گاؤسی q_{enc}، روی سطح رسانا قرار دارد و در مساحت A توزیع شده است. اگر σ را بار یکای سطح بگیریم، q_{enc}، برابر با σA می‌شود. با قرار دادن σA به جای q_{enc} و EA به‌جای Φ رابطهٔ قانون گاؤس (معادلهٔ ۲۴ـ۶) به صورت زیر در می‌آید

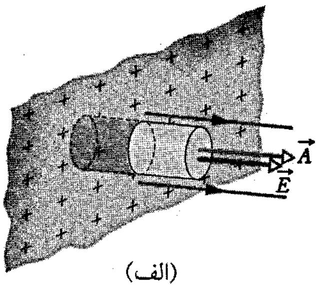
$$\varepsilon_\circ EA = \sigma A$$

که از آنجا، داریم

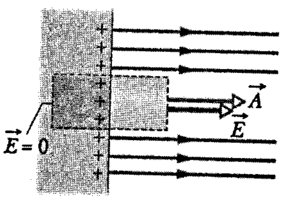
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_\circ} \qquad \text{(سطح رسانا)} \qquad (۲۴\text{ـ}۱۱) \quad \blacksquare$$

بنابراین، بزرگی میدان الکتریکی در نقطه‌ای درست در بیرون یک رسانا با چگالی بار سطحی در آن نقطه از رسانا متناسب است. اگر بار روی رسانا مثبت باشد میدان الکتریکی، مطابق شکل ۲۴ـ۱۰، به بیرون سو، و اگر منفی باشد میدان الکتریکی به درون سوی رساناست.

در شکل ۲۴ـ۱۰، خط‌های میدان در جایی از محیط پیرامون به بارهای منفی ختم می‌شوند. اگر این بارها را به رسانا نزدیک کنیم در هر نقطه از سطح رسانا چگالی بار، و در نتیجه بزرگی میدان الکتریکی، تغییر می‌کند. اما رابطهٔ میان σ و E باز هم به صورت معادلهٔ ۲۴ـ۱۱ است.



(الف)



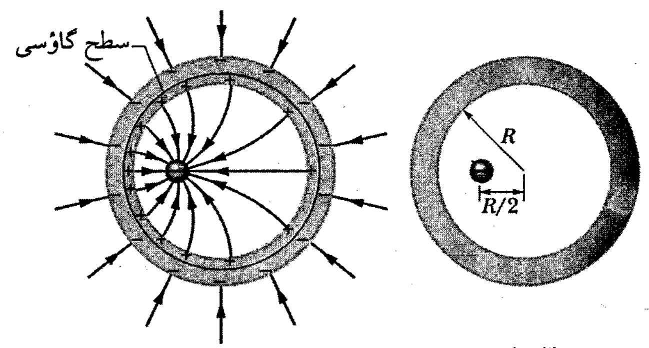
(ب)

شکل ۲۴ـ۱۰ (الف) نمای کلی، و (ب) نمای جانبی بخش کوچکی از یک رسانای منزوی بزرگ با بار مثبت اضافی بر روی آن. یک سطح گاؤسی استوانه‌ای (بسته)، به طور عمود در رسانا فرورفته و مقداری بار الکتریکی را محصور کرده است. خط‌های میدان الکتریکی از قاعدهٔ بیرونی استوانه عبور می‌کنند اما از قاعدهٔ درونی عبور نمی‌کنند. مساحت قاعدهٔ بیرونی A و بردار سطح آن $\vec{A}$ است.

مسألهٔ نمونهٔ ۲۴ـ۴

شکل ۲۴ـ۱۱ الف، سطح مقطع یک پوستهٔ فلزی کروی به شعاع درونی R را نشان می‌دهد. بار الکتریکی نقطه‌ای $-5{,}0\mu C$ به فاصلهٔ $R/2$ از مرکز پوسته قرار دارد. اگر پوسته از نظر الکتریکی خنثی باشد بارهای (القایی) موجود بر روی سطح‌های درونی و بیرونی پوسته را معین کنید. آیا این بارها به طور یکنواخت توزیع شده‌اند؟ نقش میدان در درون و بیرون پوسته چگونه است؟

حل: شکل ۲۴ـ۱۱ ب، مقطع یک سطح گاؤسی کروی را در درون فلز و درست در بیرون دیوار داخلی پوسته نشان می‌دهد. در اینجا یک **نکتهٔ کلیدی** این است که میدان الکتریکی در درون فلز (و در نتیجه در روی سطح گاؤسی درون فلز) صفر است. پس، نتیجه می‌گیریم که شار الکتریکی گذرنده از سطح گاؤسی صفر است و طبق قانون گاؤس بار خالص محصور شده توسط سطح گاؤسی نیز باید صفر باشد. بنابراین، با وجود بار نقطه‌ای $-5{,}0\mu C$ در درون پوسته، باید بار الکتریکی $+5{,}0\mu C$ روی دیوار داخلی پوسته قرار داشته باشد.



شکل ۲۴ـ۱۱ مسألهٔ نمونهٔ ۲۴ـ۴. (الف) یک بار نقطه‌ای منفی در درون پوسته‌ای فلزی کروی که از نظر الکتریکی خنثی است قرار دارد. (ب) در نتیجه، روی دیوار داخلی پوسته بار مثبت به طور نایکنواخت و روی دیوار خارجی آن به مقدار مساوی بار منفی به طور یکنواخت توزیع شده است.

اگر بار نقطه‌ای در مرکز پوسته واقع شده باشد بار مثبت القا شده روی دیوار داخلی پوسته به طور یکنواخت توزیع می‌شود. اما اگر بار در بیرون سوی مرکز قرار داشته باشد توزیع بارهای مثبت، مطابق شکل ۲۴ـ۱۱ ب، به یک سمت متمایل خواهد شد، زیرا بارهای مثبت میل دارند بیشتر در روی بخشی از دیوار داخلی که به بار نقطه‌ای (منفی) نزدیکتر است، جمع شوند.

نکتهٔ کلیدی دیگر این است که چون پوسته از نظر الکتریکی خنثی است، دیوار داخلی آن به شرطی دارای بار $+5{,}0\mu C$ است که الکترون‌ها با بار کلی $-5{,}0\mu C$ از دیوار داخلی جدا شوند، به سمت دیوار خارجی حرکت کنند و در آنجا به طور یکنواخت، مطابق شکل ۲۴ـ۱۱ ب، گسترده شوند. توزیع بار منفی در سطح بیرونی به این دلیل یکنواخت است که پوسته کروی است و توزیع متمایل شده به یک سمت بار مثبت روی دیوار داخلی، نمی‌تواند در پوسته میدان الکتریکی‌ای تولید کند که بتواند بر توزیع بار روی دیوار داخلی مؤثر باشد.

در شکل ۲۴ـ۱۱ ب، نقش تقریبی خط‌های میدان در درون و بیرون پوسته نشان داده شده است. تمام خط‌های میدان پوسته و بار نقطه‌ای را به طور عمود قطع می‌کنند. در درون پوسته نقش خط‌های میدان به خاطر نایکنواخت بودن توزیع بار مثبت به یک سمت متمایل شده است. در بیرون پوسته نقش خط‌های میدان چنان است که گویی بار نقطه‌ای در مرکز قرار دارد و پوسته حذف شده است. در واقع، این موضوع به محل قرار گرفتن بار نقطه‌ای در درون پوسته بستگی ندارد.

> **خودآزمایی ۴:** گلوله‌ای با بار الکتریکی $-50e$ در مرکز یک کرهٔ فلزی توخالی با بار الکتریکی خالص $-100e$ ، قرار دارد. بار الکتریکی روی (الف) سطح درونی پوسته و (ب) سطح بیرونی پوسته، چیست؟

۲۴ـ۷ کاربرد قانون گاؤس: تقارن استوانه‌ای

شکل ۲۴ـ۱۲، بخشی از یک میلهٔ پلاستیکی استوانه‌ای بی‌نهایت دراز با چگالی خطی بار مثبت یکنواخت λ را نشان می‌دهد. می‌خواهیم رابطهٔ مربوط به بزرگی میدان الکتریکی $\vec{E}$ را در فاصلهٔ r از محور میله پیدا کنیم.

سطح گاؤسی باید با تقارن موجود در مسأله، که استوانه‌ای است، سازگار باشد. استوانه‌ای هم محور با میله به شعاع r و طول h انتخاب می‌کنیم. سطح گاؤسی بسته باید به گونه‌ای اختیار شود که شامل دو قاعدهٔ استوانه نیز باشد.

اکنون، فرض کنید بدون آنکه متوجه شوید شخصی میلهٔ پلاستیکی را حول محور طولی‌اش بچرخاند یا میله را سر و ته کند. وقتی دوباره به میله نگاه می‌کنید نمی‌توانید هیچ‌گونه تغییری در آن ببینید. با توجه به این تقارن نتیجه می‌گیریم که تنها راستای مشخص در این مسأله خط شعاعی است. بنابراین، در تمام نقاط بخش استوانه‌ای سطح گاؤسی بردار $\vec{E}$ باید دارای بزرگی یکسان و برابر با E و در راستای شعاع به سوی بیرون (برای میلهٔ با بار مثبت) باشد.

چون محیط قاعدهٔ استوانه $2\pi r$ و ارتفاع آن h است مساحت سطح استوانه A، برابر با $2\pi rh$ است. پس، شار میدان $\vec{E}$ که از این سطح استوانه‌ای می‌گذرد برابر است با:

$$\Phi = EA\cos\theta = E(2\pi rh)\cos 0 = E(2\pi rh)$$

هیچ شاری از قاعده‌ها عبور نمی‌کند، زیرا $\vec{E}$ که در راستای شعاعی است، در هر نقطه با قاعده‌ها موازی است.

بار محصور شده در سطح گاؤسی برابر با λh است. در نتیجه، رابطهٔ قانون گاؤس، یعنی

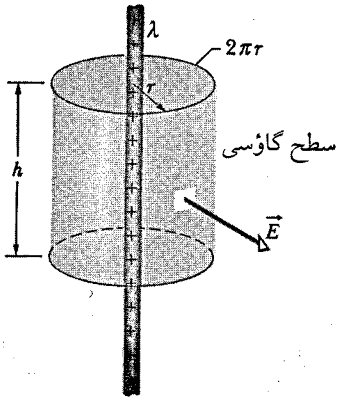
$$\varepsilon_0\Phi = q_{\text{enc}}$$

به صورت زیر در می‌آید

$$\varepsilon_0 E(2\pi rh) = \lambda h$$

که از آنجا، داریم

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \quad \text{(خط باردار)} \qquad (12\text{-}24)$$



شکل ۲۴-۱۲ نمایش یک سطح گاؤسی که به شکل استوانه‌ای بسته بخشی از یک میلهٔ پلاستیکی بسیار دراز و حامل بارالکتریکی یکنواخت را احاطه می‌کند.

این معادله، میدان الکتریکی ناشی از یک خط باردار مستقیم و بی‌نهایت دراز را در نقطه‌ای به فاصلهٔ شعاعی r از خط باردار به دست می‌دهد. $\vec{E}$ در راستای شعاع و به بیرون سو است اگر بار مثبت باشد، و در راستای شعاع به درون سو است اگر بار منفی باشد. معادلهٔ ۲۴-۱۲ مقدار تقریبی میدان حاصل از یک خط باردار متناهی را در نقاطی به دست می‌دهد که به سرهای خط باردار چندان (در مقایسه با فاصله از این خط) نزدیک نباشند.

مسألهٔ نمونهٔ ۲۴-۵

پیش از بخش مرئی یک صاعقه مرحله‌ای نامرئی وجود دارد که در آن ستونی از الکترون‌ها از ابر به طرف زمین امتداد می‌یابد. این الکترون‌ها از ابرها و از مولکول‌های هوای یونیدهٔ درون ستون ناشی می‌شوند. چگالی خطی بار λ در طول این ستون در حدود $-1 \times 10^{-3}\,\text{C/m}$ است. الکترون‌های درون این ستون به محض رسیدن به زمین به سرعت به زمین می‌جهند. در حین این جهش، برخوردهای میان الکترون‌های متحرک و هوای درون ستون منجر به بروز درخش روشنی از نور می‌شود. اگر مولکول‌های هوا در میدان الکتریکی بزرگی مانند $3 \times 10^6\,\text{N/C}$ فرو بشکنند (یونیده شوند) شعاع ستون چقدر است؟

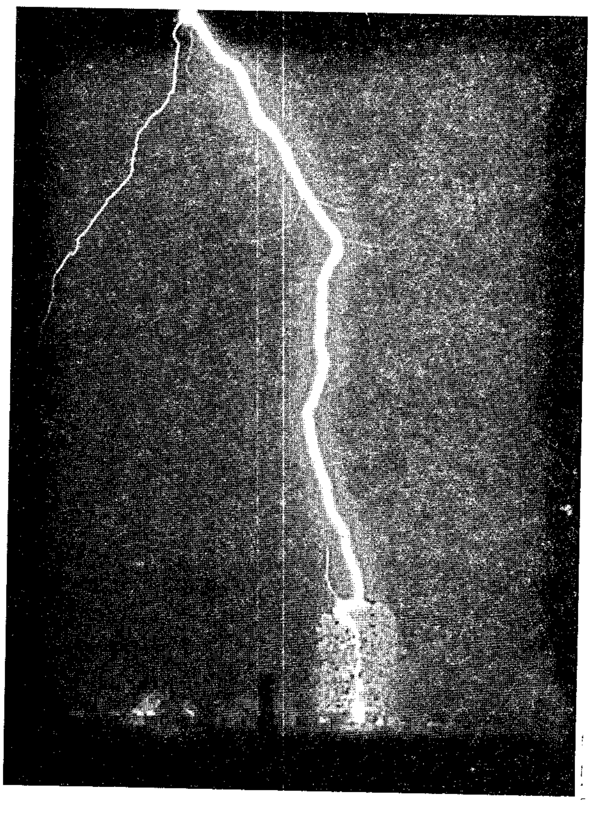
حل: در اینجا یک **نکتهٔ کلیدی** این است که این ستون مستقیم یا بی‌نهایت دراز نیست، پس می‌توان آن را تقریباً به صورت یک خط باردار، مطابق شکل ۲۴-۱۲ ، در نظر گرفت. (چون خط باردار شامل بار منفی خالص است $\vec{E}$، میدان الکتریکی ناشی از آن در راستای شعاع و به درون سو است). بنابراین، طبق معادلهٔ ۲۴-۱۲ ، بزرگی میدان E، برحسب فاصله از محور ستون باردار کاهش می‌یابد.

نکتهٔ کلیدی دیگر این است که سطح جانبی ستون باردار دارای شعاع r است. در این شعاع بزرگی میدان $\vec{E}$ برابر با $3 \times 10^6\,\text{N/C}$ است، زیرا مولکول‌های هوا در درون این شعاع یونیده می‌شوند و مولکول‌های دورتر چنین وضعیتی ندارند. با حل کردن معادلهٔ ۲۴-۱۲ نسبت به r و جانشانی داده‌های معلوم شعاع ستون به دست می‌آید:

$$r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 E}$$

$$r = \frac{1 \times 10^{-3}\,\text{C/m}}{(2\pi)(8{,}85 \times 10^{-12}\,\text{C}^2/\text{N.m}^2)(3 \times 10^6\,\text{N/C})} \Rightarrow$$

$$r = 6\,\text{m} \qquad \text{(پاسخ)}$$



شکل ۲۴-۱۳ صاعقه به یک درخت چنار ۲۰ متری اصابت می‌کند. چون درخت خیس بوده است، بیشتر بارهای الکتریکی از طریق آب موجود در آن جریان پیدا می‌کنند و درخت بدون آسیب می‌ماند.

(شعاع بخش نورانی صاعقه کوچکتر، و شاید در حدود $5\,\text{m}$ر۰ ، باشد. با توجه به شکل ۲۴ـ۱۳ می‌توانید پهنای این ستون را برآورد کنید). اگر چه شعاع ستون ممکن است فقط $6\,\text{m}$ باشد، اما تصور نکنید اگر در فاصله‌ای بیش از این مقدار نسبت به محل مرکز صاعقه قرار گرفته باشید در امان می‌مانید. چون الکترون‌هایی که به زمین می‌پرند در سطح زمین حرکت می‌کنند. این جریان‌های زمینی خطرناک و کشنده‌اند. شکل ۲۴ـ۱۴ شاهدی بر وجود جریان‌های زمینی است.



شکل ۲۴ـ۱۴ جریان‌های زمینی ناشی از صاعقه چمن سبز زمین گلف را سوزانده و خاک را نمایان کرده است.

۲۴ـ۸ کاربرد قانون گاؤس: تقارن صفحه‌ای

برگهٔ نارسانا

شکل ۲۴ـ۱۵ ، بخشی از یک برگهٔ نارسانای نامتناهی و نازک با چگالی سطحی بار (مثبت) یکنواخت σ را نشان می‌دهد. برگه‌ای از پلاستیک نازک، که برای بسته‌بندی به کار می‌رود، و یک طرف آن به طور یکنواخت باردار شده است، می‌تواند مدلی ساده از این مثال باشد. می‌خواهیم میدان الکتریکی $\vec{E}$ را در فاصلهٔ r واقع در جلو این برگه پیدا می‌کنیم.

سطح گاؤسی مناسب برای این کار، استوانهٔ بسته‌ای با مساحت قاعدهٔ A است که، مطابق شکل، به طور عمود در برگه فرورفته است. با توجه به تقارن، بردار $\vec{E}$ بر برگه و در نتیجه بر قاعده‌ها عمود است. علاوه بر این، چون بار مثبت است $\vec{E}$ به برون سوی برگه است. در نتیجه، خط‌های میدان الکتریکی از دو قاعدهٔ گاؤسی خارج می‌شوند. چون خط‌های میدان سطح خمیده را قطع نمی‌کنند از این بخش سطح گاؤسی هیچ شاری عبور نمی‌کند. پس، $\vec{E}\cdot d\vec{A}$ برابر با EdA است و با استفاده از قانون گاؤس، یعنی

$$\varepsilon_\circ \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{\text{enc}}$$

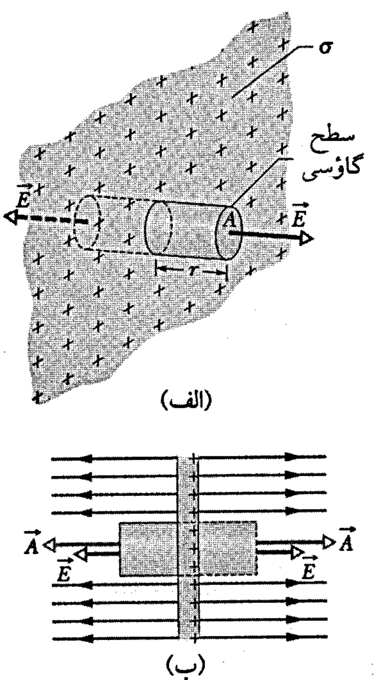
نتیجه می‌گیریم

$$\varepsilon_\circ (EA + EA) = \sigma A$$

که در آن σA بار محصور شده در سطح گاؤسی است. در نتیجه، داریم

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_\circ} \qquad \text{(برگهٔ باردار)} \qquad (۲۴ـ۱۳)$$

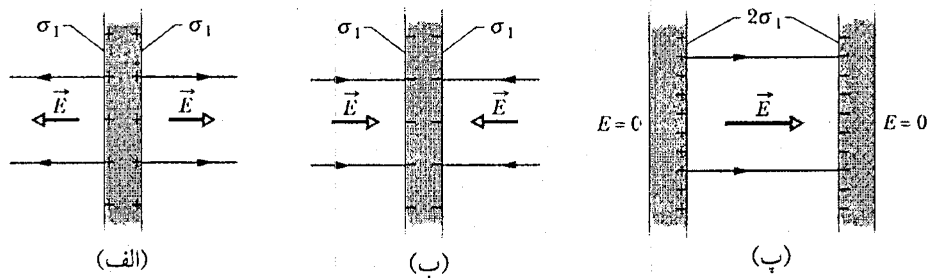
چون برگه‌ای نامتناهی با چگالی بار یکنواخت را در نظر گرفته‌ایم این نتیجه برای هر نقطه‌ای به فاصلهٔ متناهی از برگه معتبر است. معادلهٔ ۲۴ـ۱۳ با معادلهٔ ۲۳ـ۲۷ که با انتگرال‌گیری از مؤلفه‌های میدان الکتریکی ناشی از بارهای مجزا به دست آمده سازگار است. (ضمن توجه به انتگرال‌گیری وقت‌گیر و چالش‌انگیز، دقت کنید چگونه توانستیم به راحتی همان نتیجه را با استفاده از قانون گاؤس به دست آوریم. این، یکی از دلیل‌های اختصاص دادن یک فصل کامل به این قانون است: در برخی آرایش‌های متقارن استفاده از این قانون خیلی ساده‌تر از انتگرال‌گیری از مؤلفه‌های میدان الکتریکی است).



شکل ۲۴ـ۱۵ (الف) نمای کلی و (ب) نمای جانبی بخشی از یک برگهٔ پلاستیکی نازک بسیار بزرگ که یک طرف آن با چگالی سطحی بار σ به طور یکنواخت باردار شده است. یک سطح گاؤسی استوانه‌ای بسته از برگه عبور کرده و بر آن عمود است.

دو ورق رسانا

شکل ۲۴ـ۱۶ الف، مقطع یک ورق رسانای نامتناهی نازک با بار مثبت اضافی را نشان می‌دهد. با توجه به بخش ۲۴ـ۶،



شکل ۲۴ـ۱۶ (الف) مقطع یک ورق رسانای بسیار بزرگ و نازک با بار مثبت اضافی. (ب) مقطع ورقی مشابه با بار منفی اضافی. (پ) دو ورق به صورت موازی و نزدیک به هم آرایش یافته‌اند.

می‌دانیم که این بار اضافی روی سطح ورق می‌نشیند. چون ورق نازک و بسیار بزرگ است می‌توان فرض کرد که تمام بار اضافی در روی دو وجه بزرگ آن قرار گرفته است.

اگر هیچ میدان الکتریکی خارجی بار مثبت را به ایجاد توزیع بخصوصی مجبور نکند این بار روی دو وجه ورق با چگالی سطحی بار یکنواخت σ_1 گسترده می‌شود. با توجه به معادلهٔ ۲۴ـ۱۱ معلوم است که این بار درست در بیرون ورق یک میدان الکتریکی به بزرگی $E = \sigma_1/\varepsilon_0$، تولید می‌کند. چون بار اضافی مثبت است، جهت میدان از ورق به برون سو است.

شکل ۲۴ـ۱۶ ب، مقطع ورقی مشابه با بار منفی اضافی را نشان می‌دهد که بزرگی چگالی سطحی بار روی آن نیز σ_1 است. تنها تفاوت موجود این است که در اینجا جهت میدان به درون سوی ورق است.

فرض کنید ورق‌های شکل‌های ۲۴ـ۱۶ الف و ب را به صورت موازی و نزدیک به هم قرار دهیم تا آرایش شکل ۲۴ـ۱۶ پ، به وجود آید. چون ورق‌ها رسانا هستند هنگام قرار گرفتن آنها در کنار هم بار اضافی روی یک ورق بار اضافی روی ورق دیگر را جذب می‌کند و تمام بارهای اضافی، مطابق شکل ۲۴ـ۱۶ پ، به سوی وجه‌های درونی ورق‌ها حرکت می‌کنند. اکنون روی هر وجه درونی بار دو برابر می‌شود و چگالی سطحی بار روی هر وجه درونی (که آن را σ می‌نامیم)، دو برابر σ_1 است. بنابراین، بزرگی میدان الکتریکی در هر نقطهٔ واقع در فاصلهٔ میان ورق‌ها برابر است با:

$$E = \frac{2\sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad (۲۴\text{ـ}۱۴)$$

جهت این میدان از ورق با بار مثبت، به سوی ورق با بار منفی است. از آنجا که هیچ بار اضافی روی وجه‌های بیرونی وجود ندارد میدان الکتریکی در سمت چپ و سمت راست ورق‌ها صفر است. چون هنگام نزدیک کردن ورق‌ها به یکدیگر بارهای روی آنها حرکت کرده‌اند، شکل ۲۴ـ۱۶ پ حاصل برهم نهی شکل‌های ۲۴ـ۱۶ الف و ب نیست؛ یعنی، توزیع بار دستگاه دو ورقی صرفاً مجموعه‌ای از توزیع‌های بار تک تک ورق‌ها نیست.

ممکن است تعجب کنید که چرا چنین مسأله‌های به ظاهر غیرواقعی، نظیر میدان ناشی از یک خط نامتناهی باردار، میدان ناشی از یک برگهٔ نامتناهی باردار، یا میدان ناشی از یک جفت ورق نامتناهی باردار را مطرح می‌کنیم. یکی از دلیل‌ها این است که تحلیل چنین حالت‌هایی با قانون گاؤس آسان است. اما مطلب مهم‌تر این است که تحلیل حالت‌های «نامتناهی» را با تقریب‌های خوبی می‌توان دربارهٔ بسیاری از مسأله‌های دنیای واقعی به کار برد. بنابراین، معادلهٔ ۲۴ـ۱۳ در مورد یک برگهٔ نارسانای متناهی، برای نقاطی که نسبتاً به برگه نزدیک و از لبه‌های آن نسبتاً دور باشند، کاملاً صادق است. معادلهٔ ۲۴ـ۱۴ هم در مورد یک جفت ورق‌های رسانای متناهی برای نقاطی که به لبه‌های ورق‌ها چندان نزدیک نباشند به خوبی صدق می‌کند.

مشکل لبه‌های یک برگه یا یک ورق و دقت در استفاده نکردن از لبه‌ها این است که در نزدیکی لبه‌ها از تقارن صفحه‌ای برای پیدا کردن رابطه‌های مربوط به میدان‌ها نمی‌توان استفاده کرد. در واقع، خط‌های میدان در آنجا خمیده‌اند (اثر لبه‌ای یا فریز شدن)، و توصیف میدان‌ها به طریق جبری بسیار مشکل است.

مسألهٔ نمونهٔ ۲۴ـ۶

شکل ۲۴ـ۱۷ الف، بخش‌هایی از دو برگهٔ بزرگ موازی و نارسانای شامل بار یکنواخت ثابت بر روی یک طرف هر برگه را نشان می‌دهد. بزرگی چگالی بار برای برگهٔ با بار مثبت $\sigma_{(+)} = ۶٫۸\mu C/m^۲$ و برای برگهٔ با بار منفی $\sigma_{(-)} = ۴٫۳\mu C/m^۲$ است.

میدان الکتریکی $\vec{E}$ را (الف) در سمت چپ برگه‌ها، (ب) در میان دو برگه و (پ) در سمت راست برگه‌ها، پیدا کنید.

حل: در اینجا **نکتهٔ کلیدی** این است که اگر بارها در جای خود ثابت باشند میدان الکتریکی برگه‌های شکل ۲۴ـ۱۷ الف را می‌توان چنین به دست آورد: (۱) پیدا کردن میدان هر برگه به شرط منزوی بودن برگه، و (۲) جمع کردن میدان‌های برگه‌های منزوی به طور جبری، طبق اصل برهم نهی. (میدان‌ها را می‌توان به طور جبری با هم جمع کرد، چون با هم موازی‌اند). با توجه به معادلهٔ ۲۴ـ۱۳ ، $E_{(+)}$، بزرگی میدان الکتریکی ناشی از برگهٔ مثبت در هر نقطه چنین به دست می‌آید:

$$E_{(+)} = \frac{\sigma_{(+)}}{۲\varepsilon_۰} = \frac{۶٫۸ \times ۱۰^{-۶} C/m^۲}{(۲)(۸٫۸۵ \times ۱۰^{-۱۲} C^۲/N.m^۲)}$$

$$E_{(+)} = ۳٫۸۴ \times ۱۰^۵ N/C$$

به همین ترتیب، $E_{(-)}$، بزرگی میدان الکتریکی ناشی از برگهٔ منفی در هر نقطه برابر است با:

$$E_{(-)} = \frac{\sigma_{(-)}}{۲\varepsilon_۰} = \frac{۴٫۳ \times ۱۰^{-۶} C/m^۲}{(۲)(۸٫۸۵ \times ۱۰^{-۱۲} C^۲/N.m^۲)}$$

$$E_{(-)} = ۲٫۴۳ \times ۱۰^۵ N/C$$

شکل ۲۴ـ۱۷ ب، نمودار میدان‌های حاصل را در سمت چپ برگه‌ها (L)، میان دو برگه (B)، و در سمت راست برگه‌ها (R) نشان می‌دهد.

در این سه ناحیه میدان‌های برایند با استفاده از اصل برهم نهی به دست می‌آیند. در سمت چپ برگه‌ها بزرگی میدان برابر است با:

$$E_L = E_{(+)} - E_{(-)} = ۳٫۸۴ \times ۱۰^۵ N/C - ۲٫۴۳ \times ۱۰^۵ N/C \Rightarrow$$

$$E_L = ۱٫۴ \times ۱۰^۵ N/C \qquad \text{(پاسخ)}$$

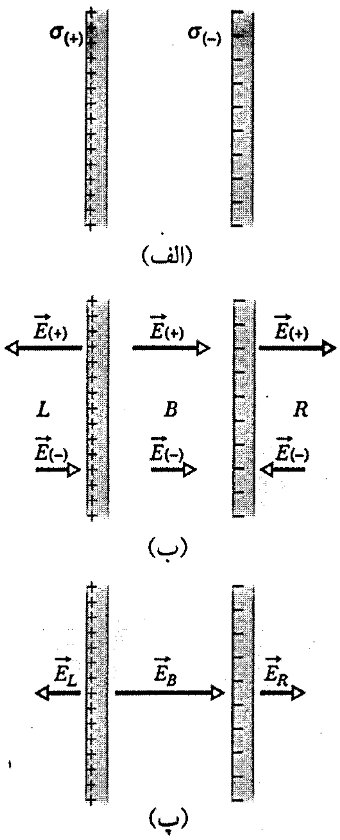
چون $E_{(+)}$ از $E_{(-)}$ بزرگتر است، در این ناحیه جهت میدان الکتریکی برایند $\vec{E}_L$، مطابق شکل ۲۴ـ۱۷ پ ، به سمت چپ است. در سمت راست برگه‌ها بزرگی میدان الکتریکی $\vec{E}_R$ همان اندازه است، اما جهتش مطابق شکل ۲۴ـ۱۷ پ، به سمت راست است.

در میان دو برگه دو میدان با هم جمع می‌شوند و داریم

$$E_B = E_{(+)} + E_{(-)} = ۳٫۸۴ \times ۱۰^۵ N/C + ۲٫۴۳ \times ۱۰^۵ N/C \Rightarrow$$

$$E_B = ۶٫۳ \times ۱۰^۵ N/C \qquad \text{(پاسخ)}$$

جهت میدان الکتریکی $\vec{E}_B$ به سمت راست است.



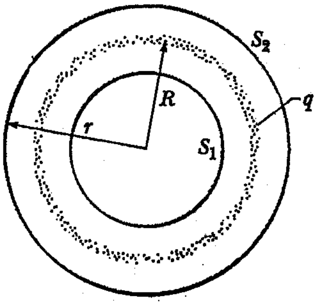
شکل ۲۴ـ۱۷ مسألهٔ نمونهٔ ۲۴ـ۶. (الف) مقطع دو برگهٔ نارسانای بزرگ و موازی، که روی یک طرف هر برگه بار الکتریکی به طور یکنواخت قرار داده شده است. (ب) نمودار میدان‌های الکتریکی ناشی از هر برگهٔ باردار به طور مجزا. (پ) نمودار میدان برایند ناشی از هر دو برگهٔ باردار، که با استفاده از اصل برهم نهی به دست آمده است.

۲۴ـ۹ کاربرد قانون گاؤس: تقارن کروی

در اینجا می‌خواهیم دو قضیه‌ای را که در بخش ۲۲ـ۴ بدون اثبات بیان کردیم، با استفاده از قانون گاؤس ثابت کنیم:

◄ یک پوستهٔ کروی با بار الکتریکی یکنواخت ذرهٔ باردار واقع در بیرون پوسته را چنان جذب یا دفع می‌کند که گویی تمام بار پوسته در مرکز آن متمرکز شده است.

◀ یک پوستهٔ کروی با بار الکتریکی یکنواخت به ذرهٔ باردار واقع در درون پوسته هیچ نیروی الکتروستاتیکی‌ای وارد نمی‌کند.



شکل ۲۴ـ۱۸ مقطع یک پوستهٔ کروی نازک، که روی آن بار کل q به طور یکنواخت توزیع شده است. مقطع‌های دو سطح گاؤسی S_1 و S_2 نیز نشان داده شده‌اند. سطح S_2 پوسته را محصور کرده و سطح S_1 فقط بخشی از فضای خالی درونی پوسته را محصور کرده است.

شکل ۲۴ـ۱۸، یک پوستهٔ کروی با بار q و به شعاع R و دو سطح گاؤسی هم مرکز S_1 و S_2 را نشان می‌دهد. اگر از روش به کار رفته در بخش ۲۴ـ۵ استفاده کنیم و قانون گاؤس را برای سطح S_2 به ازای $r \geq R$ به کار ببریم، به نتیجهٔ زیر می‌رسیم

(۲۴ـ۱۵) $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$ (پوستهٔ کروی، میدان به ازای $r \geq R$) ■

این، همان میدانی است که توسط q، بار نقطه‌ای واقع در مرکز پوستهٔ باردار تولید می‌شود. بنابراین، یک پوستهٔ با بار q به ذرهٔ باردار واقع در بیرون پوسته همان نیرویی را وارد می‌کند که q، بار نقطه‌ای واقع در مرکز پوسته وارد می‌کند. به این ترتیب، قضیهٔ اول پوسته ثابت می‌شود.

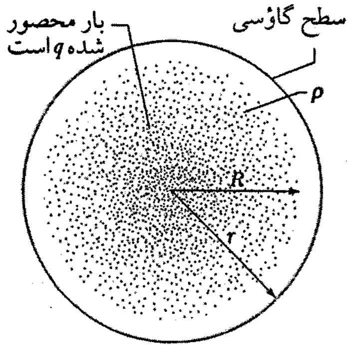
در مورد سطح S_1 که در آن، داریم $r < R$، با استفاده از قانون گاؤس به سادگی نتیجه می‌گیریم که:

(۲۴ـ۱۶) $E = 0$ (پوستهٔ کروی، میدان به ازای $r < R$) ■

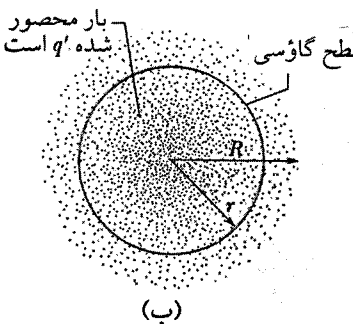
چون هیچ باری در این سطح گاؤسی محصور نشده است. بنابراین، اگر یک ذرهٔ باردار در پوسته محصور شود پوسته هیچ نیروی الکتروستاتیکی برایندی به آن وارد نمی‌کند. این موضوع قضیهٔ دوم پوسته را ثابت می‌کند.

هر گونه توزیع بار متقارن کروی مانند شکل ۲۴ـ۱۹، می‌تواند از درون هم قرار گرفتن چنین پوسته‌های کروی هم مرکز ساخته شود. برای استفاده از دو قضیهٔ پوسته، مقدار چگالی حجمی بار ρ برای هر پوسته باید ثابت باشد، اما نیازی نیست که مقدار آن از پوسته‌ای به پوستهٔ دیگر یکسان بماند. بنابراین، برای کل توزیع بار چگالی حجمی ρ می‌تواند بر حسب r، یعنی برحسب فاصلهٔ شعاعی از مرکز، تغییر کند. به این ترتیب، اثر توزیع بار را می‌توان «پوسته به پوسته» بررسی کرد.

در شکل ۲۴ـ۱۹ الف، به ازای $r > R$، تمام بار الکتریکی در درون یک سطح گاؤسی قرار دارد. در این حالت بار الکتریکی در سطح گاؤسی میدانی به وجود می‌آورد که گویی از یک بار نقطه‌ای واقع در مرکز حاصل شده است. در این مورد معادلهٔ ۲۴ـ۱۵ صادق است.



(الف)



(ب)

شکل ۲۴ـ۱۹ نقطه‌ها نمایشگر توزیع متقارن کروی بار به شعاع R هستند. چگالی حجمی بار ρ، فقط تابعی از فاصلهٔ نقاط تا مرکز است. این شیء باردار رسانا نیست و بنا به فرض بارها در جای خود ثابت نگه داشته شده‌اند. (الف) مقطع یک سطح گاؤسی هم مرکز به‌ازای $r > R$. (ب) مقطع یک سطح گاؤسی هم مرکز به ازای $r < R$.

شکل ۲۴ـ۱۹ ب، یک سطح گاؤسی را به ازای $r < R$ نشان می‌دهد. برای تعیین میدان الکتریکی در نقاط روی سطح گاؤسی مجموعهٔ دو پوستهٔ باردار ـ یکی در درون سطح گاؤسی و دیگری در بیرون آن ـ را در نظر می‌گیریم. بنا به معادلهٔ ۲۴ـ۱۶ بار واقع در بیرون سطح گاؤسی هیچ میدان الکتریکی برایندی روی سطح گاؤسی به وجود نمی‌آورد. طبق معادلهٔ ۲۴ـ۱۵ بار محصور شده توسط سطح گاؤسی میدانی ایجاد می‌کند که گویی از یک بار محصور شدهٔ متمرکز در مرکز حاصل شده است. اگر این بار محصور شده q' باشد، معادلهٔ ۲۴ـ۱۵ را می‌توان به صورت زیر نوشت

(۲۴ـ۱۷) $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'}{r^2}$ (توزیع کروی، میدان به ازای $r \leq R$)

اگر توزیع بار کل محصور شدهٔ q تا شعاع R یکنواخت باشد در آن صورت، بار محصور شدهٔ q' تا شعاع r از شکل ۲۴ـ ۱۹ب، با q متناسب، است:

$$\frac{\text{بار کل}}{\text{حجم کل}} = \frac{r \text{ بار محصور شده تا فاصلهٔ}}{r \text{ حجم محصور شده تا فاصلهٔ}} \Rightarrow$$

(۲۴ـ۱۸)
$$\frac{q'}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

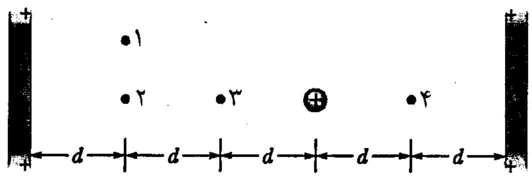
در نتیجه، داریم

(۲۴ـ۱۹)
$$q' = q\,\frac{r^3}{R^3}$$

با جانشانی این مقدار در معادله ۲۴ـ۱۷، داریم

(۲۴ـ۲۰) $E = \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right)r$ (بار یکنواخت، میدان به ازای $r \leq R$) ■

خودآزمایی ۵: شکل زیر، دو برگهٔ بزرگ موازی و نارسانا با چگالی‌های سطحی بار (مثبت) یکنواخت و یک کره با چگالی حجمی بار (مثبت) یکنواخت را نشان می‌دهد. چهار نقطهٔ شماره گذاری شده را با توجه به بزرگی میدان الکتریکی برایند در آن نقطه، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



مرور و خلاصهٔ مطالب فصل

قانون گاؤس قانون گاؤس و قانون کولن، اگر چه به صورت متفاوتی بیان می‌شوند، روشهای هم ارزی برای توصیف رابطهٔ میان بار و میدان الکتریکی در حالت‌های استاتیک هستند. رابطهٔ قانون گاؤس چنین است:

$$\varepsilon_0 \Phi = q_{enc} \quad \text{(قانون گاؤس)} \quad (۶\text{-}۲۴)$$

که در آن q بار خالص درون یک سطح بستهٔ تصوری (**سطح گاؤسی**) و Φ **شار** خالص میدان الکتریکی گذرنده از سطح است:

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad \text{(شار الکتریکی گذرنده از یک سطح گاؤسی)} \quad (۴\text{-}۲۴)$$

قانون کولن را می‌توان به راحتی از قانون گاؤس نتیجه گرفت.

کاربردهای قانون گاؤس با استفاده از قانون گاؤس، و در برخی حالت‌ها، با توجه به دلایل تقارن، چندین نتیجهٔ مهم مربوط به وضعیت‌های الکتروستاتیکی را می‌توان به دست آورد، که نتیجه‌های زیر از آن جمله‌اند:

۱. بار اضافی روی یک رسانا، تماماً روی سطح خارجی رسانا قرار می‌گیرد.

۲. میدان الکتریکی خارجی در نزدیکی سطح یک رسانای باردار، بر سطح عمود و بزرگی‌اش برابر است با:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad \text{(سطح رسانا)} \quad (۱۱\text{-}۲۴)$$

در درون رسانا، داریم $E = 0$.

۳. میدان الکتریکی ناشی از یک خط باردار نامتناهی با چگالی خطی بار یکنواخت λ، در هر نقطه بر خط باردار عمود و بزرگی‌اش برابر است با:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \quad \text{(خط باردار)} \quad (۱۲\text{-}۲۴)$$

که در آن r فاصلهٔ نقطهٔ مورد نظر تا خط باردار است.

۴. میدان الکتریکی ناشی از یک برگهٔ نارسانای نامتناهی با چگالی سطحی بار یکنواخت σ بر سطح برگه عمود و بزرگی‌اش برابر است با:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad \text{(برگهٔ باردار)} \quad (۱۳\text{-}۲۴)$$

۵. میدان الکتریکی در بیرون یک پوستهٔ کروی به شعاع R و بار کل q، در راستای شعاع است و بزرگی‌اش برابر است با:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \quad \text{(پوستهٔ کروی، میدان به ازای } r \geq R\text{)} \quad (۱۵\text{-}۲۴)$$

در اینجا r فاصلهٔ مرکز پوسته تا نقطه‌ای است که E در آنجا اندازه‌گیری می‌شود. (در نقاط خارجی، بار به گونه‌ای رفتار می‌کند که گویی در مرکز پوسته قرار دارد). میدان در درون یک پوستهٔ کروی با بار یکنواخت دقیقاً صفر است:

$$E = 0 \quad \text{(پوستهٔ کروی، میدان به ازای } r < R\text{)} \quad (۱۶\text{-}۲۴)$$

۶. میدان الکتریکی در درون یک کرهٔ با بار یکنواخت، در راستای شعاع است و بزرگی‌اش برابر است با:

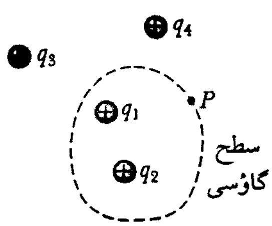
$$E = \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right) r \quad (۲۰\text{-}۲۴)$$

پرسش‌ها

۱. بردار یک سطح به صورت $\vec{A} = (2\hat{i} + 3\hat{j})\,\text{m}^2$ است. شار میدان الکتریکی گذرنده از این سطح در حالتی که بردار میدان به صورت (الف) $\vec{E} = 4\hat{i}\,\text{N/C}$ و (ب) $\vec{E} = 4\hat{k}\,\text{N/C}$ باشد، چیست؟

۲. مقدار انتگرال $\int dA$ برای (الف) مربعی به ضلع a، (ب) دایره‌ای به شعاع r، و (پ) سطح جانبی استوانه‌ای به طول h و شعاع r، چیست؟

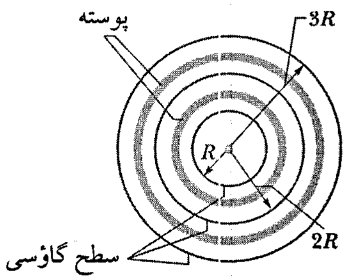
۳. در شکل ۲۴-۲۰، یک سطح گاؤسی دو ذره از چهار ذرهٔ باردار مثبت را



شکل ۲۴-۲۰ پرسش ۳.

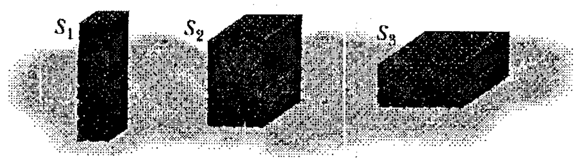
محصور کرده است. (الف) کدام یک از ذرات در میدان الکتریکی در نقطهٔ P واقع در روی سطح دخالت دارند؟ (ب) کدام شار خالص میدان الکتریکی گذرنده از این سطح (در صورت وجود)، بزرگتر است: آنکه از بارهای q_1 و q_2 ناشی می‌شود یا آنکه از تمام چهار بار ناشی می‌شود؟

۴. شکل ۲۴ـ۲۱ ، مقطع یک گلولهٔ فلزی واقع در مرکز دو پوستهٔ فلزی کروی، و سه سطح گاؤسی کروی به شعاع‌های R ، $2R$ و $3R$ را با مرکز مشترک نشان می‌دهد. بارهای روی هر سه شیء یکنواخت و عبارت‌اند از: گلوله، Q ؛ پوستهٔ کوچکتر، $3Q$ ؛ پوستهٔ بزرگتر، $5Q$. این سطح‌های گاؤسی را با توجه به بزرگی میدان الکتریکی در هر نقطه از سطح، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



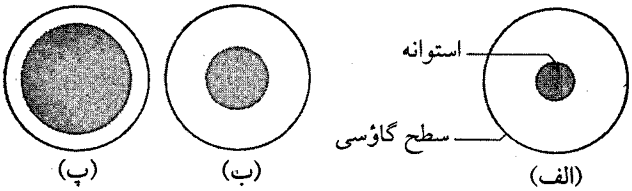
شکل ۲۴ـ۲۱ پرسش ۴.

۵. شکل ۲۴ـ۲۲ ، سه سطح گاؤسی را نشان می‌دهد که نصف هر کدام در یک ورق فلزی ضخیم و بزرگ با چگالی سطحی بار یکنواخت فرورفته است. سطح گاؤسی S_1 دارای بلندترین ارتفاع و کوچکترین قاعدهٔ مربعی شکل است؛ سطح S_3 دارای کوتاهترین ارتفاع و بزرگترین قاعدهٔ مربعی شکل است؛ و S_2 دارای مشخصات متوسط است. این سطح‌ها را با توجه به (الف) بار محصور شده توسط آنها، (ب) بزرگی میدان الکتریکی در نقاط واقع بر قاعدهٔ بالایی آنها، (پ) شار الکتریکی خالص گذرنده از قاعدهٔ بالایی آنها، (ت) شار الکتریکی خالص گذرنده از قاعدهٔ پایینی آنها، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



شکل ۲۴ـ۲۲ پرسش ۵.

۶. شکل ۲۴ـ۲۳ ، مقطع سه استوانه را نشان می‌دهد که هر کدام دارای بار یکنواخت Q هستند. هر یک از استوانه‌ها را یک سطح گاؤسی هم مرکز در بر می‌گیرد و شعاع هر سه سطح یکسان است. این سطح‌های گاؤسی را



شکل ۲۴ـ۲۳ پرسش ۶.

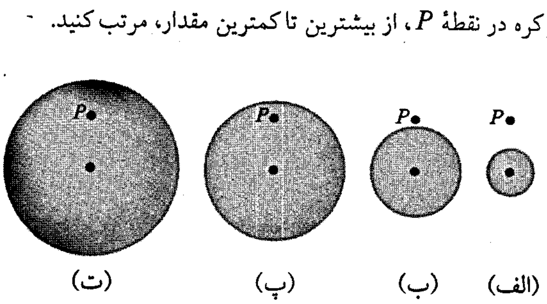
با توجه به میدان الکتریکی در هر نقطه از سطح، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.

۷. سه برگهٔ نارسانای نامتناهی با چگالی‌های سطحی بار یکنواخت σ، 2σ و 3σ در آرایشی مطابق دو برگهٔ شکل ۲۴ـ۱۷ الف، با هم موازی‌اند. اگر بزرگی میدان الکتریکی $\vec{E}$ تولید شده توسط این آرایش در یک ناحیه $E = 0$ و در ناحیهٔ دیگر $E = 2\sigma/\varepsilon_0$ باشد، ترتیب این برگه‌ها از چپ به راست چگونه است؟

۸. یک گلولهٔ کوچک باردار درون یک پوستهٔ کروی توخالی به شعاع R قرار دارد. در اینجا در سه حالت بارهای خالص روی گلوله و پوسته، به ترتیب، عبارت‌اند از: (۱) $+4q$ ، ۰ ؛ (۲) $-6q$ ، $+10q$ ؛ (۳) $+16q$ ، $-12q$. این حالت‌ها را با توجه به بار روی (الف) سطح درونی پوسته و (ب) سطح بیرونی پوسته، از مثبت‌ترین مقدار به پایین، مرتب کنید.

۹. در پرسش ۸ حالت‌ها را با توجه به بزرگی میدان الکتریکی (الف) در وسط شعاع پوسته و (ب) در نقطه‌ای به فاصلهٔ $2R$ از مرکز پوسته، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.

۱۰. شکل ۲۴ـ۲۴ ، چهار کره را نشان می‌دهد که بار Q به طور یکنواخت در حجم هر یک از آنها توزیع شده است. (الف) این کره‌ها را با توجه به چگالی حجمی بار آنها، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید. در ضمن، این شکل نقطهٔ P را در فاصلهٔ مساوی از مرکز هر یک از کره‌ها نشان می‌دهد. (ب) این کره‌ها را با توجه به بزرگی میدان الکتریکی حاصل از هر کره در نقطهٔ P ، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



شکل ۲۴ـ۲۴ پرسش ۱۰.

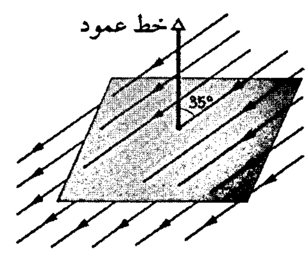
تمرین‌ها و مسأله‌ها

بخش ۲۴ـ۲ شار

۱ ت. در یک نهر آب به پهنای $w = ۳٫۲۲\text{m}$ و عمق $d = ۱٫۰۴\text{m}$، آب با تندی $۰٫۲۰۷\text{m/s}$ جریان دارد. شار جرمی آبی که از یک سطح تصوری عبور می‌کند، برابر است با حاصل‌ضرب چگالی آب ($۱۰۰۰\text{kg/m}^۳$) در شار حجمی گذرنده از سطح. مطلوب است تعیین شار جرمی گذرنده از سطح‌های تصوری زیر: (الف) سطحی به مساحت wd، به طور کامل در آب قرار دارد و بر راستای جریان عمود است؛ (ب) سطحی به مساحت $۳wd/۲$، که از آن مقدار wd در آب قرار دارد و بر راستای جریان عمود است؛ (پ) سطحی به مساحت $wd/۲$، که کاملاً در آب قرار دارد و بر راستای جریان عمود است؛ (ت) سطحی به مساحت wd، که نصف آن در آب و نصف دیگر در بیرون قرار دارد و بر راستای جریان عمود است؛ (ث) سطحی به مساحت wd، که تمام آن در آب قرار دارد و خط عمود بر آن با راستای جریان زاویهٔ ۳۴ درجه می‌سازد.

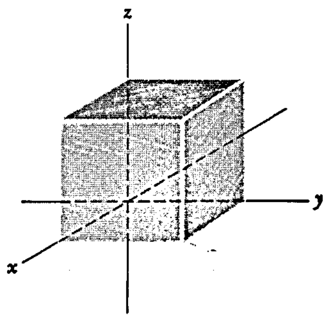
بخش ۲۴ـ۳ شار میدان الکتریکی

۲ ت. طول هر ضلع مربع نشان داده شده در شکل ۲۴ـ۲۵ برابر با $۳٫۲\text{mm}$ است. این سطح در میدان الکتریکی یکنواختی به بزرگی $E = ۱۸۰۰\text{N/C}$ قرار دارد. زاویهٔ خط‌های میدان با خط عمود بر سطح، مطابق شکل، ۳۵ درجه است. جهت این خط عمود را «به بیرون سوی» سطح، که گویی یکی از وجه‌های یک جعبه است، در نظر بگیرید. شار الکتریکی گذرنده از سطح را حساب کنید.



شکل ۲۴ـ۲۵ تمرین ۲.

۳ ت. طول هر ضلع مکعب شکل ۲۴ـ۲۶ برابر با $۱٫۴۰\text{m}$ است و مکعب، مطابق شکل، در یک میدان الکتریکی یکنواخت قرار گرفته است. مطلوب است تعیین شار الکتریکی گذرنده از وجه سمت راست، در صورتی که بردار میدان الکتریکی برحسب نیوتون بر کولن به صورت (الف) $۶٫۰۰\hat{\text{i}}$، (ب) $-۲٫۰۰\hat{\text{j}}$، و (پ) $-۳٫۰۰\hat{\text{i}}+۴٫۰۰\hat{\text{k}}$، باشد. (ت) شار کل گذرنده از مکعب به ازای هر یک از این سه میدان چقدر است؟



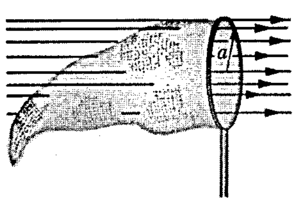
شکل ۲۴ـ۲۶ تمرین ۳ و مسأله‌های ۷ و ۱۰.

بخش ۲۴ـ۴ قانون گاؤس

۴ ت. چهار بار نقطه‌ای $۲q$، q، $-q$ و $-۲q$ در اختیار داریم. در صورت امکان، سطح بسته‌ای را بیابید که، دست‌کم، شامل بار $۲q$ (و شاید بارهای دیگر) باشد و شار الکتریکی خالص گذرنده از آن (الف) صفر، (ب) $+۳q/\varepsilon_۰$، و (پ) $-۲q/\varepsilon_۰$ باشد.

۵ ت. بار نقطه‌ای $۱٫۸\mu\text{C}$ در مرکز یک سطح گاؤسی مکعب شکل به ضلع ۵۵cm قرار دارد. شار الکتریکی خالص گذرنده از این سطح چقدر است؟

۶ ت. یک تور پروانه‌گیری، مطابق شکل ۲۴ـ۲۷، در میدان الکتریکی یکنواخت E قرار دارد. صفحهٔ طوقهٔ تور که دایره‌ای به شعاع a است، بر میدان عمود است. شار الکتریکی گذرنده از تور را پیدا کنید.



شکل ۲۴ـ۲۷ تمرین ۶.

۷ م. مطلوب است تعیین شار خالص گذرنده از مکعب تمرین ۳ و شکل ۲۴ـ۲۶، در صورتی که بردار میدان الکتریکی به صورت (الف) $\vec{E}=۳٫۰۰y\hat{\text{j}}$ و (ب) $\vec{E} = -۴٫۰۰\hat{\text{i}} + (۶٫۰۰+۳٫۰۰y)\hat{\text{j}}$ باشد. E برحسب نیوتون بر کولن و y برحسب متر است. (پ) در هر حالت چه مقدار بار الکتریکی توسط مکعب محصور شده است؟

۸ م. وقتی در یک حمام دربسته شیر دوش را باز می‌کنیم، در اثر ریختن آب به زمین هوای حمام می‌تواند پر از یون‌های منفی شود و یک میدان الکتریکی به بزرگی ۱۰۰۰N/C در هوا به وجود آید. ابعاد حمام را $۲٫۵\text{m} \times ۳٫۰\text{m} \times ۲٫۰\text{m}$ بگیرید. در سرتاسر سطح سقف، کف و چهار

دیوار حمام میدان الکتریکی در هوا تقریباً بر سطح عمود و یکنواخت است و بزرگی آن ۶۰۰N/C است. در ضمن، فرض کنید این سطح‌ها یک سطح گاؤسی بسته در پیرامون هوای حمام تشکیل می‌دهند. (الف) چگالی حجمی بار ρ و (ب) تعداد بارهای بنیادی e در هر مترمکعب هوای حمام چقدر است؟

۹ م. به طور تجربی معلوم شده است که میدان الکتریکی در ناحیهٔ معینی از جوّ زمین در راستای قائم و به سمت پایین است. بزرگی میدان در ارتفاع ۳۰۰ متری، ۶۰٫۰N/C و در ارتفاع ۲۰۰ متری، ۱۰۰N/C است. مقدار بار موجود در مکعبی به ضلع ۱۰۰m را که در میان دو سطح افقی واقع در ارتفاع‌های ۲۰۰m و ۳۰۰m قرار دارد، حساب کنید. از خمیدگی زمین چشم‌پوشی کنید.

۱۰ م. در هر نقطه از سطح مکعب، نشان داده شده در شکل ۲۴ـ۲۶، میدان الکتریکی در جهت مثبت محور z است. طول هر ضلع مکعب ۳٫۰m است. میدان الکتریکی در سطح بالایی مکعب $\vec{E} = -34\,\hat{k}$ N/C و در سطح پایینی $\vec{E} = +20\,\hat{k}$ N/C است. بار خالص موجود در مکعب را معین کنید.

۱۱ م. بار نقطه‌ای q در یکی از گوشه‌های مکعبی به ضلع a قرار دارد. مقدار شار گذرنده از هر یک از وجه‌های مکعب چقدر است؟ (راهنمایی: از قانون گاؤس و خواص مربوط به تقارن استفاده کنید).

بخش ۲۴ـ۶ رسانای منزوی باردار

۱۲ ت. بزرگی میدان الکتریکی درست در بالای سطح غلتک باردار یک ماشین فوتوکپی، $2{,}3 \times 10^5$ N/C است. چگالی سطحی بار روی غلتک، با فرض رسانا بودن آن چقدر است؟

۱۳ ت. کرهٔ رسانایی به قطر ۱٫۲m دارای بار یکنواخت و چگالی سطحی بار $8{,}1\,\mu C/m^2$ است. (الف) بار خالص روی کره را پیدا کنید. (ب) شار الکتریکی کل خارج شده از سطح کره چقدر است؟

۱۴ ت. وسایل نقلیهٔ فضایی در حال عبور از کمربندهای تابشی زمین می‌توانند با تعداد قابل توجهی الکترون برخورد کنند. برخورد با این بارها ممکن است به عنصرهای الکترونیکی وسایل آسیب برساند و عملیات آنها را مختل کند. فرض کنید یک ماهوارهٔ فلزی کروی به قطر ۱٫۳m در یک دور چرخش مداری خود $2{,}4\,\mu C$ بار الکتریکی دریافت می‌کند. (الف) چگالی سطحی بار حاصل را معین کنید. (ب) بزرگی میدان الکتریکی ناشی از بار موجود در سطح را، درست در بیرون سطح ماهواره حساب کنید.

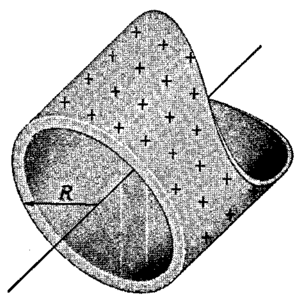
۱۵ م. یک رسانای منزوی با شکل اختیاری حامل بار خالص $+10 \times 10^{-6}$ C است. درون این رسانا کاواکی وجود دارد که در آن بار نقطه‌ای $q = +3{,}0 \times 10^{-6}$ C قرار داده شده است. بار الکتریکی، (الف) روی دیوار کاواک و (ب) روی سطح بیرونی رسانا، چقدر است؟

بخش ۲۴ـ۷ کاربرد قانون گاؤس: تقارن استوانه‌ای

۱۶ ت. (الف) غلتک ماشین فوتوکپی تمرین ۱۲ دارای ۴۲cm طول و ۱۲cm قطر است. بار الکتریکی کل روی غلتک چقدر است؟ (ب) سازندهٔ ماشین می‌خواهد نوع رومیزی آن را بسازد. این موضوع ایجاب می‌کند که ابعاد غلتک تا حد طول ۲۸cm و قطر ۸٫۰cm کوچک شود. میدان الکتریکی در سطح غلتک باید بدون تغییر بماند. بار الکتریکی روی غلتک جدید چقدر باید باشد؟

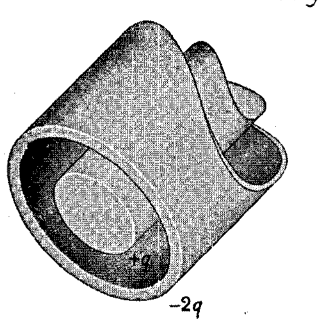
۱۷ ت. یک خط باردار نامتناهی در فاصلهٔ ۲٫۰ متری یک میدان الکتریکی $4{,}5 \times 10^4$ N/C تولید می‌کند. چگالی خطی بار را حساب کنید.

۱۸ ت. شکل ۲۴ـ۲۸، بخشی از یک لولهٔ فلزی دراز با جدار نازک و به شعاع R را نشان می‌دهد که سطح آن حامل بار λ در یکای طول است. رابطه‌های مربوط به E در نقاط واقع در فاصلهٔ r از محور لوله را، در شرایط (الف) $r > R$ و (ب) $r < R$، به دست آورید. منحنی‌های مربوط را در گسترهٔ $r = 0$ تا $r = 5{,}0$ cm، با فرض $\lambda = 2{,}0 \times 10^{-8}$ C/m و $R = 3{,}0$ cm رسم کنید. (راهنمایی: از سطح‌های گاؤسی استوانه‌ای هم محور با لولهٔ فلزی استفاده کنید).



شکل ۲۴ـ۲۸ مسألهٔ ۱۸.

۱۹ م. استوانهٔ رسانای بسیار درازی به طول L حامل بار کل $+q$ توسط پوسته‌ای استوانه‌ای رسانا (باز هم به طول L) و حامل بار کل $-2q$، مطابق شکل ۲۴ـ۲۹، احاطه شده است. با استفاده از قانون گاؤس مطلوب است تعیین (الف) میدان الکتریکی در نقاط واقع در بیرون پوستهٔ رسانا، (ب) وضعیت توزیع بار روی پوستهٔ رسانا و (پ) میدان الکتریکی در ناحیهٔ میان پوسته و استوانه.



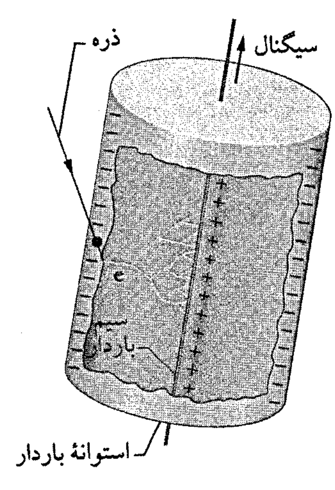
شکل ۲۴ـ۲۹ مسألهٔ ۱۹.

۲۰ م. سیم راست بسیار درازی حامل بار منفی و ثابت با چگالی خطی بار به بزرگی ۳٫۶nC/m است. این سیم به وسیلهٔ یک استوانهٔ نارسانای بار یک به شعاع بیرونی ۱٫۵cm و هم محور با سیم محصور شده است. استوانه باید در روی سطح بیرونی دارای بار مثبت با چگالی سطحی بار σ باشد تا میدان الکتریکی خارجی برایند صفر شود. مقدار لازم σ را حساب کنید.

۲۱ م. دو استوانهٔ هم محور باردار و دراز دارای شعاع‌های ۳٫۰cm و ۶٫۰cm هستند. بار الکتریکی در یکای طول استوانهٔ درونی $5.0 \times 10^{-6}\,\mathrm{C/m}$ و در یکای طول استوانهٔ بیرونی $-7.0 \times 10^{-6}\,\mathrm{C/m}$ است. مطلوب است تعیین میدان الکتریکی به ازای (الف) $r = 4.0\,\mathrm{cm}$ و (ب) $r = 8.0\,\mathrm{cm}$، که r فاصله تا محور مشترک استوانه‌هاست.

۲۲ م. یک استوانهٔ توپر نارسانا و دراز به شعاع ۴٫۰cm دارای چگالی حجمی بار نایکنواخت ρ است. ρ تابعی از فاصلهٔ شعاعی r از محور استوانه به صورت $\rho = Ar^2$ است، که در آن $A = 2.5\,\mu\mathrm{C/m^5}$. بزرگی میدان الکتریکی در فاصلهٔ شعاعی (الف) ۳٫۰cm و (ب) ۵٫۰cm، از محور استوانه چقدر است؟

۲۳ م. شکل ۲۴-۳۰، یک شمارندهٔ گایگر[1] را نشان می‌دهد که برای آشکارسازی تابش‌های یونده (تابش‌هایی که یونش اتم‌ها را سبب می‌شوند) به کار می‌رود. این شمارنده شامل یک سیم مرکزی باریک و حامل بار مثبت است که توسط یک استوانهٔ رسانای هم محور با سیم و حامل بار منفی مساوی، احاطه شده است. بنابراین، درون استوانه یک میدان الکتریکی شعاعی قوی به وجود می‌آید. استوانه حاوی گازی خنثی و کم فشار است. هرگاه یک ذرهٔ تابیده شده از طریق جدار استوانه وارد این لوله شود برخی اتم‌های گاز را یونیده می‌کند. الکترون‌های آزاد (مشخص شده با e) حاصل به سمت سیم مثبت کشیده می‌شوند. اما میدان الکتریکی آن قدر شدید است که الکترون‌ها با کسب انرژی کافی در فاصلهٔ میان برخوردهای با دیگر اتم‌های گاز این اتم‌ها را هم یونیده می‌کنند. به این ترتیب، رفته رفته الکترون‌های آزاد بیشتری تولید می‌شوند و این



شکل ۲۴-۳۰ مسألهٔ ۲۳.

فرایند تا رسیدن الکترون‌ها به سیم ادامه می‌یابد. «بهمن» الکترون‌های حاصل به وسیلهٔ سیم جمع می‌شود و سیگنالی به وجود می‌آید که برای ثبت کردن عبور ذرهٔ تابیده شدهٔ اصلی به کار می‌رود. فرض کنید شعاع سیم ۲۵μm، شعاع استوانه ۱٫۴cm و طول لوله ۱۶cm است. میدان الکتریکی در دیوار داخلی استوانه $2.9 \times 10^{4}\,\mathrm{N/C}$ است. مقدار بار مثبت روی سیم مرکزی چقدر است؟

۲۴ م. باری با چگالی خطی یکنواخت ۲٫۰nC/m در طول یک میلهٔ نارسانای باریک و دراز توزیع شده است. این میله با یک استوانهٔ رسانای توخالی دراز (با شعاع درونی ۵٫۰cm و شعاع بیرونی ۱۰cm) هم محور است. بار خالص روی استوانهٔ رسانا صفر است. (الف) بزرگی میدان الکتریکی در فاصلهٔ ۱۵cm از محور استوانه چقدر است؟ چگالی سطحی بار روی (ب) سطح درونی و (پ) سطح بیرونی استوانهٔ رسانا چیست؟

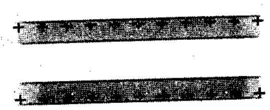
۲۵ م. سرتاسر حجم یک استوانهٔ بی‌نهایت دراز به شعاع R را بار الکتریکی به طور یکنواخت فراگرفته است. (الف) نشان دهید که در فاصلهٔ r از محور استوانه (به ازای $r < R$) میدان الکتریکی از معادلهٔ زیر به دست می‌آید.

$$E = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}$$

که در آن ρ چگالی حجمی بار است. (ب) رابطهٔ مربوط به E را وقتی که $r > R$، بنویسید.

بخش ۲۴-۸ کاربرد قانون گاؤس: تقارن صفحه‌ای

۲۶ ت. شکل ۲۴-۳۱، مقطع‌های دو برگهٔ نارسانای بزرگ و موازی با توزیع بار مثبت مساوی و چگالی سطحی بار σ را نشان می‌دهد. مطلوب است تعیین $\vec{E}$ در نقاط واقع در (الف) بالای برگه‌ها، (ب) میان دو برگه و (پ) پایین برگه‌ها.

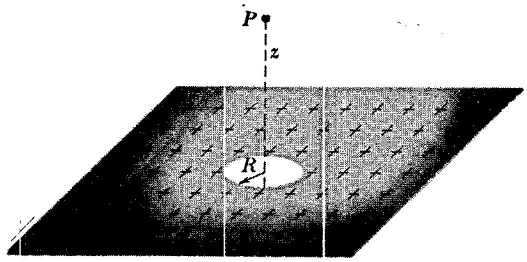


شکل ۲۴-۳۱ تمرین ۲۶.

۲۷ ت. یک ورق فلزی مربع شکل به ضلع ۸٫۰cm و ضخامت قابل چشم‌پوشی، حامل بار کل $6.0 \times 10^{-6}\,\mathrm{C}$ است. (الف) با این فرض که بار به طور یکنواخت بر روی دو وجه ورق گسترده شده است، بزرگی میدان الکتریکی E، را درست در روی مرکز ورق (مثلاً در فاصلهٔ ۰٫۵۰ میلی‌متری بالای ورق) براورد کنید. (ب) با فرض آنکه این ورق مانند یک بار نقطه‌ای است، مقدار E را در فاصلهٔ ۳۰ متری (فاصلهٔ زیاد در مقایسه با ابعاد ورق) براورد کنید.

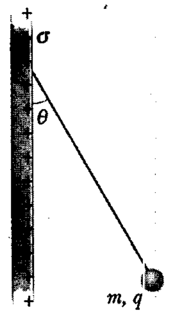
1. Geiger

۲۸ ت. یک سطح نارسانای تخت و بزرگ دارای چگالی سطحی بار یکنواخت σ است. در وسط این سطح سوراخ دایره‌ای کوچکی به شعاع R، مطابق شکل ۲۴ـ۳۲، تعبیه شده است. با چشم‌پوشی از فریز شدن خط‌های میدان در تمام لبه‌ها میدان الکتریکی را در نقطهٔ P، به فاصلهٔ z از مرکز و روی راستای محور سوراخ حساب کنید. (راهنمایی: معادلهٔ ۲۳ـ۲۶ را ببینید و از اصل برهم نهی استفاده کنید).



شکل ۲۴ـ۳۲ تمرین ۲۸.

۲۹ م. در شکل ۲۴ـ۳۳، گلولهٔ نارسانای کوچکی به جرم $m = ۱٫۰\,\text{mg}$ و بار الکتریکی $q = ۲٫۰ \times ۱۰^{-۸}\,\text{C}$ (توزیع شده در حجم به طور یکنواخت) از نخ عایقی آویخته شده است که با برگهٔ نارسانای بزرگ قائم حامل بار الکتریکی یکنواخت (سطح مقطع آن نشان داده شده است) زاویهٔ $\theta = ۳۰^\circ$ می‌سازد. با در نظر گرفتن نیروی گرانشی وارد بر گلوله و با این فرض که برگه به طور قائم در درون سو و در برون سوی صفحهٔ شکل تا فاصلهٔ دور امتداد می‌یابد، چگالی سطحی بار برگه σ، را حساب کنید.



شکل ۲۴ـ۳۳ مسألهٔ ۲۹.

۳۰ م. دو ورق نازک فلزی بزرگ، مانند شکل ۲۴ـ۱۶پ، با هم موازی و به هم نزدیک‌اند. ورق‌ها در روی وجه‌های درونی دارای بار اضافی با چگالی‌های سطحی بار با علامت مخالف و بزرگی $۷٫۰ \times ۱۰^{-۲۲}\,\text{C/m}^۲$ هستند و ورق با بار منفی در سمت چپ واقع است. بزرگی و جهت میدان الکتریکی $\vec{E}$ در (الف) سمت چپ ورق‌ها، (ب) سمت راست ورق‌ها، و (پ) میان دو ورق، چیست؟

۳۱ م. الکترونی مستقیماً به طرف مرکز یک ورق بزرگ فلزی حامل بار منفی اضافی با چگالی سطحی بار $۲٫۰ \times ۱۰^{-۶}\,\text{C/m}^۲$ پرتاب می‌شود. اگر الکترون دارای انرژی جنبشی آغازی ۱۰۰eV باشد و بخواهیم درست در لحظهٔ رسیدن به ورق متوقف شود (به خاطر نیروی دافعهٔ الکتروستاتیکی ورق) الکترون باید از چه فاصله‌ای از ورق پرتاب شود؟

۳۲ م. دو ورق فلزی بزرگ هر یک به مساحت $۱٫۰\,\text{m}^۲$ روبه‌روی هم قرار دارند. این ورق‌ها ۵٫۰cm از هم فاصله دارند و حامل بارهای مخالف و بزرگی مساوی در سطح‌های داخلی خود هستند. اگر E، بزرگی میدان الکتریکی میان ورق‌ها ۵۵N/C باشد بزرگی بار روی هر ورق چقدر است؟ از اثرهای لبه‌ای چشم‌پوشی کنید.

* ۳۳ م. برهٔ تختی به ضخامت d دارای چگالی حجمی بار یکنواخت ρ است. بزرگی میدان الکتریکی را در تمام نقاط فضای (الف) درون بره و (ب) بیرون بره، برحسب x، فاصله از صفحهٔ میانی بره، پیدا کنید.

بخش ۲۴ـ۹ کاربرد قانون گاؤس: تقارن کروی

۳۴ ت. یک بار نقطه‌ای باعث عبور شار الکتریکی $-۷۵۰\,\text{N.m}^۲/\text{C}$ از یک سطح گاؤسی کروی به شعاع ۱۰٫۰cm و به مرکز بار نقطه‌ای می‌شود. (الف) اگر شعاع سطح گاؤسی دو برابر شود، شار گذرنده از سطح چقدر خواهد شد؟ (ب) مقدار بار نقطه‌ای چقدر است؟

۳۵ ت. کرهٔ رسانایی به شعاع ۱۰cm، حامل یک بار نامعلوم است. اگر بزرگی میدان الکتریکی در فاصلهٔ ۱۵ سانتی‌متری مرکز کره $۳٫۰ \times ۱۰^۳\,\text{N/C}$ و میدان در راستای شعاع به درون سو باشد، بار خالص روی کره چقدر است؟

۳۶ ت. دو کرهٔ هم مرکز باردار دارای شعاع‌های ۱۰٫۰cm و ۱۵٫۰cm هستند. بار روی کرهٔ درونی $۴٫۰۰ \times ۱۰^{-۸}\,\text{C}$ و بار روی کرهٔ بیرونی $۲٫۰۰ \times ۱۰^{-۸}\,\text{C}$ است. میدان الکتریکی را در فاصلهٔ (الف) $r =$ ۱۲٫۰cm و (ب) $r =$ ۲۰٫۰cm از مرکز، پیدا کنید.

۳۷ ت. **ارنست رادرفورد**[1] در سال ۱۲۹۰/۱۹۱۱ مطلب زیر را در مقاله‌ای نوشته است. برای آنکه دربارهٔ نیروهای لازم به منظور منحرف کردن یک ذرهٔ آلفا تحت زاویهٔ بزرگ تصوری در ذهن داشته باشید، اتمی را در نظر بگیرید که شامل بار الکتریکی نقطه‌ای مثبت Ze در مرکز باشد. این بار مثبت با بار الکتریکی منفی $-Ze$ که در درون کره‌ای به شعاع R به طور یکنواخت توزیع شده، احاطه شده است. میدان الکتریکی E... در هر نقطهٔ واقع در درون اتم و به فاصلهٔ r از مرکز آن برابر است با:

$$E = \frac{Ze}{۴\pi\varepsilon_0}\left(\frac{۱}{r^۲} - \frac{r}{R^۳}\right)$$

این رابطه را تحقیق کنید.

۳۸ ت. معادلهٔ ۲۴ـ۱۱ ($E = \sigma/\varepsilon_0$) میدان الکتریکی را در نقاط نزدیک به سطح یک رسانای باردار به دست می‌دهد. با به کار بردن این معادله در مورد یک کرهٔ رسانا به شعاع r و حامل بار q، نشان دهید که میدان الکتریکی در نقاط واقع در بیرون کره همان میدان مربوط به یک بار نقطه‌ای واقع در مرکز کره است.

1. Ernest Rutherford

۳۹ م. پروتونی درست در بیرون یک کرهٔ باردار به شعاع $r = ۱٫۰۰\text{cm}$ با تندی $v = ۳٫۰ \times ۱۰^{۵}\text{m/s}$ می‌چرخد. بار کره چقدر است؟

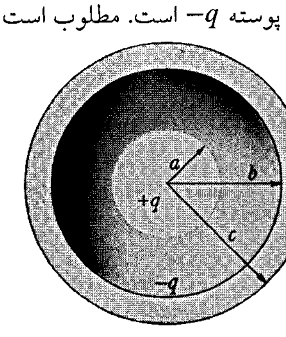
۴۰ م. بار نقطه‌ای $+q$ در مرکز یک پوستهٔ رسانای کروی از نظر الکتریکی خنثی، با شعاع درونی a و شعاع بیرونی b، قرار داده شده است. بار ظاهر شده بر روی (الف) سطح درونی پوسته و (ب) سطح بیرونی پوسته، چیست؟ میدان الکتریکی برایند در فاصلهٔ r از مرکز پوسته در حالت‌های (پ) $r < a$، (ت) $b > r > a$، و (ث) $r > b$، چیست؟ خط‌های میدان مربوط به این سه ناحیه را رسم کنید. به ازای $r > b$، میدان الکتریکی برایند ناشی از (ج) بار نقطه‌ای مرکزی به علاوهٔ بار سطح درونی و (چ) بار سطح بیرونی، چیست؟ اکنون بار نقطه‌ای $-q$ را در بیرون پوسته قرار می‌دهیم. آیا این بار نقطه‌ای توزیع بار روی (ح) سطح بیرونی و (خ) سطح درونی، را تغییر می‌دهد؟ اکنون خط‌های میدان را رسم کنید. (د) آیا به بار نقطه‌ای دوم نیروی الکتروستاتیکی وارد می‌شود؟ (ذ) آیا هیچ نیروی الکتروستاتیکی برایندی به بار نقطه‌ای اول وارد می‌شود؟ (ر) آیا این وضعیت قانون سوم نیوتون را نقض می‌کند؟

۴۱ م. کرهٔ نارسانای توپری به شعاع R دارای توزیع نایکنواخت بار با چگالی حجمی بار $\rho=\rho_s r/R$ است، که در آن ρ_s مقداری ثابت و r فاصله از مرکز کره است. نشان دهید که (الف) بار کل کره برابر است با $Q=\pi\rho_s R^{۳}$، و (ب) بزرگی میدان الکتریکی در درون کره از معادلهٔ زیر به دست می‌آید

$$E = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_{۰}}\frac{Q}{R^{۴}}r^{۲}$$

۴۲ م. اتم هیدروژن را می‌توان متشکل از یک پروتون مرکزی نقطه مانند با بار مثبت $+e$ و یک الکترون با بار منفی $-e$ در نظر گرفت، که الکترون با چگالی حجمی بار $\rho = A\exp(-۲r/a_{۰})$ در پیرامون پروتون توزیع شده است. در این رابطه A مقداری ثابت، $a_{۰} = ۰٫۵۳ \times ۱۰^{-۱۰}\text{m}$ شعاع بور و r فاصله از مرکز اتم است. (الف) با توجه به این واقعیت که هیدروژن از نظر الکتریکی خنثی است، مقدار A را پیدا کنید. (ب) میدان الکتریکی تولید شده توسط اتم را در فاصلهٔ شعاع بور[1] معین کنید.

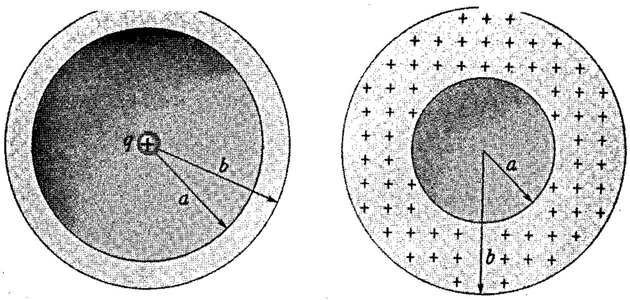
۴۳ م. در شکل ۲۴ـ۳۴، کره‌ای به شعاع a حامل بار الکتریکی $+q$ است، که به طور یکنواخت در حجم کره توزیع شده است. این کره با یک پوستهٔ رسانای کروی به شعاع درونی b و شعاع بیرونی c به طور هم مرکز قرار گرفته است. بار خالص پوسته $-q$ است. مطلوب است تعیین رابطه‌های



شکل ۲۴ـ۳۴ مسألهٔ ۴۳.

مربوط به میدان الکتریکی برحسب r، برای (الف) درون کره $(r < a)$، (ب) میان کره و پوسته $(a < r < b)$، (پ) درون پوسته $(b < r < c)$ و (ت) بیرون پوسته $(r > c)$. (ث) بار روی سطح‌های درونی و بیرونی پوسته چقدر است؟

۴۴ م. شکل ۲۴ـ۳۵ الف، یک پوستهٔ کروی با چگالی حجمی بار یکنواخت ρ را نشان می‌دهد. منحنی تغییرات E حاصل از پوسته را برحسب فاصلهٔ r از مرکز پوسته در گسترهٔ صفر تا ۳۰cm رسم کنید. فرض کنید $\rho = ۱٫۰ \times ۱۰^{-۶}\text{C/m}^{۳}$، $a = ۱۰\text{cm}$، و $b = ۲۰\text{cm}$.

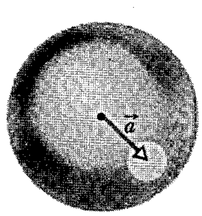


(الف) (ب)

شکل ۲۴ـ۳۵ مسأله‌های ۴۴ و ۴۵.

۴۵ م. در شکل ۲۴ـ۳۵ ب، یک پوستهٔ کروی نارسانا به شعاع درونی a و شعاع بیرونی b، دارای چگالی حجمی بار مثبت $\rho = A/r$ (در درون ضخامت آن) است، که در آن A مقداری ثابت و r فاصله تا مرکز پوسته است. علاوه بر این، در مرکز بار نقطه‌ای مثبت q نیز قرار گرفته است. مقدار A چقدر باید باشد تا میدان الکتریکی در پوسته $(a \le r \le b)$ یکنواخت بماند؟ (راهنمایی: ثابت A به a بستگی دارد اما به b بستگی ندارد).

* **۴۶ م.** چگالی حجمی بار یکنواخت یک کرهٔ نارسانا ρ است. فرض کنید $\vec{r}$ بردار مکان از مرکز کره تا نقطه‌ای مانند P در درون کره باشد. (الف) نشان دهید که میدان الکتریکی در نقطهٔ P از معادلهٔ $\vec{E} = \rho\vec{r}/۳\varepsilon_{۰}$، به دست می‌آید. (توجه کنید که این نتیجه از شعاع کره مستقل است). (ب) یک کاواک کروی، مطابق شکل ۲۴ـ۳۶، در کره ایجاد می‌شود. با استفاده از



شکل ۲۴ـ۳۶ مسألهٔ ۴۶.

1. Bohr

مفاهیم برهم نهی نشان دهید که میدان الکتریکی در تمام نقاط درون کاواک یکنواخت و برابر است با $\vec{E} = \rho\vec{a}/3\varepsilon_0$، که در آن $\vec{a}$ بردار مکان از مرکز کره تا مرکز کاواک است. (توجه کنید که این نتیجه از شعاع کره و شعاع کاواک مستقل است).

* ۴۷ م. کره‌ای که شامل توزیع حجمی متقارن، اما نایکنواخت بار الکتریکی است، در راستای شعاع و از مرکز به بیرون سو، یک میدان الکتریکی به بزرگی $E = Kr^4$ تولید می‌کند. در اینجا r فاصله از مرکز کره و K مقداری ثابت است. رابطهٔ چگالی حجمی توزیع بار ρ، برحسب r چگونه است؟

مسألهٔ تکمیلی

۴۸. رمز و راز خرده‌های شکلات. در دستگاه‌هایی که با دانه‌ها یا پودرها سروکار دارند انفجارهای ناشی از تخلیه‌های الکتروستاتیکی (جرقه‌ها) خطرهایی جدی به وجود می‌آورند. در دههٔ ۱۹۷۰ در یک کارخانهٔ بیسکویت‌سازی چنین انفجاری در پودرهای شکلات رخ داد. در آن کارخانه، کارگران معمولاً کیسه‌های پودر تحویل گرفته شده را در مخزنی خالی می‌کردند و پودرها از آنجا توسط لوله‌های PVC[1] متصل به زمین به یک سیلو دمیده می‌شدند تا انبار شوند. در جایی از این مسیر دو شرط برای بروز انفجار وجود داشت: (۱) بزرگی میدان الکتریکی به مقدار $3{,}0\times10^6\,\mathrm{N/C}$ یا بیشتر می‌رسید، به گونه‌ای که فروشکست الکتریکی روی می‌داد و در نتیجه جرقه تولید می‌شد. (۲) انرژی جرقه $150\,\mathrm{mJ}$ یا بیشتر بود، به گونه‌ای که می‌توانست باعث اشتعال پودرها شود. اکنون شرط اول در هنگام حرکت کردن پودرها در لوله‌های PVC را بررسی می‌کنیم.

فرض کنید جریانی از پودرهای شکلات با بار منفی از طریق یک لولهٔ PVC استوانه‌ای به شعاع $R = 5{,}0\,\mathrm{cm}$ دمیده می‌شود. در ضمن، فرض کنید پودرهای باردار با چگالی حجمی بار ρ به طور یکنواخت در سرتاسر لوله گسترده می‌شوند. (الف) با استفاده از قانون گاؤس رابطهٔ مربوط به بزرگی میدان الکتریکی $\vec{E}$ در لوله را برحسب فاصلهٔ شعاعی r از محور لوله به دست آورید. (ب) آیا بزرگی این میدان با افزایش یافتن r افزایش می‌یابد یا کاهش؟ (پ) آیا میدان الکتریکی $\vec{E}$ در راستای شعاع و به درون‌سو است یا به بیرون سو؟ (ت) با این فرض که بزرگی چگالی حجمی بار ρ برابر با $1{,}1\times10^{-3}\,\mathrm{C/m^3}$ (مقدار نوعی موجود در کارخانهٔ بیسکویت‌سازی) است، بیشینهٔ بزرگی میدان الکتریکی را پیدا کنید و معین کنید این میدان در کجا بیشینه است. (ث) آیا جرقه زدن رخ می‌دهد، و اگر چنین است، در کجا؟ (این موضوع در مسأله ۵۷ فصل ۲۵ ادامه می‌یابد).

1. Polyvinylchloride (PVC)

۲۵
پتانسیل الکتریکی



این تصویر نشان می‌دهد که زن جوانی هنگام تماشای پارک ملی سکویا از یک چشم‌انداز مرتفع، متوجه راست شدن موهای سرش می‌شود و در همین حال برادرش به عنوان تفریح از او عکس می‌گیرد. اما پنج دقیقه پس از رفتن آنها اصابت صاعقه به آن محل یک نفر را می‌کشد و هفت نفر را زخمی می‌کند.

چه چیزی باعث راست شدن موهای سر زن جوان شده است؟

در این فصل به این پرسش پاسخ داده خواهد شد.

۱ـ۲۵ انرژی پتانسیل الکتریکی

قانون‌های نیروی گرانشی نیوتون و نیروی الکتروستاتیکی کولن، از نظر ریاضی شبیه‌اند. بنابراین، جنبه‌های عمومی مورد بحث دربارهٔ نیروی گرانشی را می‌توان دربارهٔ نیروی الکتروستاتیکی نیز به کار برد. به ویژه آنکه، به درستی می‌توان نتیجه گرفت که نیروی الکتروستاتیکی یک نیروی پایستار است. از این رو، وقتی یک نیروی الکتروستاتیکی در میان دو یا چند ذرهٔ باردار درون دستگاهی از ذرات اثر می‌کند، به آن دستگاه می‌توان یک **انرژی پتانسیل الکتریکی** U، نسبت داد. علاوه بر این، هرگاه پیکربندی دستگاه از حالت آغازی i به حالت پایانی متفاوت f تغییر کند، نیروی الکتروستاتیکی روی ذرات کار W انجام می‌دهد. پس، با توجه به معادلهٔ ۸ـ۱ می‌دانیم که ΔU، تغییر انرژی پتانسیل دستگاه، برابر است با:

$$\Delta U = U_f - U_i = -W \qquad (۱ـ۲۵)$$

کار انجام شده توسط نیروی الکتروستاتیکی، همانند نیروهای پایستار دیگر، مستقل از مسیر است. فرض کنید ذرهٔ بارداری درون دستگاهی ز نقطهٔ i تا نقطهٔ f حرکت می‌کند و در همین حال نیروی الکتروستاتیکی بین ذره و بقیهٔ دستگاه، به ذره وارد می‌شود. با این شرط که بقیهٔ دستگاه تغییر نکند، W، کار انجام شده توسط این نیرو برای تمام مسیرهای میان نقطه‌های i و f یکسان است.

به خاطر سادگی، پیکربندی مرجع دستگاه ذرات باردار را معمولاً به صورتی در نظر می‌گیریم که در آن تمام ذرات نسبت به هم بی‌نهایت فاصله داشته باشند. در ضمن، انرژی پتانسیل مرجع متناظر با این پیکربندی را معمولاً صفر می‌گیریم. فرض کنید چند ذرهٔ باردار از فاصله‌های جدایی آغازی بی‌نهایت (حالت i) به هم نزدیک می‌شوند و دستگاهی با ذرات نزدیک به هم (حالت f) تشکیل می‌دهند. انرژی پتانسیل آغازی U_i را صفر می‌گیریم و فرض می‌کنیم W_∞ نشان دهندهٔ کار انجام شده توسط نیروهای الکتروستاتیکی میان ذرات در حین حرکت کردن آنها از فاصلهٔ بی‌نهایت باشد. در این صورت، انرژی پتانسیل پایانی دستگاه U، با استفاده از معادلهٔ ۲۵ـ۱ چنین به‌دست می‌آید:

$$U = -W_\infty \qquad (۲ـ۲۵)$$

انرژی پتانسیل الکتریکی، همانند انواع انرژی‌های پتانسیل دیگر، نوعی انرژی مکانیکی در نظر گرفته می‌شود. یادآوری می‌کنیم که با توجه به فصل ۸، اگر درون یک دستگاه (بسته) فقط نیروهای پایستار اثر بکنند، انرژی مکانیکی آن دستگاه پایسته می‌ماند. در ادامهٔ این فصل از این واقعیت به گونه‌ای گسترده استفاده خواهد شد.

روشهای مسأله حل کردن

روش ۱: انرژی پتانسیل الکتریکی؛ کار انجام شده توسط یک میدان

هر دستگاه متشکل از ذرات شامل یک انرژی پتانسیل الکتریکی وابسته است. اما عبارت‌هایی هم خواهیم دید (مثلاً در مسألهٔ نمونه ۲۵ـ۱) که متضمن وابستگی انرژی پتانسیل الکتریکی فقط به یکی از ذرات درون دستگاه هستند. برای مثال، ممکن است گفته شود: «در یک میدان الکتریکی الکترونی دارای انرژی پتانسیل 10^{-7}J است». چنین عبارت‌هایی اغلب پذیرفتنی‌اند، اما همیشه باید به خاطر داشت که انرژی پتانسیل در واقع به یک دستگاه ـ در اینجا الکترون به اضافهٔ ذرات باردار به وجود آورندهٔ میدان الکتریکی ـ وابسته است. هم‌چنین، توجه کنید که به یک ذره یا حتی به یک دستگاه، فقط به شرطی می‌توان مقدار خاصی انرژی پتانسیل، مثلاً در اینجا 10^{-7}J، نسبت داد که مقدار انرژی پتانسیل مرجع معلوم باشد.

وقتی انرژی پتانسیل فقط به یک ذره از دستگاه وابسته می‌شود، اغلب گفته می‌شود که کار توسط میدان الکتریکی روی ذره انجام شده است. منظور این است که کار را نیروی وارد بر ذره از سوی بارهای به وجود آورندهٔ میدان انجام داده است.

مسألهٔ نمونهٔ ۲۵ـ۱

ذرات پرتوهای کیهانی وارد شده از فضا به جوّ زمین به مولکول‌های هوا برخورد و از آنها به طور دایم الکترون جدا می‌کنند. هر الکترون آزاد شده تحت اثر نیروی الکتروستاتیکی $\vec{F}$ قرار می‌گیرد. این نیرو از میدان الکتریکی $\vec{E}$ تولید شده در جوّ توسط ذرات باردار موجود در روی زمین ناشی شده است. در نزدیکی سطح زمین میدان الکتریکی دارای بزرگی $E = ۱۵۰\,N/C$ و جهتش به سمت پایین است. هنگامی که یک الکترون رها شده، تحت اثر نیروی الکتروستاتیکی در راستای قائم به اندازهٔ $d = ۵۲۰\,m$ به سمت بالا حرکت می‌کند (شکل ۲۵ـ۱) تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی الکترون ΔU، چقدر است؟

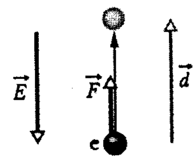
حل: در اینجا با سه **نکتهٔ کلیدی** سر و کار داریم. یک نکته این است که ΔU، تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی الکترون با W، کار انجام شده توسط میدان الکتریکی روی الکترون، رابطه دارد و این رابطه را معادلهٔ ۲۵ـ۱ $(\Delta U = -W)$ نشان می‌دهد. **نکتهٔ کلیدی** دیگر این است که کار انجام شده توسط نیروی ثابت $\vec{F}$ بر روی ذره‌ای که جابه‌جایی $\vec{d}$ را انجام می‌دهد، برابر است با:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} \qquad (۲۵\text{ـ}۳)$$

سرانجام، **نکتهٔ کلیدی** سوم این است که رابطهٔ نیروی الکتروستاتیکی با میدان الکتریکی به صورت $\vec{F} = q\vec{E}$ است، که در آن q بار الکترون (مساوی با $-۱٫۶ \times ۱۰^{-۱۹}C$) است. با جانشانی $\vec{F}$ در معادلهٔ ۲۵ـ۳ و انجام دادن عمل ضرب نقطه‌ای، داریم

$$W = q\vec{E} \cdot \vec{d} = qEd\cos\theta \qquad (۲۵\text{ـ}۴)$$

در این معادله θ زاویهٔ میان $\vec{E}$ و $\vec{d}$ است. میدان $\vec{E}$ به سمت پایین و جابه‌جایی



شکل ۲۵ـ۱ مسألهٔ نمونهٔ ۲۵ـ۱. الکترونی تحت اثر نیروی الکتروستاتیکی $\vec{F}$ ناشی از میدان الکتریکی $\vec{E}$، در جوّ زمین جابه‌جایی $\vec{d}$ را انجام می‌دهد.

$\vec{d}$ به سمت بالاست. بنابراین، $\theta = ۱۸۰°$. با جانشانی این مقدار و داده‌های دیگر در معادلهٔ ۲۵ـ۴، داریم

$$W = (-۱٫۶ \times ۱۰^{-۱۹}C)(۱۵۰\,N/C)(۵۲۰\,m)\cos ۱۸۰° \quad \Rightarrow$$

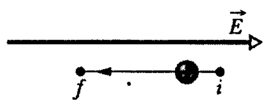
$$W = ۱٫۲ \times ۱۰^{-۱۴}J$$

در نتیجه، با استفاده از معادلهٔ ۲۵ـ۱، داریم

$$\Delta U = -W = -۱٫۲ \times ۱۰^{-۱۴}J \qquad \text{(پاسخ)}$$

این نتیجه نشان می‌دهد که وقتی الکترون به اندازهٔ $۵۲۰\,m$ صعود می‌کند، انرژی پتانسیل الکتریکی الکترون به اندازهٔ $۱٫۲ \times ۱۰^{-۱۴}J$ کاهش می‌یابد.

خودآزمایی ۱: در شکل زیر، پروتونی در میدان الکتریکی یکنواخت نشان داده شده از نقطهٔ i تا نقطهٔ f حرکت می‌کند. (الف) آیا میدان الکتریکی روی پروتون کار مثبت انجام می‌دهد یا کار منفی؟ (ب) آیا انرژی پتانسیل الکتریکی پروتون افزایش می‌یابد یا کاهش؟



۲۵ـ۲ پتانسیل الکتریکی

چنانکه از مسألهٔ نمونهٔ ۲۵ـ۱ فهمیده می‌شود، انرژی پتانسیل یک ذرهٔ باردار در میدان الکتریکی به بزرگی بار بستگی دارد. اما انرژی پتانسیل یکای بار الکتریکی در هر نقطه از میدان مقدار یگانه‌ای دارد.

به عنوان مثال، فرض کنید ذرهٔ آزمون با بار مثبت $۱٫۶۰ \times ۱۰^{-۱۹}C$ را در نقطه‌ای از میدان الکتریکی که در آنجا انرژی پتانسیل ذره $۲٫۴۰ \times ۱۰^{-۱۷}J$ است، قرار می‌دهیم. در این صورت، انرژی پتانسیل یکای بار برابر است با:

$$\frac{۲٫۴۰ \times ۱۰^{-۱۷}J}{۱٫۶۰ \times ۱۰^{-۱۹}C} = ۱۵۰\,J/C$$

اکنون، فرض کنید ذرهٔ آزمونی با دو برابر بار مثبت، یعنی $۳٫۲۰ \times ۱۰^{-۱۹}C$، را در میدان قرار می‌دهیم. متوجه خواهیم شد که انرژی پتانسیل الکتریکی ذرهٔ دوم $۴٫۸۰ \times ۱۰^{-۱۷}J$ است، که دو برابر انرژی پتانسیل ذرهٔ اول است. اما، انرژی پتانسیل یکای بار ثابت می‌ماند که باز هم همان $۱۵۰\,J/C$ است.

بنابراین، انرژی پتانسیل یکای بار، که می‌توان آن را با نسبت U/q نشان داد، از بار به کار رفتهٔ q، مستقل و فقط مشخصه‌ای از میدان الکتریکی مورد نظر است. انرژی پتانسیل یکای بار در نقطه‌ای از میدان الکتریکی

را **پتانسیل الکتریکی** V (یا به طور ساده، **پتانسیل**) در آن نقطه می‌نامند. بنابراین، می‌توان نوشت

$$V = \frac{U}{q} \tag{۲۵-۵}$$

توجه کنید که پتانسیل الکتریکی کمیتی نرده‌ای است، نه برداری.

اختلاف پتانسیل الکتریکی ΔV، میان دو نقطهٔ i و f در یک میدان الکتریکی برابر با اختلاف انرژی پتانسیل یکای بار در بین آن دو نقطه است:

$$\Delta V = V_f - V_i = \frac{U_f}{q} - \frac{U_i}{q} = \frac{\Delta U}{q} \tag{۲۵-۶}$$ ■

با استفاده از معادلهٔ ۲۵-۱ و قرار دادن $-W$ به جای ΔU در معادلهٔ ۲۵-۶، اختلاف پتانسیل میان نقطه‌های i و f چنین تعریف می‌شود:

$$\Delta V = V_f - V_i = -\frac{W}{q} \quad \text{(تعریف اختلاف پتانسیل)} \tag{۲۵-۷}$$ ■

بنابراین، اختلاف پتانسیل میان دو نقطه برابر با کار انجام شده توسط نیروی الکتروستاتیکی لازم برای حرکت دادن یکای بار از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر، با علامت منفی، است. اختلاف پتانسیل، بسته به علامت‌ها و بزرگی‌های q و W، می‌تواند مثبت، منفی یا صفر، باشد.

اگر $U_i = 0$ در بی‌نهایت را به عنوان انرژی پتانسیل مرجع انتخاب کنیم، با توجه به معادلهٔ ۲۵-۵ پتانسیل الکتریکی نیز در آنجا باید صفر باشد. پس، با توجه به معادلهٔ ۲۵-۷ پتانسیل الکتریکی V را در هر نقطه از میدان الکتریکی می‌توان به صورت زیر تعریف کرد

$$V = -\frac{W_\infty}{q} \quad \text{(تعریف پتانسیل)} \tag{۲۵-۸}$$ ■

که در آن W_∞ کار انجام شد، توسط میدان الکتریکی روی یک ذرهٔ باردار در موقع حرکت کردن آن از بی‌نهایت تا نقطهٔ f است. پتانسیل V، بسته به علامت‌ها و بزرگی‌های q و W_∞، می‌تواند مثبت، منفی یا صفر، باشد.

یکای SI پتانسیل الکتریکی، که از معادلهٔ ۲۵-۸ نتیجه‌گیری می‌شود، **ژول بر کولن** (با نماد J/C) است. یکای پتانسیل الکتریکی به قدری کاربرد دارد که برای نشان دادن آن از یکای ویژه‌ای به نام **ولت** (با نماد V) استفاده می‌شود. یعنی

یک ژول بر کولن = یک ولت (۲۵-۹)

این یکای جدید به ما اجازه می‌دهد تا برای میدان الکتریکی $\vec{E}$، که تاکنون برحسب نیوتون بر کولن اندازه‌گیری می‌شد، یکای معمول‌تری را بپذیریم. با توجه به این دو تبدیل یکا، داریم

$$۱\,\text{N/C} = (۱\frac{\text{N}}{\text{C}})(\frac{۱\,\text{V.C}}{۱\,\text{J}})(\frac{۱\,\text{J}}{۱\,\text{N.m}}) = ۱\,\text{V/m} \tag{۲۵-۱۰}$$

ضریب تبدیل در پرانتز دوم، از معادلهٔ ۲۵-۹ و در پرانتز سوم از تعریف ژول گرفته شده است. بعد از این، مقادیر میدان الکتریکی را به جای نیوتون بر کولن، برحسب **ولت بر متر**، بیان خواهیم کرد.

اکنون، یکای انرژی را می‌توانیم طوری تعریف کنیم که برای اندازه‌گیری انرژی در قلمرو اتمی و زیر اتمی مناسب باشد: یک **الکترون ـ ولت** (با نماد eV)، انرژی‌ای برابر با مقدار کار لازم برای حرکت دادن تک بار بنیادی e، یعنی بار الکتریکی الکترون یا پروتون، تحت اثر اختلاف پتانسیل، دقیقاً، یک ولت است. معادلهٔ ۲۵-۷ نشان می‌دهد که بزرگی این کار برابر با $q\Delta V$ است. پس، داریم

$$۱\,\text{eV} = e(۱\,\text{V}) \Rightarrow$$

$$۱\,\text{eV} = (۱{,}۶۰ \times ۱۰^{-۱۹}\,\text{C})(۱\,\text{J/C}) = ۱{,}۶۰ \times ۱۰^{-۱۹}\,\text{J}$$

روشهای مسأله حل کردن

روش ۲: پتانسیل الکتریکی و انرژی پتانسیل الکتریکی

پتانسیل الکتریکی V و انرژی پتانسیل الکتریکی U کمیت‌هایی کاملاً متفاوت‌اند و نباید با یکدیگر اشتباه شوند

◄ پتانسیل الکتریکی خاصیتی است از میدان الکتریکی، بدون توجه به وجود شیء باردار در میدان الکتریکی؛ این کمیت برحسب ژول بر کولن یا ولت، اندازه‌گیری می‌شود.

◄ انرژی پتانسیل الکتریکی انرژی یک شیء باردار در میدان الکتریکی خارجی (یا به بیان دقیق‌تر، انرژی دستگاه شامل شیء و میدان الکتریکی خارجی) است؛ این کمیت برحسب ژول اندازه‌گیری می‌شود.

کار انجام شده توسط نیروی وارد شده

فرض کنید در یک میدان الکتریکی به ذره‌ای با بار q نیرویی وارد می‌شود و آن را از نقطهٔ i تا نقطهٔ f حرکت می‌دهد. در حین حرکت کردن ذره نیروی وارد شده کار W_{app} و میدان الکتریکی کار W را روی بار انجام می‌دهد. طبق قضیهٔ کار ـ انرژی بیان شده با معادلهٔ ۷ـ۱۰، تغییر انرژی جنبشی ذره ΔK، برابر است با:

$$\Delta K = K_f - K_i = W_{app} + W \qquad (۲۵\text{-}۱۱)$$

اکنون فرض کنید ذره پیش و پس از حرکت کردن ساکن است. بنابراین، K_f و K_i هر دو صفرند و معادلهٔ ۲۵ـ۱۱ به صورت زیر ساده می‌شود

$$W_{app} = -W \qquad (۲۵\text{-}۱۲)$$

به عبارتی، هرگاه انرژی جنبشی تغییر نکند، W_{app}، کار نیروی وارد شده در حین حرکت برابر با W، کار انجام شده توسط میدان الکتریکی، با علامت منفی، است.

با استفاده از معادلهٔ ۲۵ـ۱۲ می‌توان W_{app} را در معادلهٔ ۲۵ـ۱ قرار داد و کار انجام شده توسط نیروی وارد شده را به تغییر انرژی پتانسیل ذره در حین حرکت ربط داد. در نتیجه، خواهیم داشت

$$\Delta U = U_f - U_i = W_{app} \qquad (۲۵\text{-}۱۳)$$

باز هم با استفاده از معادلهٔ ۲۵ـ۱۲ برای قرار دادن W_{app} در معادلهٔ ۲۵ـ۷، می‌توان کار W_{app} را به اختلاف پتانسیل الکتریکی ΔV بین مکان‌های آغازی و پایانی ذره ربط داد. در نتیجه، خواهیم داشت

$$W_{app} = q\Delta V \qquad (۲۵\text{-}۱۴)$$

W_{app}، بسته به علامت‌ها و بزرگی‌های q و ΔV، می‌تواند مثبت، منفی یا صفر، باشد. W_{app} مقدار کاری است که باید انجام داد تا ذره‌ای با بار q تحت اثر اختلاف پتانسیل ΔV و بدون تغییر انرژی جنبشی ذره، حرکت کند.

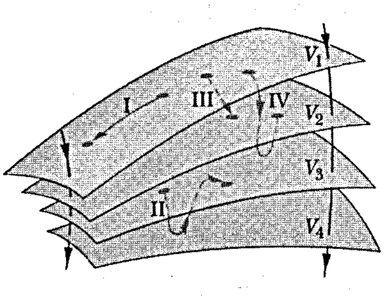
خودآزمایی ۲: در شکل مربوط به خودآزمایی ۱ پروتونی از نقطهٔ i تا نقطهٔ f در میدان الکتریکی یکنواخت نشان داده شده حرکت داده می‌شود. (الف) آیا کار نیروی وارد شده مثبت است یا منفی؟ (ب) آیا پروتون به نقطه‌ای با پتانسیل بالاتر حرکت می‌کند یا با پتانسیل پایین‌تر؟

۲۵ـ۳ سطح‌های هم پتانسیل

نقطه‌های نزدیک به هم با پتانسیل الکتریکی یکسان یک **سطح هم پتانسیل** تشکیل می‌دهند. این سطح می‌تواند سطحی تصوری یا یک سطح فیزیکی واقعی باشد. وقتی ذرهٔ بارداری در بین دو نقطهٔ i و f واقع بر یک سطح هم پتانسیل، حرکت می‌کند، میدان الکتریکی هیچ کار برایندی روی ذره انجام نمی‌دهد. این موضوع را

می‌توان از معادلهٔ ۲۵ـ۷ نتیجه گرفت، که نشان می‌دهد به ازای $V_f = V_i$ مقدار W صفر است. با توجه به مستقل بودن کار (و در نتیجه انرژی پتانسیل و پتانسیل) از مسیر پیموده شده، برای هر مسیر وصل کنندهٔ نقطه‌های i و f، خواه این مسیر در روی سطح هم پتانسیل باشد و خواه نباشد، داریم $W = ۰$.

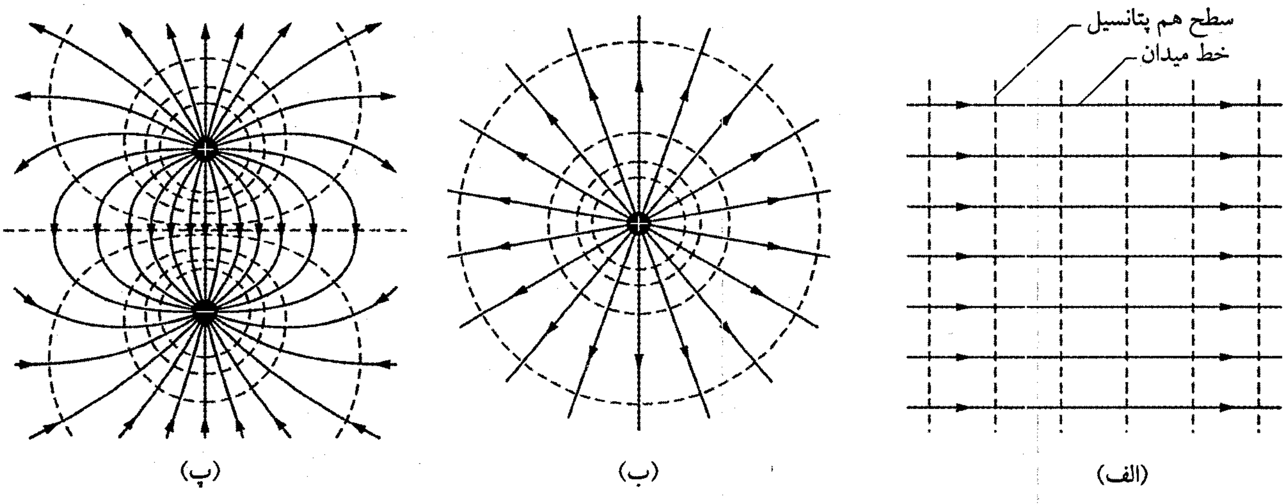
شکل ۲۵ـ۲، دسته‌ای از سطح‌های هم پتانسیل مربوط به میدان الکتریکی حاصل از یک توزیع بار را نشان می‌دهد. کار انجام شده توسط میدان الکتریکی روی یک ذرهٔ باردار در موقع حرکت کردن ذره از یک سر به سر دیگر مسیرهای I و II صفر است، زیرا هر کدام از این مسیرها از یک سطح هم پتانسیل آغاز و به همان سطح ختم می‌شوند. هنگامی که ذرهٔ باردار از یک سر به سر دیگر مسیرهای III و IV حرکت می‌کند، کار انجام شده صفر نیست اما مقدار آن برای هر دو مسیر یکسان است، زیرا پتانسیل‌های آغازی و پایانی هر دو مسیر یکسان‌اند؛ یعنی مسیرهای III و IV یک زوج سطح هم پتانسیل را به هم وصل می‌کنند.



شکل ۲۵ـ۲ نمودار بخش‌هایی از چهار سطح هم پتانسیل با پتانسیل‌های الکتریکی $V_۱ = ۱۰۰\text{V}$، $V_۲ = ۸۰\text{V}$، $V_۳ = ۶۰\text{V}$ و $V_۴ = ۴۰\text{V}$. چهار مسیری که یک بار آزمون ممکن است در طول آنها حرکت کند نشان داده شده‌اند. در نمودار، دو خط میدان الکتریکی نیز رسم شده‌اند.

با توجه به تقارن، سطح‌های هم پتانسیل مربوط به یک بار نقطه‌ای یا یک توزیع متقارن کروی دسته‌ای از کره‌های هم مرکزند. این سطح‌ها برای میدان الکتریکی یکنواخت دسته‌ای از صفحه‌های عمود بر خط‌های میدان هستند. در واقع، سطح‌های هم پتانسیل همیشه بر خط‌های میدان الکتریکی و در نتیجه بر $\vec{E}$ (که همیشه بر این خطها مماس است) عمودند. اگر $\vec{E}$ بر سطح هم پتانسیل عمود نباشد، دارای مؤلفه‌ای در راستای این سطح خواهد بود. در آن صورت، این مؤلفه روی ذرهٔ باردار در حال حرکت در این سطح کار انجام می‌دهد. اما با توجه به معادلهٔ ۲۵ـ۷، اگر سطح واقعاً هم پتانسیل باشد، هیچ کاری نمی‌تواند انجام شود و تنها نتیجهٔ ممکن این است که $\vec{E}$ در همه جا باید بر سطح عمود باشد. شکل ۲۵ـ۳، خط‌های میدان الکتریکی و مقطع سطح‌های هم پتانسیل مربوط به میدان الکتریکی یکنواخت و میدان‌های وابسته به بار نقطه‌ای و دو قطبی الکتریکی را نشان می‌دهد.

اکنون، به موضوع الکتریسیته‌دار شدن زن جوان در تصویر سرآغاز این فصل برمی‌گردیم. او چون در یک محل مرتفع متصل به دامنهٔ کوه ایستاده است تقریباً همان پتانسیل دامنهٔ کوه را دارد. در بالای سر او یک سیستم ابر به شدت باردار شده حرکت کرده و یک میدان الکتریکی قوی در پیرامون سر او و دامنهٔ کوه به وجود آورده است، به طوری که جهت $\vec{E}$ از سر او و دامنهٔ کوه به برون سو است. نیروهای الکتروستاتیکی ناشی از این میدان برخی الکترون‌های رسانش را از طریق بدن به سوی پایین رانده‌اند، در نتیجه تارهای مو دارای بار مثبت شده‌اند. بزرگی $\vec{E}$ به ظاهر زیاد بوده، اما از مقدار تقریبی $۳ \times ۱۰^۶ \text{V/m}$ لازم برای فروشکست الکتریکی مولکول‌های هوا کمتر بوده است. (این مقدار در مدت کوتاهی پس از برخورد صاعقه به دامنهٔ کوه افزایش یافته بود).



شکل ۲۵ـ۳ نمودار خط‌های میدان الکتریکی و مقطع‌های سطح‌های هم پتانسیل مربوط به (الف) میدان الکتریکی یکنواخت، (ب) میدان بار نقطه‌ای، و (پ) میدان دوقطبی الکتریکی.

سطح‌های هم پتانسیل پیرامون زن جوان در دامنهٔ کوه را می‌توان از موهای او تشخیص داد؛ تارهای مو در جهت میدان $\vec{E}$ کشیده شده‌اند و در نتیجه بر سطح‌های هم پتانسیل عمودند. بنابراین، این سطح‌ها باید به گونه‌ای باشند که در شکل ۲۵ـ۴ رسم شده‌اند. بزرگی میدان الکتریکی E، درست در بالای سر به ظاهر بیشترین مقدار را داشته است (سطح‌های هم پتانسیل از هم کمترین فاصله را داشته‌اند)، زیرا موها در آنجا به فاصلهٔ دورتری از هم کشیده شده‌اند.

در اینجا می‌توانید به آسانی پند بگیرید که، هرگاه یک میدان الکتریکی باعث راست شدن موهای سر شما بشود، به جای ژست گرفتن برای عکس برداشتن، بهتر است فوراً به سمت یک پناهگاه بدوید.



شکل ۲۵ـ۴ این، همان تصویر سراغاز فصل است که نشان می‌دهد وجود ابرهای بالای سر باعث تولید میدان الکتریکی قوی $\vec{E}$ در نزدیکی سر زن جوان شده است. بسیاری از تارهای مو در جهت میدان الکتریکی کشیده شده‌اند و بر سطح‌های هم پتانسیل عمودند. شدیدترین میدان الکتریکی در جایی مانند بالای سر زن است، که در آنجا سطح‌های هم پتانسیل به هم نزدیک‌ترند.

۴ـ۲۵ محاسبهٔ پتانسیل با استفاده از میدان الکتریکی

در یک میدان الکتریکی اختلاف پتانسیل میان هر دو نقطهٔ i و f را وقتی می‌توان حساب کرد که بردار میدان الکتریکی $\vec{E}$ در طول مسیر وصل کنندهٔ آن دو نقطه معلوم باشد. برای انجام دادن این محاسبه، ابتدا کار انجام شده روی بار آزمون مثبت توسط میدان را در حین حرکت کردن بار از i تا f معین و سپس از معادلهٔ ۲۵ـ۷ استفاده می‌کنیم.

میدان الکتریکی اختیاری نشان داده شده با خط‌های میدان در شکل ۲۵ـ۵ و بار آزمون مثبت q_0 در حال حرکت در طول مسیر نشان داده شده از نقطهٔ i تا نقطهٔ f، را در نظر می‌گیریم. در حین حرکت کردن بار به اندازهٔ جابه‌جایی دیفرانسیلی $\vec{ds}$، در هر نقطه از مسیر، نیروی الکتروستاتیکی $q_0\vec{E}$ روی بار اثر می‌کند. با توجه به فصل ۷، می‌دانیم که هنگام جابه‌جا شدن یک ذره به اندازهٔ $\vec{ds}$ کار دیفرانسیلی انجام شده توسط نیروی $\vec{F}$ روی ذره، dW، برابر است با:

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{ds} \qquad (۲۵ـ۱۵)$$

در وضعیت شکل ۲۵ـ۵، داریم $\vec{F} = q_0\vec{E}$، و معادلهٔ ۲۵ـ۱۵ چنین نوشته می‌شود:

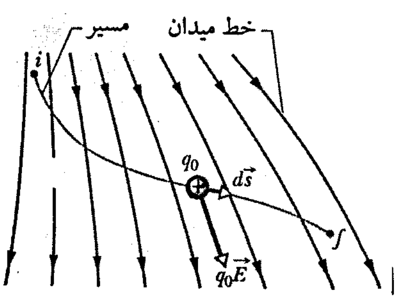
$$dW = q_0\vec{E} \cdot \vec{ds} \qquad (۲۵ـ۱۶)$$

برای پیدا کردن کار کل W، که هنگام حرکت کردن ذره از نقطهٔ i تا نقطهٔ f، توسط میدان روی ذره انجام شده است، کارهای دیفرانسیلی انجام شده روی بار در حین طی کردن تمام جابه‌جایی‌های دیفرانسیلی $\vec{ds}$ در طول مسیر را ـ به کمک انتگرال‌گیری ـ با هم جمع می‌کنیم:

$$W = q_0\int_i^f \vec{E} \cdot \vec{ds} \qquad (۲۵ـ۱۷)$$

با جانشانی کار کل W از معادلهٔ ۲۵ـ۱۷ در معادلهٔ ۲۵ـ۷، خواهیم داشت

$$V_f - V_i = -\int_i^f \vec{E} \cdot \vec{ds} \qquad (۲۵ـ۱۸)$$ ■



شکل ۲۵ـ۵ بار آزمون q_0 در طول مسیر نشان داده شده در یک میدان الکتریکی نایکنواخت از نقطهٔ i تا نقطهٔ f حرکت می‌کند. در طول جابه‌جایی $\vec{ds}$ نیروی الکتروستاتیکی $q_0\vec{E}$ به بار آزمون وارد می‌شود. در محل بار آزمون، این نیرو در جهت خط میدان است.

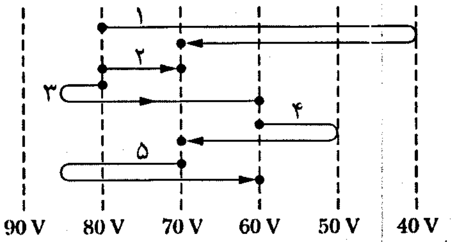
بنابراین، اختلاف پتانسیل میان هر دو نقطهٔ i و f در یک میدان الکتریکی برابر است با انتگرال خطی (یعنی انتگرال در طول یک مسیر معین) $\vec{E} \cdot \vec{ds}$ از i تا f، با علامت منفی. اما چون نیروی الکتروستاتیکی پایستار است، تمام مسیرها (ساده یا پیچیده) نتیجهٔ یکسانی به دست می‌دهند.

هرگاه میدان الکتریکی در همهٔ نقاط یک ناحیهٔ معین معلوم باشد، با استفاده از معادلهٔ ۲۵ـ۱۸ می‌توان اختلاف پتانسیل میان هر دو نقطه از میدان را حساب کرد. اگر پتانسیل V_i در نقطهٔ i را صفر بگیریم معادلهٔ ۲۵ـ۱۸ به‌صورت زیر در می‌آید

$$V = -\int_i^f \vec{E} \cdot \vec{ds} \qquad (۲۵ـ۱۹)$$ ■

که در آن شاخص پایین f مربوط به V_f حذف شده است. معادلهٔ ۲۵ـ۱۹ پتانسیل V در نقطهٔ f واقع در میدان الکتریکی را نسبت به پتانسیل صفر در نقطهٔ i، به دست می‌دهد. اگر نقطهٔ i را در بی‌نهایت انتخاب کنیم، با استفاده از معادلهٔ ۲۵ـ۱۹ پتانسیل V در هر نقطهٔ f نسبت به پتانسیل صفر در بی‌نهایت، به دست می‌آید.

خودآزمایی ۳: شکل زیر، دسته‌ای از سطح‌های هم پتانسیل (به صورت مقطع) و پنج مسیر برای حرکت دادن الکترون از یک سطح به سطح دیگر را نشان می‌دهد. (الف) جهت میدان الکتریکی وابسته به سطح‌ها چگونه است؟ (ب) در هر یک از مسیرها، آیا کاری که، انجام می‌دهیم مثبت است، منفی است، یا صفر است؟ (پ) این مسیرها را با توجه به کاری که انجام می‌دهیم، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



مسألهٔ نمونهٔ ۲۵ـ۲

(الف) شکل ۲۵ـ۶ الف، دو نقطهٔ i و f را در میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ نشان می‌دهد. این نقطه‌ها روی یک خط میدان الکتریکی (که نشان داده نشده است) و به فاصلهٔ d از هم قرار دارند. اختلاف پتانسیل $V_f - V_i$ را با حرکت دادن بار آزمون q_0 از i تا f در طول مسیر نشان داده شده، که موازی و همسو با میدان است، پیدا کنید.

حل: در اینجا **نکتهٔ کلیدی** این است که با استفاده از معادلهٔ ۲۵ـ۱۸ اختلاف پتانسیل میان هر دو نقطه از میدان الکتریکی را با محاسبهٔ انتگرال $\vec{E} \cdot d\vec{s}$ در طول مسیر وصل کنندهٔ آن دو نقطه، می‌توان به دست آورد. برای انجام دادن این کار، در ذهن خود بار آزمون q_0 را در طول مسیر از نقطهٔ آغازی i تا نقطهٔ پایانی f حرکت می‌دهیم. در حین حرکت دادن بار آزمون در طول مسیر نشان داده شده در شکل ۲۵ـ۶ الف، جابه‌جایی دیفرانسیلی $d\vec{s}$ همیشه با $\vec{E}$ همسو است. بنابراین، θ، زاویهٔ میان $\vec{E}$ و $d\vec{s}$ صفر و حاصل‌ضرب نقطه‌ای در معادلهٔ ۲۵ـ۱۸ برابر است با:

$$\vec{E} \cdot d\vec{s} = Eds\cos\theta = Eds \quad (۲۵ـ۲۰)$$

در نتیجه، با استفاده از معادله‌های ۲۵ـ۱۸ و ۲۵ـ۲۰، داریم

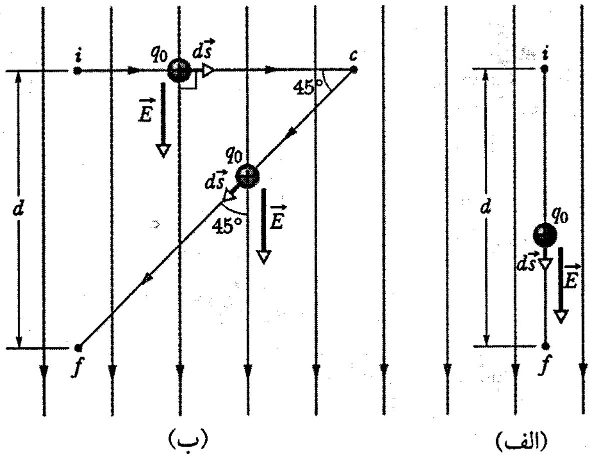
$$V_f - V_i = -\int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\int_i^f Eds \quad (۲۵ـ۲۱)$$

چون میدان یکنواخت است، E در طول مسیر ثابت است و می‌توان آن را از انتگرال خارج کرد:

$$V_f - V_i = -E\int_i^f ds \quad \Rightarrow$$

$$V_f - V_i = -Ed \quad \text{(پاسخ)}$$

که در آن مقدار انتگرال همان طول مسیر، d، است. در این نتیجه علامت منفی نشان می‌دهد که در شکل ۲۵ـ۶ الف پتانسیل نقطهٔ f از پتانسیل نقطهٔ i پایین‌تر است. این، یک نتیجهٔ کلی است: پتانسیل همیشه در طول مسیر همسو با خط‌های میدان الکتریکی کاهش می‌یابد.



شکل ۲۵ـ۶ مسألهٔ نمونهٔ ۲۵ـ۲. (الف) بار آزمون q_0 از نقطهٔ i تا نقطهٔ f در طول یک خط راست و همسو با میدان الکتریکی یکنواخت حرکت می‌کند. (ب) بار q_0 در همان میدان الکتریکی در طول مسیر icf حرکت می‌کند.

(ب) اکنون، اختلاف پتانسیل $V_f - V_i$ را با حرکت دادن بار آزمون مثبت q_0 از نقطهٔ i تا نقطهٔ f در طول مسیر icf نشان داده شده در شکل ۲۵ـ۶ ب، پیدا کنید.

حل: **نکتهٔ کلیدی** مربوط به قسمت (الف) در اینجا نیز صادق است، با این تفاوت که در اینجا بار آزمون را در طول مسیری متشکل از دو خط ic و cf حرکت می‌دهیم. در تمام نقطه‌های روی خط ic جابه‌جایی بار آزمون $d\vec{s}$، بر $\vec{E}$ عمود است. بنابراین، θ، زاویهٔ میان $\vec{E}$ و $d\vec{s}$ برابر با ۹۰ درجه و حاصل‌ضرب نقطه‌ای $\vec{E} \cdot d\vec{s}$ برابر با صفر است. در این صورت، معادلهٔ ۲۵ـ۱۸ نشان می‌دهد که نقطه‌های i و c دارای پتانسیل یکسان‌اند، یعنی $V_c - V_i = 0$.

برای خط cf، داریم $\theta = 45°$ و با استفاده از معادلهٔ ۲۵ـ۱۸ نتیجه می‌گیریم ک

$$V_f - V_i = -\int_c^f \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\int_c^f E(\cos ۴۵^\circ) d\vec{s} \Rightarrow$$

$$V_f - V_i = -E(\cos ۴۵^\circ)\int_c^f ds$$

در این معادله حاصل انتگرال همان طول خط cf است؛ با توجه به شکل ۲۵ـ۶ ب، این طول برابر است با $d/\sin ۴۵^\circ$. در نتیجه، داریم

$$V_f - V_i = -E(\cos ۴۵^\circ)\frac{d}{\sin ۴۵^\circ} \Rightarrow$$

(پاسخ) $$V_f - V_i = -Ed$$

این، همان نتیجهٔ به دست آمده در قسمت (الف) است، که باید هم چنین باشد؛ اختلاف پتانسیل میان دو نقطه به مسیر وصل کنندهٔ دو نقطه بستگی ندارد.

یادآوری: وقتی می‌خواهید اختلاف پتانسیل میان دو نقطه را با حرکت دادن بار آزمون در بین آنها به دست آورید برای صرفه‌جویی در وقت و انرژی می‌توانید مسیری را انتخاب کنید که کاربرد معادلهٔ ۲۵ـ۱۸ را آسان‌تر کند.

۲۵ـ۵ پتانسیل ناشی از یک بار نقطه‌ای

اکنون، می‌خواهیم با استفاده از معادلهٔ ۲۵ـ۱۸ رابطهٔ مربوط به V، پتانسیل الکتریکی را در فضای پیرامون یک ذرهٔ باردار، نسبت به پتانسیل صفر در بی‌نهایت، پیدا کنیم. نقطهٔ P را به فاصلهٔ R از یک ذرهٔ ثابت با بار مثبت q (شکل ۲۵ـ۷) در نظر می‌گیریم. برای استفاده از معادلهٔ ۲۵ـ۱۸، فرض می‌کنیم بار آزمون مثبت $q_۰$ را از نقطهٔ P تا بی‌نهایت حرکت می‌دهیم. چون شکل مسیر انتخاب شده اهمیتی ندارد، ساده‌ترین مسیر، یعنی خطی را که در راستای شعاع از ذرهٔ ثابت واقع در نقطهٔ P تا بی‌نهایت امتداد دارد، انتخاب می‌کنیم.

برای استفاده از معادلهٔ ۲۵ـ۱۸ باید حاصل‌ضرب نقطه‌ای زیر را حساب کنیم

$$\vec{E} \cdot d\vec{s} = E\cos\theta ds \qquad (۲۵ـ۲۲)$$

جهت میدان الکتریکی $\vec{E}$ در شکل ۲۵ـ۷ در راستای شعاع و از ذرهٔ ثابت به برون سو است. بنابراین، جابه‌جایی دیفرانسیلی ذرهٔ آزمون $d\vec{s}$، در طول مسیر نیز در جهت $\vec{E}$ است. در نتیجه، در معادلهٔ ۲۵ـ۲۲، داریم $\theta = ۰$ و $\cos\theta = ۱$. چون این مسیر در راستای شعاع است، ds را به صورت dr می‌نویسیم. پس، با جانشانی حدود R و ∞، معادلهٔ ۲۵ـ۱۸ را می‌توان چنین نوشت:

$$V_f - V_i = -\int_R^\infty E dr \qquad (۲۵ـ۲۳)$$

اکنون می‌نویسیم $V_f = ۰$ (در بی‌نهایت) و $V_i = V$ (در فاصلهٔ R). آنگاه، بزرگی میدان الکتریکی در محل بار آزمون را، از معادلهٔ ۲۳ـ۳ به صورت زیر جانشین می‌کنیم:

$$E = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{q}{r^۲} \qquad (۲۵ـ۲۴)$$

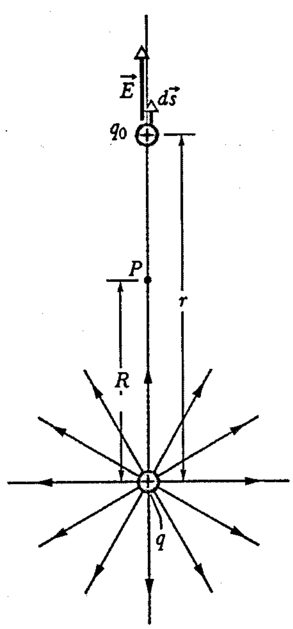
با انجام دادن این تغییرات و استفاده از معادلهٔ ۲۵ـ۲۳، داریم

$$۰ - V = -\frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰}\int_R^\infty \frac{۱}{r^۲} dr = \frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰}\left[\frac{۱}{r}\right]_R^\infty \Rightarrow$$

$$۰ - V = -\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{q}{R} \qquad (۲۵ـ۲۵)$$

پس از حل کردن این معادله نسبت به V و عوض کردن R با r، خواهیم داشت

$$V = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{q}{r} \qquad (۲۵ـ۲۶)$$



شکل ۲۵ـ۷ بار نقطه‌ای مثبت q در نقطهٔ P یک میدان الکتریکی $\vec{E}$ و یک پتانسیل الکتریکی V ایجاد می‌کند. پتانسیل را با حرکت دادن بار آزمون $q_۰$ از نقطهٔ P تا بی‌نهایت پیدا می‌کنیم. در شکل، بار آزمون به فاصلهٔ r از بار نقطه‌ای، در حین جابه‌جایی دیفرانسیلی $d\vec{s}$ نشان داده شده است.

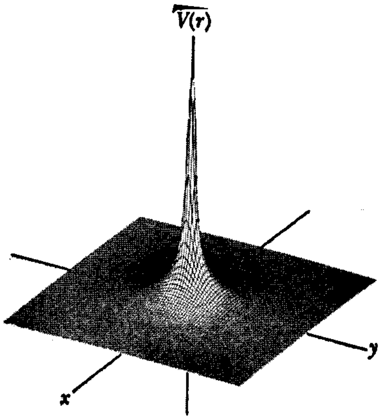
این، معادلهٔ پتانسیل الکتریکی V ناشی از یک ذرهٔ با بار q، در فاصلهٔ شعاعی r از ذره است.

اگرچه معادلهٔ ۲۵ـ۲۶ برای یک ذرهٔ با بار مثبت به دست آمد، این نتیجه در مورد ذرهٔ با بار منفی هم صادق است و در این حالت q کمیتی منفی خواهد بود. توجه کنید که علامت V با علامت q یکی است:

◄ ذرهٔ با بار مثبت پتانسیل الکتریکی مثبت و ذرهٔ با بار منفی پتانسیل الکتریکی منفی ایجاد می‌کند.

شکل ۲۵ـ۸ نمودار رایانه‌ای معادلهٔ ۲۵ـ۲۶ را برای یک ذرهٔ با بار مثبت نشان می‌دهد؛ مقادیر پتانسیل‌ها در روی محور قائم نشان داده شده‌اند. توجه کنید که وقتی $r \to 0$، بزرگی پتانسیل افزایش می‌یابد. در واقع، بنا به معادلهٔ ۲۵ـ۲۶، به ازای $r=0$، مقدار V بی‌نهایت می‌شود، هر چند شکل ۲۵ـ۸ باتلاقی کردن تدریجی نمودار با محور یک مقدار متناهی را نشان می‌دهد.

معادلهٔ ۲۵ـ۲۶ پتانسیل الکتریکی را در بیرون یا روی سطح خارجی یک کرهٔ باردار با توزیع بار متقارن نیز به دست می‌دهد. برای نشان دادن این موضوع می‌توان از یکی از قضیه‌های پوسته در بخش‌های ۲۲ـ۴ و ۲۴ـ۹ استفاده کرد و به جای توزیع بار کروی واقعی یک بار الکتریکی مساوی و متمرکز در مرکز آن قرار داد. در این صورت، همان معادلهٔ ۲۵ـ۲۶، با این شرط که هیچ یک از نقاط درون توزیع واقعی بار را در نظر نگیریم، به دست می‌آید.



شکل ۲۵ـ۸ نمودار رایانه‌ای پتانسیل الکتریکی $V(r)$ ناشی از بار نقطه‌ای مثبت واقع در مبداء مختصات صفحه xy. مقادیر پتانسیل‌ها در نقاط مختلف صفحه در روی محور قائم نشان داده شده‌اند. (خط‌های خمیده برای بهتر نشان دادن منحنی‌ها اضافه شده‌اند). مقدار بی‌نهایت پتانسیل V که از معادلهٔ ۲۵ـ۲۶ به ازای $r=0$ به دست می‌آید رسم نشده است.

روشهای مسأله حل کردن

روش ۳: تعیین اختلاف پتانسیل

برای پیدا کردن ΔV، اختلاف پتانسیل میان دو نقطه از میدان یک بار نقطه‌ای منزوی می‌توان مقدار پتانسیل در هر نقطه را با استفاده از معادلهٔ ۲۵ـ۲۶ محاسبه و سپس، نتیجه‌ها را از هم کم کرد. انرژی پتانسیل مرجع را هر چه انتخاب کنیم مقدار ΔV تغییری نمی‌کند چون در موقع انجام دادن عمل تفریق انرژی پتانسیل مرجع حذف می‌شود.

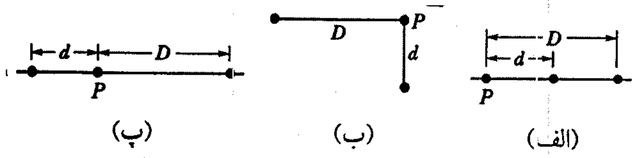
۲۵ـ۶ پتانسیل ناشی از گروه بارهای نقطه‌ای

پتانسیل خالص ناشی از گروه بارهای نقطه‌ای در یک نقطه را می‌توان به کمک اصل برهم نهی پیدا کرد. برای این کار، ابتدا پتانسیل حاصل از هر بار الکتریکی واقع در یک نقطهٔ معین را با استفاده از معادلهٔ ۲۵ـ۲۶ و با توجه به علامت بارها به طور مجزا محاسبه و سپس این پتانسیل‌ها را با هم جمع می‌کنیم. برای n بار الکتریکی، پتانسیل خالص برابر است با:

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_i} \quad (n \text{ بار نقطه‌ای}) \qquad (۲۵\text{ـ}۲۷)$$

در اینجا q_i مقدار بار i ام و r_i فاصلهٔ نقطهٔ مورد نظر از بار i ام است. جمع مربوط به معادلهٔ ۲۵ـ۲۷ یک جمع جبری است و مانند جمع به کار رفته در محاسبهٔ میدان الکتریکی مربوط به گروهی از بارهای نقطه‌ای، یک جمع برداری نیست. به همین دلیل، محاسبهٔ پتانسیل از محاسبهٔ میدان الکتریکی آسان‌تر است: برای ما جمع کردن چند کمیت نرده‌ای آسان‌تر از جمع کردن چند کمیت برداری با توجه به جهت‌ها و مؤلفه‌های آنهاست.

خودآزمایی ۴: شکل زیر، سه آرایش مربوط به دو پروتون را نشان می‌دهد. این آرایش‌ها را با توجه به پتانسیل الکتریکی خالص تولید شده توسط پروتون‌ها در نقطهٔ P، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



مسألهٔ نمونهٔ ۲۵ـ۳

پتانسیل الکتریکی حاصل از بارهای نقطه‌ای شکل ۲۵ـ۹ الف در نقطهٔ P، واقع در مرکز مربع، چیست؟ فرض کنید $d = 1.3\,\text{m}$ و بارهای الکتریکی عبارت‌اند از:

$$q_1 = +12\,\text{nC} \qquad q_3 = +31\,\text{nC}$$
$$q_2 = -24\,\text{nC} \qquad q_4 = +17\,\text{nC}$$

حل: در اینجا **نکتهٔ کلیدی** این است که پتانسیل الکتریکی V در نقطهٔ P برابر با مجموع جبری پتانسیل‌های الکتریکی حاصل از چهار بار نقطه‌ای است. (چون پتانسیل الکتریکی کمیتی نرده‌ای است، سمتگیری محل بارهای نقطه‌ای اهمیتی ندارد). بنابراین، با استفاده از معادلهٔ ۲۵ـ۲۷، داریم

$$V = \sum_{i=1}^{4} V_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r}+\frac{q_2}{r}+\frac{q_3}{r}+\frac{q_4}{r}\right)$$

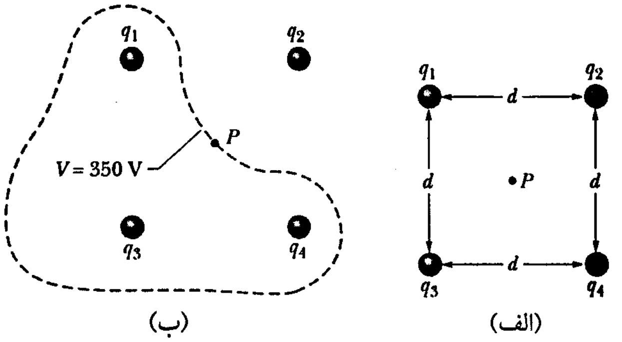
فاصلهٔ r مساوی با $d/\sqrt{2}$ یا $0.919\,\text{m}$، و مجموع بارها برابر است با:

$$q_1+q_2+q_3+q_4=(12-24+31+17)\times 10^{-9}\,\text{C} = 36\times 10^{-9}\,\text{C}$$

در نتیجه، پتانسیل برابر است با:

$$V = \frac{(8.99\times 10^{9}\,\text{N.m}^2/\text{C}^2)(36\times 10^{-9}\,\text{C})}{0.919\,\text{m}} \Rightarrow$$

$$V \approx 350\,\text{V}$$ (پاسخ)



شکل ۲۵ـ۹ مسألهٔ نمونهٔ ۲۵ـ۳. (الف) چهار بار الکتریکی در گوشه‌های یک مربع نگه داشته شده‌اند. (ب) منحنی خط‌چین بسته مقطع سطح هم پتانسیل شامل نقطهٔ P، واقع در صفحهٔ شکل را نشان می‌دهد. (منحنی به طور تقریبی رسم شده است).

در شکل ۲۵ـ۹ الف، در نزدیکی سه بار مثبت پتانسیل مثبت مقدار بسیار زیادی دارد و در نزدیکی تک بار منفی مقدار پتانسیل منفی خیلی زیاد است. بنابراین، درون مربع باید نقطه‌هایی وجود داشته باشند که دارای پتانسیلی برابر با پتانسیل در نقطهٔ P باشند. منحنی رسم شده در شکل ۲۵ـ۹ ب، محل تلاقی صفحهٔ شکل با سطح هم پتانسیل شامل نقطهٔ P را نشان می‌دهد. پتانسیل هر نقطه از این منحنی همان پتانسیل نقطهٔ P است.

مسألهٔ نمونهٔ ۲۵ـ۴

(الف) در شکل ۲۵ـ۱۰ الف، ۱۲ الکترون (هر یک با بار $-e$) به فاصلهٔ مساوی از یکدیگر بر روی دایره‌ای به شعاع R قرار گرفته‌اند. با در نظر گرفتن $V=0$ در بی‌نهایت، پتانسیل الکتریکی و میدان الکتریکی ناشی از این الکترون‌ها در مرکز دایره C، چیست؟

حل: در اینجا **نکتهٔ کلیدی** این است که پتانسیل الکتریکی V در نقطهٔ C برابر با مجموع جبری پتانسیل‌های الکتریکی ناشی از تمام الکترون‌هاست. (چون پتانسیل الکتریکی کمیتی نرده‌ای است، سمتگیری محل الکترون‌ها اهمیتی ندارد). بار منفی الکترون‌ها یکسان و برابر با $-e$ و فاصلهٔ همهٔ آنها از C برابر با R است، پس، با استفاده از معادلهٔ ۲۵ـ۲۷، داریم

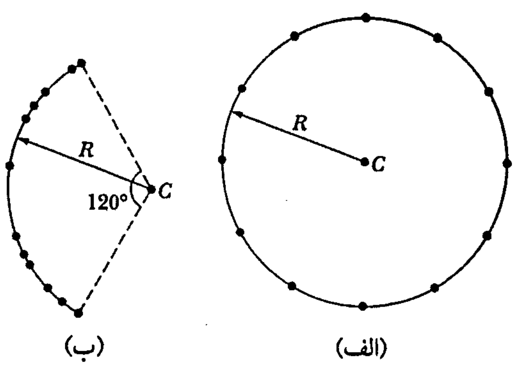
$$V = -12\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{R}$$ (پاسخ) (۲۵ـ۲۸)

در مورد میدان الکتریکی در نقطهٔ C، **نکتهٔ کلیدی** این است که میدان کمیتی برداری است و از این رو، سمتگیری محل الکترون‌ها اهمیت دارد. به خاطر وجود تقارن در شکل ۲۵ـ۱۰ الف، بردار میدان الکتریکی ناشی از هر الکترون در نقطهٔ C توسط میدان ناشی از الکترون واقع در طرف مقابل خنثی می‌شود. بنابراین، میدان الکتریکی برایند در نقطهٔ C برابر است با:

$$\vec{E} = 0$$ (پاسخ)

(ب) اگر الکترون‌ها روی دایره چنان حرکت داده شوند که با فاصله‌های نامساوی از یکدیگر بر روی یک کمان ۱۲۰ درجه قرار بگیرند (شکل ۲۵ـ۱۰ ب)، در این صورت، پتانسیل در نقطهٔ C چیست؟ میدان الکتریکی (در صورت وجود) در نقطهٔ C چه تغییری می‌کند؟

حل: پتانسیل باز هم از معادلهٔ ۲۵ـ۲۸ به دست می‌آید، زیرا فاصلهٔ C تا هر یک از الکترون‌ها تغییر نکرده اما سمتگیری محل آنها نامناسب است. در این حالت میدان الکتریکی دیگر صفر نیست، زیرا آرایش آنها متقارن نیست. اکنون، میدان برایندی وجود دارد که جهت آن به سوی توزیع بار است.



شکل ۲۵ـ۱۰ مسألهٔ نمونهٔ ۲۵ـ۴. (الف) ۱۲ الکترون به فاصلهٔ مساوی از یکدیگر بر روی دایره‌ای قرار گرفته‌اند. (ب) این الکترون‌ها به فاصله‌های نامساوی از هم بر روی کمانی از همان دایره واقع شده‌اند.

۷ـ۲۵ پتانسیل ناشی از دو قطبی الکتریکی

اکنون، با استفاده از معادلهٔ ۲۵ـ۲۷ پتانسیل ناشی از یک دوقطبی الکتریکی را در نقطهٔ اختیاری P در شکل ۲۵ـ۱۱ الف، پیدا می‌کنیم. در نقطهٔ P، بار نقطه‌ای مثبت (به فاصلهٔ $r_{(+)}$) پتانسیل $V_{(+)}$ و بار نقطه‌ای منفی (به فاصلهٔ $r_{(-)}$) پتانسیل $V_{(-)}$ را به وجود می‌آورد. در این صورت، پتانسیل خالص در نقطهٔ P با استفاده از معادلهٔ ۲۵ـ۲۷ برابر است با:

$$V = \sum_{i=1}^{2} V_i = V_{(+)} + V_{(-)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_{(+)}} + \frac{-q}{r_{(-)}}\right) \Rightarrow$$

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_{(-)} - r_{(+)}}{r_{(-)}r_{(+)}} \qquad (۲۵\text{ـ}۲۹)$$

دوقطبی‌های موجود در طبیعت ـ مانند بسیاری از مولکول‌ها که این خاصیت را دارند ـ خیلی کوچک‌اند. در نتیجه، معمولاً فقط نقاط نسبتاً دور از دوقطبی، یعنی شرط $r \gg d$ را که در آن d فاصلهٔ میان دو بار است، در نظر می‌گیریم. با این شرط تقریب‌های مربوط به شکل ۲۵ـ۱۱ ب عبارت‌اند از:

$$r_{(-)}r_{(+)} \approx r^2 \quad \text{و} \quad r_{(-)} - r_{(+)} \approx d\cos\theta$$

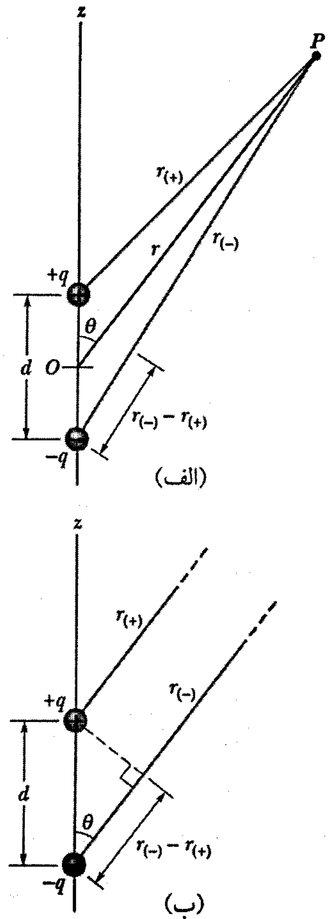
اگر این کمیت‌ها را در معادلهٔ ۲۵ـ۲۹ جانشانی کنیم مقدار تقریبی V به دست می‌آید:

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\cos\theta}{r^2}$$

که در آن مطابق شکل ۲۵ـ۱۱ الف، زاویهٔ θ نسبت به محور دوقطبی اندازه‌گیری شده است. اکنون، مقدار V را می‌توان از معادله زیر به دست آورد

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2} \qquad \text{(دوقطبی الکتریکی)} \qquad (۲۵\text{ـ}۳۰)$$ ■

که در آن p (مساوی با qd) بزرگی گشتاور دوقطبی الکتریکی $\vec{p}$ است، که در بخش ۲۳ـ۵ تعریف شد. بردار $\vec{p}$ در راستای محور دوقطبی و جهتش از بار منفی به سوی بار مثبت است. (بنابراین، θ نسبت به بردار $\vec{p}$ اندازه‌گیری می‌شود).



شکل ۲۵ـ۱۱ (الف) نقطهٔ P از نقطهٔ میانی یک دوقطبی، O، در فاصلهٔ r قرار دارد. خط OP با محور دوقطبی زاویهٔ θ می‌سازد. (ب) اگر P از دوقطبی دور باشد، خط‌های با طول‌های $r_{(+)}$ و $r_{(-)}$ تقریباً با خط با طول r موازی‌اند، و خط‌چین تقریباً بر خط با طول $r_{(-)}$ عمود است.

خودآزمایی ۵: فرض کنید سه نقطه به فاصلهٔ یکسان (و زیاد) r از مرکز دوقطبی شکل ۲۵ـ۱۱ قرار دارند: نقطهٔ a روی محور دوقطبی در بالای بار مثبت، نقطهٔ b روی محور در پایین بار منفی، و نقطهٔ c روی عمودمنصف خط واصل دو بار، واقع است. این نقطه‌ها را با توجه به پتانسیل الکتریکی حاصل از دوقطبی در آنجا، از بیشترین (مثبت ترین) تا کمترین مقدار، مرتب کنید.

گشتاور دوقطبی القایی

بسیاری از مولکول‌ها، مانند آب، گشتاورهای دوقطبی الکتریکی دایمی دارند. در مولکول‌های دیگر (که مولکول‌های ناقطبی نامیده می‌شوند) و در هر اتم منزوی مرکزهای بارهای مثبت و منفی برهم منطبق‌اند (شکل ۲۵ـ۱۲ الف) و در نتیجه، هیچ گشتاور دوقطبی الکتریکی‌ای به وجود نمی‌آید. اما هرگاه یک اتم یا یک مولکول ناقطبی را در یک میدان الکتریکی خارجی قرار دهیم، میدان مدارهای الکترونی را وا می‌پیچد و مرکزهای بارهای مثبت و منفی را از هم جدا می‌کند (شکل ۲۵ـ۱۲ ب). چون الکترون‌ها دارای بار منفی‌اند در خلاف میدان الکتریکی تمایل به جابه‌جایی دارند. این جابه‌جایی یک گشتاور دوقطبی $\vec{p}$ به وجود می‌آورد که با میدان الکتریکی همسو است. در اینجا گفته می‌شود که در اثر میدان الکتریکی این گشتاور یک گشتاور دوقطبی القایی و اتم یا مولکول، اتم یا مولکول قطبیده است. (یعنی یک طرفش مثبت و طرف دیگرش منفی است). هرگاه میدان را حذف کنیم گشتاور دوقطبی القایی و خاصیت قطبیدگی از میان می‌رود.

۲۵ـ۸ پتانسیل ناشی از توزیع بار پیوسته

هرگاه توزیع بار q پیوسته باشد (مانند یک میلهٔ باریک یا یک قرص که روی آن بار الکتریکی به طور یکنواخت توزیع شده است)، برای پیدا کردن پتانسیل V در نقطهٔ P نمی‌توان از عمل جمع کردن در معادلهٔ ۲۵ـ۲۷ استفاده کرد. در این حالت، باید یک عنصر دیفرانسیلی بار dq انتخاب و پتانسیل dV ناشی از dq در نقطهٔ P را معین کنیم. سپس، از رابطهٔ حاصل روی کل توزیع بار انتگرال بگیریم.

باز هم صفر پتانسیل را در بی‌نهایت اختیار می‌کنیم. اگر عنصر بار dq را به صورت یک بار نقطه‌ای در نظر بگیریم، برای پیدا کردن پتانسیل dV ناشی از dq در نقطهٔ P، می‌توانیم از معادلهٔ ۲۵ـ۲۶ استفاده کنیم:

$$dV = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{dq}{r} \qquad (\text{مثبت یا منفی } dq) \tag{۲۵ـ۳۱}$$

در اینجا r فاصلهٔ میان P و dq است. برای تعیین پتانسیل کل V در نقطهٔ P، از پتانسیل dV انتگرال می‌گیریم تا مجموع پتانسیل‌های ناشی از تمام عنصرهای بار به دست آید:

$$V = \int dV = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\int\frac{dq}{r} \tag{۲۵ـ۳۲}$$

■

این انتگرال باید روی کل توزیع بار گرفته شود. توجه کنید که چون پتانسیل الکتریکی کمیتی نرده‌ای است، در معادلهٔ ۲۵ـ۳۲ هیچ مؤلفهٔ برداری در نظر گرفته نمی‌شود. اکنون دو توزیع بار پیوسته، یعنی یک خط باردار و یک قرص باردار را در نظر می‌گیریم.

خط باردار

در شکل ۲۵ـ۱۳ الف، یک میلهٔ باریک نارسانا به طول L دارای بار مثبت یکنواخت با چگالی خطی بار λ است. می‌خواهیم V، پتانسیل الکتریکی ناشی از میله را در نقطهٔ P به فاصلهٔ عمودی d از انتهای چپ میله معین کنیم.

عنصر دیفرانسیلی طول dx میله را، مطابق شکل ۲۵ـ۱۳ ب، در نظر می‌گیریم. بار الکتریکی دیفرانسیلی این عنصر میله (یا هر عنصر دیگر آن) برابر است با:

$$dq = \lambda dx \tag{۲۵ـ۳۳}$$

این عنصر، پتانسیل الکتریکی dV را در نقطهٔ P به فاصلهٔ $r=(x^۲+d^۲)^{\frac{۱}{۲}}$ از عنصر تولید می‌کند. با در نظر گرفتن این عنصر به‌صورت یک بار نقطه‌ای و با استفاده از معادلهٔ ۲۵ـ۳۱ پتانسیل dV را می‌توان چنین به‌دست آورد:

$$dV = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{dq}{r} = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{\lambda dx}{(x^۲+d^۲)^{\frac{۱}{۲}}} \tag{۲۵ـ۳۴}$$

چون بار روی میله مثبت و در بی‌نهایت $V=۰$ انتخاب شده است، با توجه به مطالب بخش ۲۵ـ۵ می‌دانیم که dV در معادلهٔ ۲۵ـ۳۴ باید مثبت باشد.

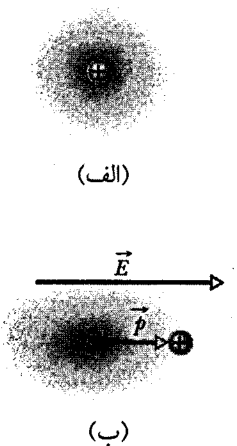
اکنون، پتانسیل کل V ناشی از میله در نقطهٔ P را با انتگرال‌گیری از معادلهٔ ۲۵ـ۳۴ در طول میله، از $x=۰$ تا $x=L$، و با استفاده از انتگرال ۱۷ در پیوست ث کتاب، پیدا می‌کنیم. در نتیجه، داریم

$$V = \int dV = \int_۰^L \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{\lambda}{(x^۲+d^۲)^{\frac{۱}{۲}}}\,dx$$

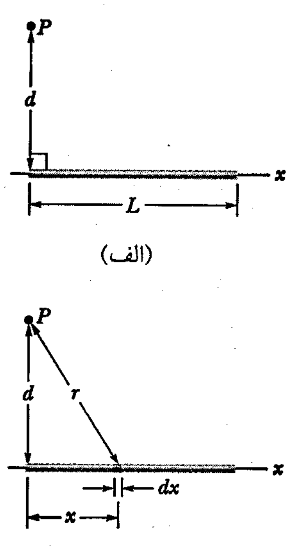
$$V = \frac{\lambda}{۴\pi\varepsilon_۰}\int_۰^L \frac{dx}{(x^۲+d^۲)^{\frac{۱}{۲}}}$$

$$V = \frac{\lambda}{۴\pi\varepsilon_۰}\left[\ln\left(x + (x^۲+d^۲)^{\frac{۱}{۲}}\right)\right]_۰^L$$

$$V = \frac{\lambda}{۴\pi\varepsilon_۰}\left[\ln\left(L + (L^۲+d^۲)^{\frac{۱}{۲}}\right) - \ln d\right]$$



شکل ۲۵ـ۱۲ (الف) نمودار یک اتم، که با هستهٔ با بار مثبت (سیاه رنگ) و الکترون‌های با بار منفی (خاکستری رنگ) نشان داده شده است. مرکزهای بارهای مثبت و منفی برهم منطبق‌اند. (ب) هرگاه اتم را در میدان الکتریکی خارجی $\vec{E}$ قرار دهیم مدارهای الکترونی واپیچیده می‌شوند، به گونه‌ای که مرکزهای بارهای مثبت و منفی دیگر برهم منطبق نمی‌مانند. در نتیجه، یک گشتاور دوقطبی القایی $\vec{p}$ ظاهر می‌شود. در این شکل واپیچش به‌نحوی اغراق‌آمیز نشان داده شده است.



شکل ۲۵ـ۱۳ (الف) یک میلهٔ باریک با بار یکنواخت، در نقطهٔ P، پتانسیل الکتریکی V را تولید می‌کند. (ب) یک عنصر بار در نقطهٔ P، پتانسیل دیفرانسیلی dV را به وجود می‌آورد.

این نتیجه را با استفاده از رابطهٔ کلی $\ln A - \ln B = \ln(A/B)$ می‌توان ساده کرد. در نتیجه، خواهیم داشت

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln \left[\frac{L + (L^2 + d^2)^{\frac{1}{2}}}{d}\right] \qquad (۳۵\text{-}۲۵)$$

پتانسیل V، چون برابر با مجموع مقادیر مثبت dV است، باید مثبت باشد ـ اما آیا معادلهٔ ۲۵ـ۳۵ برای V مقدار مثبتی را به دست می‌دهد؟ چون شناسهٔ لگاریتم از یک بیشتر است، حاصل لگاریتم عددی مثبت و در نتیجه، V واقعاً مثبت است.

قرص باردار

در بخش ۲۳ـ۷ بزرگی میدان الکتریکی را در نقاط واقع بر محور مرکزی یک قرص پلاستیکی به شعاع R، که دارای چگالی سطحی بار یکنواخت σ در یک رویهٔ قرص است، حساب کردیم. در اینجا می‌خواهیم رابطهٔ مربوط به $V(z)$، پتانسیل الکتریکی در هر نقطه از محور مرکزی را به دست آوریم.

در شکل ۲۵ـ۱۴، یک عنصر دیفرانسیلی شامل حلقه‌ای تخت به شعاع R' و با پهنای شعاعی dR' در نظر می‌گیریم. بزرگی بار الکتریکی این حلقه برابر است با:

$$dq = \sigma(2\pi R')(dR')$$

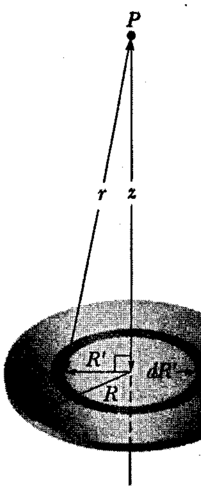
که در آن $(2\pi R')(dR')$ مساحت سطح رویی حلقه است. فاصلهٔ تمام بخش‌های این عنصر باردار از نقطهٔ P واقع بر روی محور قرص یکسان و برابر با r است. به کمک شکل ۲۵ـ۱۴ و با استفاده از معادلهٔ ۲۵ـ۳۱ می‌توان سهم این حلقه را در پتانسیل الکتریکی نقطهٔ P نوشت:

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma(2\pi R')(dR')}{\sqrt{z^2 + R'^2}} \qquad (۳۶\text{-}۲۵)$$

پتانسیل خالص در نقطهٔ P با جمع کردن (از راه انتگرال‌گیری) سهم پتانسیل تمام نوارهای حلقه‌ای از $R'=0$ تا $R'=R$ به دست می‌آید:

$$V = \int dV = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{R'dR'}{\sqrt{z^2 + R'^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{z^2 + R^2} - z\right) \qquad (۳۷\text{-}۲۵)$$

توجه کنید که کمیت متغیر در انتگرال معادلهٔ ۲۵ـ۳۷، R' است نه z، زیرا z در حین انتگرال‌گیری در روی سطح قرص ثابت می‌ماند. (همچنین، توجه کنید که در محاسبهٔ انتگرال فرض شده است $z \geq 0$).



شکل ۲۵ـ۱۴ نمودار یک قرص پلاستیکی به شعاع R، که یک رویهٔ آن با چگالی سطحی بار σ باردار شده است. می‌خواهیم V، پتانسیل نقطهٔ P واقع بر محور مرکزی قرص را پیدا کنیم.

روشهای مسأله حل کردن

روش ۴: اشکال‌های مربوط به علامت‌ها در پتانسیل الکتریکی

هنگامی که پتانسیل ناشی از یک خط باردار یا هر پیکربندی بار پیوستهٔ دیگر را در نقطهٔ P حساب می‌کنید، ممکن است در مورد علامت‌ها با اشکال مواجه شوید. در اینجا به یک راهنمایی کلی دربارهٔ انتخاب علامت‌ها توجه کنید.

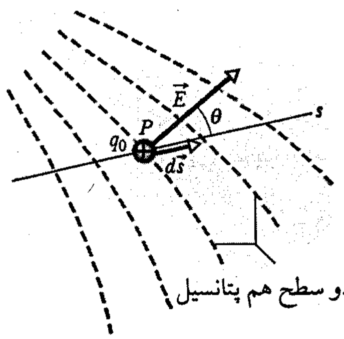
اگر بار الکتریکی منفی باشد، آیا نمادهای dq و λ باید معرف کمیت‌های منفی باشند، یا با استفاده از $-dq$ و $-\lambda$ باید علامت‌ها را به طور صریح مشخص کرد؟ شما می‌توانید از هر دو روش استفاده کنید مادام که معنای نمادگذاری را در خاطر داشته باشید، به طوری که وقتی به مرحلهٔ پایانی رسیدید بتوانید علامت V را به درستی تعبیر کنید.

روش دیگری که می‌توان به کار برد این است که وقتی کل توزیع بار یک علامت دارد از نمادهای dq و λ فقط به عنوان بزرگی کمیت‌ها استفاده کنید. نتیجهٔ محاسبه بزرگی V را در نقطهٔ P به دست می‌دهد. در این صورت، با توجه به علامت بار الکتریکی علامت مربوط به V را اضافه کنید. (اگر پتانسیل در بی‌نهایت صفر اختیار شود پتانسیل حاصل از بار مثبت، مثبت و پتانسیل حاصل از بار منفی، منفی است).

هرگاه در هنگام محاسبهٔ پتانسیل حدود انتگرال را وارون کنید برای V مقداری منفی به دست خواهید آورد. در این حالت، بزرگی پتانسیل درست است، اما علامت منها را حذف کنید. سپس، علامت مناسب V را با توجه به علامت بار الکتریکی معین کنید. به عنوان مثال، اگر در بالای معادلهٔ ۲۵ـ۳۵ حدود انتگرال را وارون کنیم در نتیجهٔ محاسبه یک علامت منها ظاهر خواهد شد. در این صورت، علامت منها را باید حذف کنیم و توجه داشته باشیم که پتانسیل مثبت است زیرا بار الکتریکی به وجود آورندهٔ آن مثبت است.

۲۵ـ۹ محاسبهٔ میدان الکتریکی با استفاده از پتانسیل

در بخش ۲۵ـ۴ دیدیم که با معلوم بودن میدان الکتریکی در طول یک مسیر از نقطهٔ مرجع تا نقطهٔ f، چگونه می‌توان پتانسیل الکتریکی نقطهٔ f را به دست آورد. در این بخش می‌خواهیم روش دیگری را معرفی کـنیم ـ یعنی، می‌خواهیم با معلوم بودن پتانسیل میدان الکتریکی را به دست آوریم. با توجه به شکل ۲۵ـ۳، حل کردن این مسأله به روش ترسیمی آسان است: هرگاه پتانسیل V در تمام نقاط نزدیک یک مـجموعهٔ بـار در دست باشد، می‌توان دسته‌ای از سطح‌های هم پتانسیل را رسم کرد. در این صورت، خط‌های میدان که عمود بر این سطح‌ها ترسیم می‌شوند، تغییرات $\vec{E}$ را نشان می‌دهد. آنچه در اینجا مورد نظر است، یافتن هم ارز ریاضی این روش ترسیمی است.



شکل ۲۵ـ۱۵ بار آزمون q_0 مسـافت $d\vec{s}$ را از یک سطح هم پتانسیل تا سطح دیگر می‌پیماید. (برای وضوح بیشتر، فاصلهٔ میان سطح‌ها بـه نـحوی اغـراق‌آمـیز نشـان داده شـده است). جابه‌جایی $d\vec{s}$ با میدان الکتریکی $\vec{E}$ زاویـهٔ θ می‌سازد.

شکل ۲۵ـ۱۵، مقطع دسته‌ای از سطح‌های هم پتانسیل نزدیک به هم را، که اختلاف پتانسیل میان هر دو سطح مجاور dV است، نشان می‌دهد. همان طور که در شکل می‌بینیم، میدان $\vec{E}$ در هر نقطه مانند P، بر سطح هم پتانسیل گذرنده از نقطهٔ P عمود است.

فرض کنید بار آزمون مثبت q_0 از یک سطح هم پتانسیل تا سطح مجاور به اندازهٔ $d\vec{s}$ جابه‌جا شود. با توجه به معادلهٔ ۲۵ـ۷، دیده می‌شود که کار انجام شده توسط میدان الکتریکی روی بار آزمون در حین حرکت کردن برابر با $-q_0 dV$ است. معادلهٔ ۲۵ـ۱۶ و شکل ۲۵ـ۱۵ نشان می‌دهد که کار انجام شده توسط میدان الکتریکی را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب نرده‌ای $(q_0\vec{E}).d\vec{s}$ یا $q_0E(\cos\theta)ds$ نیز نوشت. با مساوی قرار دادن این دو رابطهٔ مربوط به کار، داریم

$$-q_0dV = q_0E(\cos\theta)ds \qquad (۲۵ـ۳۸)$$

یا

$$E\cos\theta = -\frac{dV}{ds} \qquad (۲۵ـ۳۹)$$

چون $E\cos\theta$ مؤلفهٔ $\vec{E}$ در راستای $d\vec{s}$ است، معادلهٔ ۲۵ـ۳۹ به صورت زیر نوشته می‌شود

$$E_s = -\frac{\partial V}{\partial s} \qquad (۲۵ـ۴۰)$$ ■

در اینجا یک شاخص پایین به E اضافه شده و از نمادهای مشتق جزئی استفاده شده است تا تأکید شود که معادلهٔ ۲۵ـ۴۰ فقط مربوط به تغییر V در راستای یک محور مشخص (که در اینجا محور s نام دارد) و مؤلفهٔ $\vec{E}$ در راستای آن محور، است. به عبارتی، معادلهٔ ۲۵ـ۴۰ (که در واقع معکوس معادلهٔ ۲۵ـ۱۸ است)، بیان کنندهٔ این موضوع است که:

◄ مؤلفهٔ $\vec{E}$ در هر راستا برابر با آهنگ تغییر پتانسیل الکتریکی نسبت به فاصله در آن راستا، با علامت منفی، است.

هرگاه محور s را، به نوبت، محورهای x، y و z بگیریم، مؤلفه‌های x، y و z میدان الکتریکی $\vec{E}$ در هر نقطه عبارت خواهند بود از:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad ، \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad و \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \qquad (۲۵ـ۴۱)$$ ■

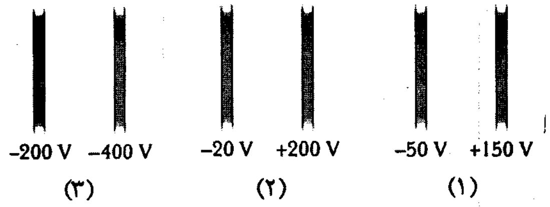
بنابراین، اگر V برای تمام نقاط پیرامون یک توزیع بار معلوم باشد ـ یعنی اگر تابع $V(x,y,z)$ را بدانیم ـ می‌توانیم با مشتق‌گیری جزئی مؤلفه‌های $\vec{E}$، و در نتیجه خود $\vec{E}$ در هر نقطه را به دست آوریم.

در حالت ساده‌ای که میدان الکتریکی $\vec{E}$ یکنواخت باشد، معادلهٔ ۲۵ـ۴۰ به صورت زیر نوشته می‌شود

$$E = -\frac{\Delta V}{\Delta s} \qquad (۲۵ـ۴۲)$$

که در آن s بر سطح هم پتانسیل عمود است. مؤلفهٔ میدان الکتریکی در راستای موازی با سطح‌های هم پتانسیل صفر است.

خودآزمایی ۶: شکل زیر، سه زوج صفحهٔ موازی، به فاصلهٔ یکسان از یکدیگر را همراه با پتانسیل الکتریکی هر صفحه نشان می‌دهد. میدان الکتریکی میان صفحه‌ها یکنواخت و بر صفحه‌ها عمود است. (الف) این زوج‌ها را با توجه به بزرگی میدان الکتریکی میان صفحه‌ها، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید. (ب) در کدام زوج صفحه‌ها جهت میدان الکتریکی به سمت راست است؟ (پ) هرگاه الکترونی در نقطهٔ وسط زوج صفحه‌های شماره ۳ رها شود، آیا در آنجا می‌ماند، با تندی ثابت به سمت راست حرکت می‌کند، با تندی ثابت به سمت چپ حرکت می‌کند، به سمت راست شتاب می‌گیرد، یا به سمت چپ شتاب می‌گیرد؟



مسألهٔ نمونهٔ ۲۵ـ۵

پتانسیل الکتریکی هر نقطه از محور مرکزی یک قرص با بار یکنواخت، از معادلهٔ ۲۵ـ۳۷، به صورت زیر به دست می‌آید

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{z^2 + R^2} - z)$$

با استفاده از این معادله، رابطهٔ مربوط به میدان الکتریکی در هر نقطه از محور قرص را به دست آورید.

حل: می‌خواهیم میدان الکتریکی $\vec{E}$ را به صورت تابعی از فاصلهٔ z در راستای محور قرص به دست آوریم. به ازای هر مقدار z میدان الکتریکی $\vec{E}$ باید در راستای محور باشد زیرا قرص نسبت به این محور دارای تقارن دایره‌ای است. پس، ما می‌خواهیم E_z، مؤلفهٔ میدان $\vec{E}$ را در راستای z پیدا کنیم. در اینجا **نکتهٔ کلیدی** این است که این مؤلفه برابر با آهنگ تغییر پتانسیل الکتریکی نسبت به فاصلهٔ z، با علامت منفی است. بنابراین، با استفاده از سومین معادلهٔ ۲۵ـ۴۱، می‌توان نوشت:

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{d}{dz}(\sqrt{z^2 + R^2} - z) \Rightarrow$$

$$E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right) \qquad \text{(پاسخ)}$$

این، همان رابطه‌ای است که در بخش ۲۳ـ۷ با انتگرال‌گیری و با استفاده از قانون کولن، به دست آمده است.

۲۵ـ۱۰ انرژی پتانسیل الکتریکی دستگاه بارهای نقطه‌ای

در بخش ۲۵ـ۱ ، دربارهٔ انرژی پتانسیل الکتریکی یک ذرهٔ باردار به صورت کار انجام شده توسط یک نیروی الکتروستاتیکی روی آن ذره، بحث کردیم. در آن بخش فرض کردیم که بارهای الکتریکی ایجاد کنندهٔ نیرو در جای خود ثابت باشند، به گونه‌ای که نیرو و میدان الکتریکی متناظر با آن، تحت تأثیر حضور بار آزمون قرار نگیرد. در این بخش می‌توان با دید وسیع‌تری به موضوع نگریست و انرژی پتانسیل الکتریکی دستگاه بارهای الکتریکی را که از میدان الکتریکی تولید شده توسط ۰ ان بارها ناشی می‌شود، پیدا کرد.

به عنوان مثالی ساده، فرض کنید دو جسم با بارهای الکتریکی همنام را به یکدیگر نزدیک می‌کنیم. کاری که باید انجام بدهیم به صورت انرژی پتانسیل الکتریکی در دستگاه دو جسمی (به شرط تغییر نکردن انرژی جنبشی دو جسم) ذخیره می‌شود. در این حالت، اگر بارهای الکتریکی را رها کنیم، می‌توانیم تمام یا بخشی از این انرژی ذخیره شده را به صورت انرژی جنبشی اجسام باردار در حین دور شدن از یکدیگر، به دست آوریم.

انرژی پتانسیل الکتریکی یک دستگاه متشکل از بارهای نقطه‌ای، که به وسیلهٔ نیروهای مشخص نشده در جای خود ثابت شده‌اند، چنین تعریف می‌شود:

◀ انرژی پتانسیل الکتریکی دستگاهی متشکل از بارهای الکتریکی نقطه‌ای ثابت برابر است با مقدار کاری که در حین آوردن هر بار از فاصلهٔ بی‌نهایت، باید برای گردآوری دستگاه توسط عامل خارجی انجام شود.

فرض می‌کنیم که بارها هم در مکان‌های بی‌نهایت دور آغازی و هم در پیکربندی گردآوری شدهٔ نهایی خود ساکن باشند.

شکل ۲۵-۱۶، دو بار نقطه‌ای q_1 و q_2 را به فاصلهٔ r از یکدیگر نشان می‌دهد. برای تعیین انرژی پتانسیل الکتریکی این دستگاه شامل دو بار، باید دستگاه را در ذهن خود طوری ترتیب دهیم که در آغاز هر دو بار در فاصلهٔ بی‌نهایت در حال سکون باشند. وقتی بار q_1 را از بی‌نهایت می‌آوریم و آن را در جای خود قرار می‌دهیم کاری انجام نمی‌دهیم، زیرا هیچ نیروی الکتروستاتیکی‌ای به q_1 وارد نمی‌شود. اما هنگامی که پس از آن، q_2 را از بی‌نهایت می‌آوریم و در جای خود قرار می‌دهیم باید کار انجام دهیم، زیرا q_1 به q_2 در حین حرکت کردن یک نیروی الکتروستاتیکی وارد می‌کند.

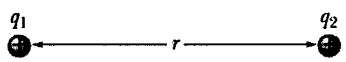
این مقدار کار را با استفاده از معادلهٔ ۲۵-۸ و حذف کردن علامت منفی (که در نتیجه، معادله به جای کار میدان، کار انجام شده توسط عامل خارجی را به دست بدهد) و جانشانی q_2 با بار کلی q، می‌توان حساب کرد. در این صورت، کار عامل خارجی q_2V است، که در آن V پتانسیل تولید شده توسط q_1 در نقطهٔ قرار گرفتن q_2 است. با توجه به معادلهٔ ۲۵-۲۶، مقدار این پتانسیل برابر است با:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r}$$

پس، بنا به تعریف، انرژی پتانسیل الکتریکی زوج بار نقطه‌ای شکل ۲۵-۱۶ برابر است با:

$$U = W = q_2V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r} \qquad (۲۵\text{-}۴۳)$$ ■

اگر بارهای الکتریکی همنام باشند، باید با هُل دادن آنها به سوی هم برای غلبه کردن بر نیروی دافعهٔ متقابل، کار مثبت انجام داد. از این رو، همان طور که معادلهٔ ۲۵-۴۳ نشان می‌دهد، انرژی پتانسیل دستگاه مثبت است. اگر بارهای الکتریکی ناهمنام باشند، باید برای غلبه کردن بر نیروی جاذبهٔ متقابل و آوردن بارها به حالت سکون، کار منفی انجام داد. در این صورت، انرژی پتانسیل دستگاه منفی است. مسألهٔ نمونهٔ ۲۵-۶، نشان می‌دهد که چگونه این فرایند در حالت‌های بیش از دو بار الکتریکی بسط داده می‌شود.



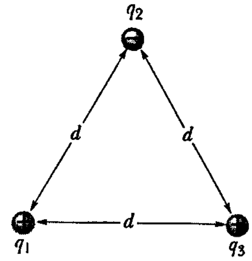
شکل ۲۵-۱۶ دو بار الکتریکی به فاصلهٔ ثابت r از هم نگه داشته شده‌اند.

مسألهٔ نمونهٔ ۲۵-۶

شکل ۲۵-۱۷، سه بار الکتریکی نقطه‌ای را نشان می‌دهد که توسط نیروهای نشان داده نشده در جای خود ثابت نگه داشته شده‌اند. انرژی پتانسیل الکتریکی این دستگاه بارها U، چقدر است؟ فرض کنید که:

$d=۱۲\text{cm}$ ، $q_1=+q$ ، $q_2=-۴q$ ، $q_3=+۲q$ و $q=۱۵۰\text{nC}$

حل: در اینجا **نکتهٔ کلیدی** این است که انرژی پتانسیل دستگاه، U، برابر است با مقدار کاری که ما باید در حین آوردن هر بار الکتریکی از فاصلهٔ بی‌نهایت، برای گردآوری دستگاه انجام دهیم. بنابراین، در ذهن خود دستگاه شکل ۲۵-۱۷ را طوری ترتیب می‌دهیم که در آغاز یکی از بارها، مثلاً q_1، در جای خود و بارهای دیگر در فاصلهٔ بی‌نهایت باشند. سپس بار دیگر، مثلاً q_2، را از بی‌نهایت می‌آوریم و در جای خود قرار می‌دهیم. با استفاده معادلهٔ ۲۵-۴۳ و نشاندن d به جای r، انرژی پتانسیل U_{12}، مربوط به زوج بارهای q_1 و q_2 برابر است با:



شکل ۲۵-۱۷ مسألهٔ نمونه ۲۵-۶. سه بار الکتریکی در رأس‌های یک مثلث با ضلع‌های مساوی به طور ثابت نگه داشته شده‌اند. انرژی پتانسیل الکتریکی این دستگاه چقدر است؟

$$U_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{d}$$

اکنون q_3، آخرین بار نقطه‌ای را از فاصلهٔ بی‌نهایت تا جای خودش می‌آوریم.

کار انجام شده در این مرحلهٔ نهایی برابر است با مجموع کاری که برای آوردن $q_۳$ به نزدیک $q_۱$ و آوردن $q_۳$ به نزدیک $q_۲$ باید انجام داد. با توجه به معادلهٔ ۲۵-۴۳ و قرار دادن d به جای r، این مجموع برابر است با:

$$W_{۱۳} + W_{۲۳} = U_{۱۳} + U_{۲۳} = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{q_۱q_۳}{d} + \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{q_۲q_۳}{d}$$

انرژی پتانسیل کل دستگاه، سه بار، U، برابر با مجموع انرژی‌های پتانسیل وابسته به سه زوج بار است. این مجموع (که به ترتیب نزدیک شدن بارها به یکدیگر بستگی ندارد) برابر است با:

$$U = U_{۱۲} + U_{۱۳} + U_{۲۳}$$

$$U = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\left[\frac{(+q)(-۴q)}{d} + \frac{(+q)(+۲q)}{d} + \frac{(-۴q)(+۲q)}{d}\right]$$

$$U = -\frac{۱۰q^۲}{۴\pi\varepsilon_۰ d} = -\frac{(۱۰)(۸/۹۹\times ۱۰^۹ \mathrm{N.m^۲/C^۲})(۱۵۰\times ۱۰^{-۹}\mathrm{C})^۲}{۰/۱۲\mathrm{m}} \Rightarrow$$

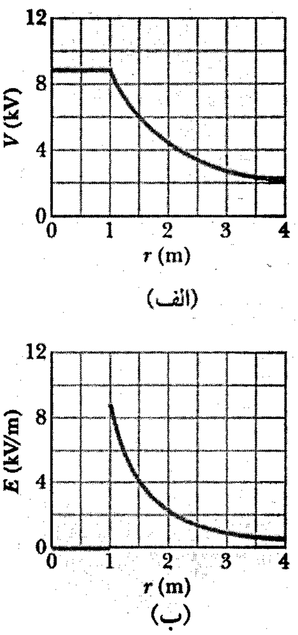
$$U = -۱/۷\times ۱۰^{-۲}\mathrm{J} = -۱۷\mathrm{mJ} \qquad \text{(پاسخ)}$$

این انرژی پتانسیل منفی است، چون برای گردآوری چنین ساختاری که در آغاز هر سه بار الکتریکی آن در فاصلهٔ بی‌نهایت به حال سکون قرار دارند باید کار منفی انجام داد. به عبارت دیگر، یک عامل خارجی باید ۱۷mJ کار انجام دهد تا بتواند این ساختار را به طور کامل از هم جدا نگه دارد، به طوری که در پایان هر سه بار به فاصلهٔ بی‌نهایت از هم قرار گیرند.

۱۱-۲۵ پتانسیل رسانای منزوی باردار

در بخش ۲۴-۶ نتیجه گرفتیم که در تمام نقاط درون یک رسانای منزوی، $\vec{E}=۰$. آنگاه، با استفاده از قانون گاؤس ثابت کردیم که بار اضافی قرار داده شده بر روی یک رسانای منزوی به تمامی در روی سطح توزیع می‌شود. (این موضوع حتی اگر رسانا شامل یک کاواک درونی هم باشد، صادق است). در اینجا با استفاده از نکتهٔ اول به اثبات نکتهٔ دوم می‌پردازیم:

◀ بار اضافی قرار داده شده بر روی یک رسانای منزوی طوری در سطح رسانا توزیع می‌شود که تمام نقاط رسانا ـ روی سطح یا درون آن ـ هم پتانسیل می‌شوند. این موضوع حتی اگر رسانا شامل کاواک درونی باشد و کاواک دارای بار خالص هم باشد، صادق است.



شکل ۲۵-۱۸ (الف) نمودار تغییرات $V(r)$ مربوط به درون و بیرون یک پوستهٔ کروی باردار به شعاع ۱/۰m. (ب) نمودار تغییرات $E(r)$ مربوط به همان پوسته.

این نتیجه مستقیماً از معادلهٔ ۲۵-۱۸ هم به دست می‌آید، که عبارت است از:

$$V_f - V_i = -\int_i^f \vec{E}\,.\,d\vec{s}$$

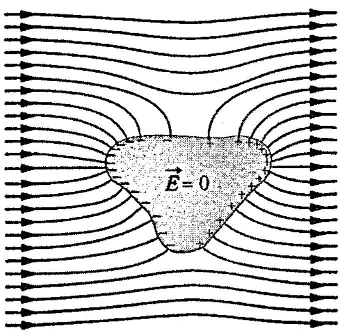
چون در تمام نقاط درون یک رسانا، داریم $\vec{E}=۰$، بی‌درنگ نتیجه می‌گیریم که برای هر زوج نقطهٔ ممکن i و f در رسانا، داریم $V_f = V_i$.

شکل ۲۵-۱۸ الف، نمودار تغییرات پتانسیل را برحسب فاصلهٔ شعاعی r از مرکز یک پوستهٔ رسانای کروی منزوی به شعاع ۱/۰m و حامل بار الکتریکی ۱/۰μC نشان می‌دهد. برای نقاط بیرون پوسته، $V(r)$ را می‌توان با استفاده از معادله ۲۵-۲۶ حساب کرد، زیرا بار q برای نقاط بیرونی طوری رفتار می‌کند که گویی در مرکز پوسته متمرکز شده است. این معادله دربارهٔ سطح پوسته هم صادق است. اکنون ـ با فرض آنکه سوراخ کوچکی در پوسته وجود دارد ـ یک بار آزمون کوچک را به طرف مرکز پوسته هُل می‌دهیم. برای انجام دادن این عمل هیچ کار اضافی‌ای لازم نیست زیرا هنگامی که بار آزمون درون پوسته قرار دارد هیچ نیروی الکتریکی خالصی به آن وارد نمی‌شود. بنابراین، همان طور که شکل ۲۵-۱۸ الف نشان می‌دهد، مقدار پتانسیل در تمام نقاط درون پوسته ثابت و برابر با پتانسیل روی سطح است.

شکل ۲۵-۱۸ ب، نمودار تغییرات میدان الکتریکی این پوسته را برحسب فاصلهٔ شعاعی نشان می‌دهد. توجه کنید که در تمام نقاط درون پوسته $E=۰$. با استفاده از معادلهٔ ۲۵-۴۰، نمودارهای شکل ۲۵-۱۸ ب را می‌توان با مشتق گرفتن از نمودار شکل ۲۵-۱۸ الف نسبت به r، به دست آورد. (یادآوری می‌شود که مشتق هر مقدار ثابت صفر است). همچنین، با استفاده از معادلهٔ ۲۵-۱۹، نمودار شکل ۲۵-۱۸ الف را می‌توان با انتگرال گرفتن از نمودار شکل ۲۵-۱۸ ب نسبت به r، معین کرد.

در رساناهای ناکروی، بار سطحی در روی سطح رسانا به طور یکنواخت توزیع نمی‌شود. در نقاط تیز یا لبه‌ها، چگالی سطحی بار ـ و در نتیجه میدان الکتریکی خارجی متناسب با آن ـ ممکن است مقدار بسیار زیادی داشته باشد. هوای پیرامون این نقاط تیز ممکن است یونیده شود و تخلیهٔ هاله‌ای ایجاد کند. این اثر را گلف‌بازان و کوه‌نوردان در موقع ظهور رعد و برق در نوک بوته‌ها، چوب‌های گلف و چکش‌های صخره‌نوردی مشاهده کرده‌اند. تخلیه‌های هاله‌ای، مانند راست شدن تارهای مو، اغلب مقدمه‌ای بر صاعقه‌اند. در چنین شرایطی عاقلانه است که شخص خود را در اتاقکی واقع در درون پوسته‌ای رسانا، که در آنجا میدان الکتریکی صفر است، محصور کند. در این مورد، یک اتومبیل (جز آنکه روباز یا دارای بدنهٔ پلاستیکی باشد) تقریباً ایده‌آل است (شکل ۲۵ـ۱۹).

هرگاه یک رسانای منزوی را مطابق شکل ۲۵ـ۲۰، در یک میدان الکتریکی خارجی قرار دهیم، تمام نقاط رسانا باز هم دارای یک پتانسیل می‌شوند، چه آنکه رسانا حامل بار اضافی باشد و چه نباشد. در این حالت، الکترون‌های آزاد رسانش در روی سطح رسانا چنان توزیع می‌شوند که میدان الکتریکی حاصل از آنها در نقاط درونی میدان الکتریکی خارجی موجود در آن نقاط را خنثی می‌کند. علاوه بر این، توزیع الکترون‌ها سبب می‌شود میدان الکتریکی در تمام نقاط روی سطح بر سطح عمود باشد. اگر در شکل ۲۵ـ۲۰ رسانا چنان برداشته شود که بارهای سطحی در جای خود باشند، نقش میدان الکتریکی در نقاط بیرونی و درونی به هیچ‌وجه تغییر نخواهد کرد.



شکل ۲۵ـ۲۰ یک رسانای بدون بار در میدان الکتریکی خارجی معلق است. الکترون‌های آزاد رسانا، مطابق شکل، در روی سطح چنان توزیع می‌شوند که میدان الکتریکی برایند در درون رسانا را به صفر برسانند و میدان برایند در سطح بر سطح عمود باشد.



شکل ۲۵ـ۱۹ جرقهٔ بزرگی به بدنهٔ اتومبیل اصابت می‌کند و سپس از طریق بدنه و لاستیک نارسانای سمت چپ جلو اتومبیل (به تولید درخش در آنجا توجه کنید) به‌زمین منتقل می‌شود و به شخص درون اتومبیل آسیبی نمی‌رسد.

مرور و خلاصهٔ مطالب فصل

انرژی پتانسیل الکتریکی تغییر ΔU در انرژی پتانسیل یک بار نقطه‌ای U، در حین حرکت کردن بار از نقطهٔ آغازی i تا نقطهٔ پایانی f در میدان الکتریکی برابر است با:

$$\Delta U = U_f - U_i = -W \qquad (۲۵\text{ـ}۱)$$

که در آن W کار انجام شده توسط نیروی الکتروستاتیکی (ناشی از میدان الکتریکی) روی بار نقطه‌ای در هنگام حرکت کردن بار از i تا f است. اگر انرژی پتانسیل در بی‌نهایت را صفر بگیریم، **انرژی پتانسیل الکتریکی** بار نقطه‌ای U، در یک نقطهٔ خاص برابر است با:

$$U = -W_{\infty} \qquad (۲۵\text{ـ}۲)$$

در اینجا W_{∞} کار انجام شده توسط نیروی الکتروستاتیکی روی بار نقطه‌ای در هنگام حرکت کردن آن از بی‌نهایت تا نقطهٔ مورد نظر است.

اختلاف پتانسیل الکتریکی و پتانسیل الکتریکی اختلاف پتانسیل ΔV

میان دو نقطهٔ i و f در یک میدان الکتریکی را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\Delta V = V_f - V_i = -\frac{W}{q} \qquad (۲۵\text{-}۷)$$

در اینجا q بار ذره‌ای است که کار توسط میدان بر روی آن انجام شده است. **پتانسیل الکتریکی** در یک نقطه برابر است با:

$$V = -\frac{W_\infty}{q} \qquad (۲۵\text{-}۸)$$

یکای SI پتانسیل الکتریکی **ولت** (با نماد V) است: یک ولت مساوی با یک ژول بر کولن است. پتانسیل و اختلاف پتانسیل را برحسب U، انرژی پتانسیل الکتریکی ذره‌ای با بار q در میدان الکتریکی نیز می‌توان نوشت:

$$V = \frac{U}{q} \qquad (۲۵\text{-}۵)$$

$$\Delta V = V_f - V_i = \frac{U_f}{q} - \frac{U_i}{q} = \frac{\Delta U}{q} \qquad (۲۵\text{-}۶)$$

سطح‌های هم پتانسیل تمام نقاط روی یک **سطح هم پتانسیل** دارای پتانسیل الکتریکی یکسان‌اند. کار انجام شده روی یک بار آزمون در هنگام حرکت کردن آن از یک سطح تا سطح دیگر، از محل‌های نقطه‌های آغازی و پایانی واقع بر روی این سطح‌ها، و هم چنین از شکل مسیر وصل‌کنندهٔ نقطه‌ها، مستقل است. میدان الکتریکی $\vec{E}$ همیشه بر سطح‌های هم‌پتانسیل مربوط عمود است.

محاسبهٔ V با استفاده از $\vec{E}$ اختلاف پتانسیل الکتریکی میان دو نقطهٔ i و f برابر است با:

$$V_f - V_i = -\int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s} \qquad (۲۵\text{-}۱۸)$$

در اینجا انتگرال روی مسیر وصل کنندهٔ نقطه‌ها گرفته می‌شود. به ازای $V_i=0$، پتانسیل الکتریکی در یک نقطهٔ معین برابر است با:

$$V = -\int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s} \qquad (۲۵\text{-}۱۹)$$

پتانسیل ناشی از بارهای نقطه‌ای پتانسیل الکتریکی ناشی از یک بار نقطه‌ای در فاصلهٔ r از آن بار برابر است با:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} \qquad (۲۵\text{-}۲۶)$$

که در آن علامت V همان علامت q است. پتانسیل ناشی از مجموعه‌ای از بارهای نقطه‌ای برابر است با:

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i} \qquad (۲۵\text{-}۲۷)$$

پتانسیل ناشی از دوقطبی الکتریکی پتانسیل دوقطبی الکتریکی با بزرگی گشتاور دوقطبی $p=qd$، در فاصلهٔ r از دوقطبی به‌ازای $r \gg d$ برابر است با:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2} \qquad (۲۵\text{-}۳۰)$$

زاویهٔ θ در شکل ۲۵-۱۱ معین شده است.

پتانسیل ناشی از توزیع بار پیوسته در مورد توزیع بار پیوسته، معادلهٔ ۲۵-۲۷ چنین نوشته می‌شود:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{r} \qquad (۲۵\text{-}۳۲)$$

که در آن انتگرال روی کل توزیع بار گرفته می‌شود.

محاسبهٔ $\vec{E}$ با استفاده از V مؤلفهٔ $\vec{E}$ در هر راستا برابر است با آهنگ تغییر پتانسیل نسبت به فاصله در آن راستا، با علامت منفی:

$$E_s = -\frac{\partial V}{\partial s} \qquad (۲۵\text{-}۴۰)$$

مؤلفه‌های x، y و z میدان $\vec{E}$ را می‌توان از معادله‌های زیر به دست آورد

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \text{ ،}\quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad \text{و} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \qquad (۲۵\text{-}۴۱)$$

وقتی $\vec{E}$ یکنواخت باشد، معادلهٔ ۲۵-۴۰ به صورت زیر ساده می‌شود

$$E = -\frac{\Delta V}{\Delta s} \qquad (۲۵\text{-}۴۲)$$

که در آن s بر سطح‌های هم پتانسیل عمود است. میدان الکتریکی در راستای موازی با سطح هم پتانسیل صفر است.

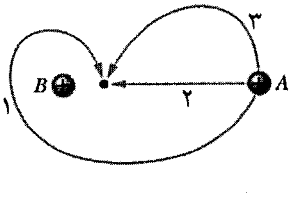
انرژی پتانسیل الکتریکی دستگاه بارهای نقطه‌ای انرژی پتانسیل الکتریکی یک دستگاه متشکل از بارهای نقطه‌ای برابر است با کار لازم برای گردآوری دستگاه با بارهایی که در آغاز ساکن‌اند و به فاصلهٔ بی‌نهایت از هم قرار دارند. برای دو بار الکتریکی به فاصله r از یکدیگر، داریم

$$U = W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r} \qquad (۲۵\text{-}۴۳)$$

پتانسیل رسانای باردار بارهای اضافی واقع بر روی یک رسانا، در حالت تعادل به تمامی روی سطح بیرونی رسانا ظاهر می‌شوند. این بارها چنان توزیع می‌شوند که کل رسانا، از جمله نقاط درونی آن، دارای پتانسیل یکنواخت باشند.

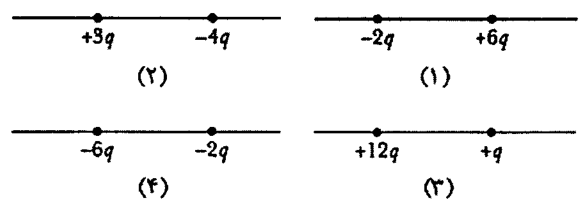
پرسش‌ها

۱. شکل ۲۵-۲۱، سه مسیر را نشان می‌دهد که از طریق آنها می‌توانیم کرهٔ با بار مثبت A را به کرهٔ با بار مثبت B ثابت شده در جای خود، نزدیک کنیم. (الف) آیا کرهٔ A به طرف پتانسیل الکتریکی بالا حرکت می‌کند یا پایین‌تر؟ آیا کار انجام شده، (ب) توسط نیرویی که ما وارد می‌کنیم و (پ) توسط میدان الکتریکی (حاصل از کرهٔ دوم)، مثبت است، منفی است، یا صفر است؟ (ت) این مسیرها را با توجه به کاری که نیروی ما انجام می‌دهد، از بیشترین تا کمترین مقدار مرتب کنید.



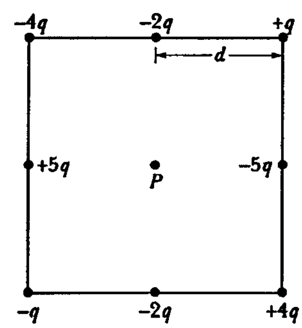
شکل ۲۵-۲۱ پرسش ۱.

۲. شکل ۲۵ـ۲۲، چهار زوج ذرهٔ باردار را نشان می‌دهد. فرض کنید در بی‌نهایت $V=0$. برای کدام زوج، بر روی محور نشان داده شده، نقطهٔ دیگری با پتانسیل الکتریکی خالص صفر (الف) در بین ذره‌ها و (ب) در سمت راست ذره‌ها، وجود دارد؟ (پ) در این نقطهٔ با پتانسیل صفر، آیا میدان الکتریکی $\vec{E}$ ناشی از ذره‌ها صفر است؟ (ت) برای هر زوج، آیا نقاطی در برون سوی محور (البته به جز نقاط واقع در بی‌نهایت) وجود دارند که در آنها داشته باشیم $V=0$؟



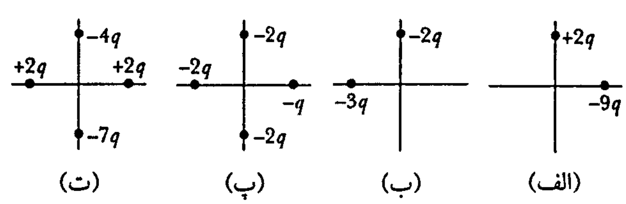
شکل ۲۵ـ۲۲ پرسش‌های ۲ و ۸.

۳. شکل ۲۵ـ۲۳، آرایشی مربع شکل از ذره‌های باردار را نشان می‌دهد که فاصلهٔ میان دو بار مجاور d است. اگر پتانسیل الکتریکی در بی‌نهایت صفر باشد، پتانسیل الکتریکی در نقطهٔ P، مرکز مربع، چقدر است؟



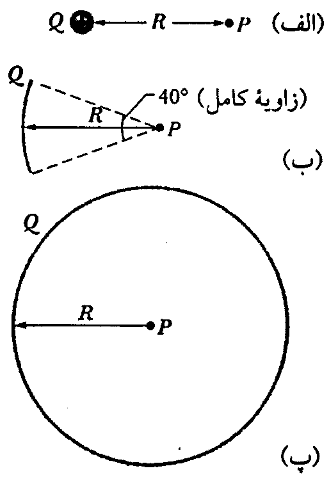
شکل ۲۵ـ۲۳ پرسش ۳.

۴. شکل ۲۵ـ۲۴، چهار آرایش از ذره‌های باردار را نشان می‌دهد، که فاصله همهٔ بارها از مبدأ یکسان است. این حالت‌ها را با توجه به پتانسیل الکتریکی خالص در مبداء، از بالاترین تا پایین‌ترین مقدار، مرتب کنید. پتانسیل را در بی‌نهایت صفر بگیرید.



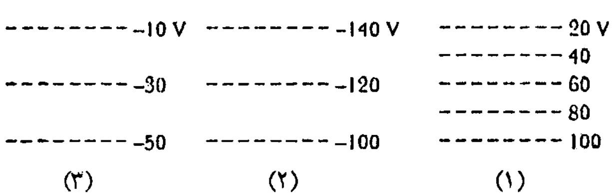
شکل ۲۵ـ۲۴ پرسش ۴.

۵. (الف) در شکل ۲۵ـ۲۵ الف، پتانسیل حاصل از بار Q به فاصلهٔ R از نقطهٔ P چقدر است؟ فرض کنید در بی‌نهایت، $V=0$. (ب) در شکل ۲۵ـ۲۵ ب همان بار Q بر روی کمانی از دایره به شعاع R و زاویهٔ مرکزی ۴۰ درجه، به‌طور یکنواخت پخش شده است. پتانسیل در نقطهٔ P، مرکز خمیدگی کمان، چقدر است؟ (پ) در شکل ۲۵ـ۲۵ پ، بار Q بر روی دایره‌ای به شعاع R به طور یکنواخت پخش شده است. پتانسیل در نقطهٔ P، مرکز دایره، چقدر است؟ (ت) این سه حالت را با توجه به بزرگی میدان الکتریکی تولید شده در نقطهٔ P، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



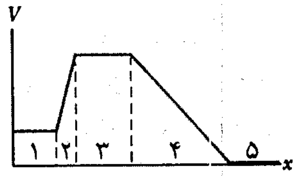
شکل ۲۵ـ۲۵ پرسش ۵.

۶. شکل ۲۵ـ۲۶، مقطع‌های سه دسته سطح هم پتانسیل را نشان می‌دهد؛ هر سه دسته سطح ناحیهٔ هم اندازه‌ای از فضا را پوشانده‌اند. (الف) این آرایش‌ها را با توجه به بزرگی میدان الکتریکی موجود در آن ناحیه، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید. (ب) در کدام ناحیه جهت میدان الکتریکی به سوی پایین صفحهٔ شکل است؟

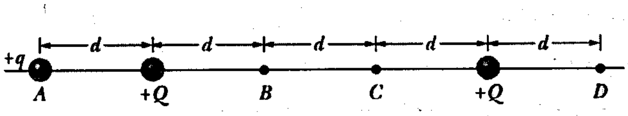


شکل ۲۵ـ۲۶ پرسش ۶.

۷. شکل ۲۵ـ۲۷، نمودار تغییرات پتانسیل الکتریکی V را به صورت تابعی از x در پنج ناحیه نشان می‌دهد. (الف) این پنج ناحیه را با توجه به بزرگی مؤلفهٔ x میدان الکتریکی در آن ناحیه‌ها، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید. جهت میدان در راستای محور x، در (ب) ناحیهٔ ۲ و (پ) ناحیهٔ ۴، چگونه است؟



شکل ۲۵-۲۷ پرسش ۷.



شکل ۲۵-۲۸ پرسش‌های ۹ و ۱۰.

۸. شکل ۲۵-۲۲، چهار زوج ذرهٔ باردار به فاصلهٔ مساوی از هم را نشان می‌دهد. (الف) این زوج بارها را با توجه به انرژی پتانسیل الکتریکی آنها، از بیشترین (مثبت‌ترین) تا کمترین مقدار، مرتب کنید. (ب) اگر فاصلهٔ میان ذره‌های هر زوج افزایش یابد، آیا انرژی پتانسیل زوجها افزایش می‌یابد یا کاهش؟

۹. شکل ۲۵-۲۸، دستگاهی متشکل از سه‌ذرهٔ باردار را نشان می‌دهد. اگر ذرهٔ با بار $+q$ را از نقطهٔ A تا نقطهٔ D حرکت دهیم، آیا مقادیر زیر مثبت‌اند، منفی اند یا صفرند: (الف) تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی دستگاه متشکل از سه ذره، (ب) کار انجام شده توسط نیروی الکتروستاتیکی برایند روی‌ذره‌ای که حرکت داده‌ایم، و (پ) کار انجام شده توسط نیرویی که ما واردکرده‌ایم؟ (ت) اگر اکنون ذره را از نقطهٔ B تا نقطهٔ C حرکت دهیم، پاسخ‌های قسمت‌های (الف) تا (پ) چه خواهند بود؟

۱۰. در وضعیت مربوط به پرسش ۹، آیا کار انجام شده توسط نیرویی که ما وارد می‌کنیم تا ذره را (الف) از A تا B، (ب) از A تا C و (پ) از B تا D حرکت دهیم، مثبت است، منفی است، یا صفر است؟ (ت) این حرکت‌ها را با توجه به بزرگی کار انجام شده توسط نیرویی که وارد کرده‌ایم، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.

تمرین‌ها و مسأله‌ها

بخش ۲۵-۲ پتانسیل الکتریکی

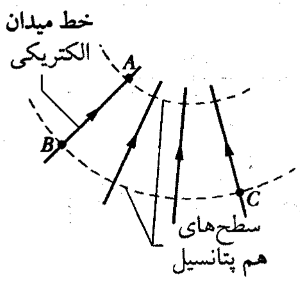
۱ ت. باتری ۱۲ ولتی اتومبیل می‌تواند بار الکتریکی کل ۸۴ آمپر-ساعت (با نماد A.h) را از طریق مدار، از یک پایانه به پایانهٔ دیگر برساند. (الف) این مقدار بار چند کولن است؟ (راهنمایی: به معادلهٔ ۲۲-۳ رجوع کنید). (ب) تمام این بار الکتریکی تحت اختلاف پتانسیل ۱۲V چقدر انرژی انتقال می‌دهد؟

۲ ت. در یک توفان تندری، اختلاف پتانسیل الکتریکی میان زمین و ابر $۱٫۲\times۱۰^{۹}$V است. بزرگی تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی (برحسب الکترون-ولت) یک الکترون در حال حرکت در میان زمین و ابر چقدر است؟

۳ م. در آذرخشی اختلاف پتانسیل میان ابر و زمین $۱٫۰\times۱۰^{۹}$V و مقدار بار منتقل شده در حدود ۳۰C است. (الف) مقدار کاهش انرژی مربوط به این بار منتقل شده چقدر است؟ (ب) اگر تمام این انرژی بتواند صرف شتاب دادن به اتومبیل ساکنی به جرم ۱۰۰۰kg شود، تندی نهایی اتومبیل چقدر خواهد بود؟ (پ) اگر این انرژی برای ذوب کردن یخ به کار رود، چه مقدار یخ صفر درجه سلسیوس را می‌تواند ذوب کند؟ گرمای ذوب یخ $۳٫۳۳\times۱۰^{۵}$J/kg است.

بخش ۲۵-۴ محاسبهٔ پتانسیل با استفاده از میدان الکتریکی

۴ ت. هنگامی که الکترونی در طول خط میدان الکتریکی شکل ۲۵-۲۹ از A تا B حرکت می‌کند، میدان الکتریکی، $۳٫۹۴\times۱۰^{-۱۹}$J کار بر روی آن انجام می‌دهد. مطلوب است تعیین اختلاف پتانسیل‌های (الف) V_B-V_A، (ب) V_C-V_A، و (پ) V_C-V_B.



شکل ۲۵-۲۹ تمرین ۴.

۵ ت. چگالی سطحی بار الکتریکی در یک رویهٔ یک ورقهٔ نارسانای نامتناهی $\sigma=۰٫۱۰\mu C/m^{۲}$ است. فاصلهٔ سطح‌های هم پتانسیلی که به اندازهٔ ۵۰V با هم اختلاف پتانسیل دارند، چقدر است؟

۶ ت. دو ورق رسانای بزرگ موازی و به فاصلهٔ ۱۲cm از هم، دارای بارهایی با بزرگی مساوی و با علامت مخالف بر روی سطح‌های مقابل‌اند. نیروی الکتروستاتیکی $۳٫۹\times۱۰^{-۱۵}$N به الکترونی واقع در جایی در میان دو ورق وارد می‌شود (از فریز شدن میدان در لبه‌ها چشم‌پوشی کنید). (الف) میدان الکتریکی را در مکان الکترون پیدا کنید. (ب) اختلاف پتانسیل میان دو ورق چقدر است؟

۷ م. شمارندهٔ گایگر شامل استوانه‌ای فلزی به قطر ۲٫۰۰cm است، که در طول محور آن سیمی به قطر $۱٫۳۰\times۱۰^{-۴}$cm کشیده شده است. اگر اختلاف پتانسیل میان سیم و استوانه ۸۵۰V باشد، مطلوب است تعیین میدان الکتریکی در سطح (الف) سیم و (ب) استوانه. (راهنمایی: از نتیجهٔ مسألهٔ ۲۳ فصل ۲۴ استفاده کنید).

۸ م. میدان الکتریکی در هر نقطه از درون یک کرهٔ نارسانا به شعاع R و با توزیع بار یکنواخت در حجم آن، در راستای شعاع است و بزرگی آن برابر است با:

$$E = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

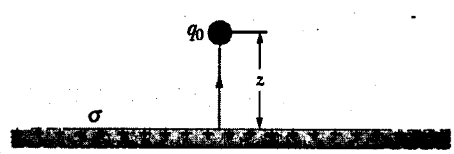
در اینجا q (مثبت یا منفی) بار کل درون کره و r فاصلهٔ نقطه تا مرکز کره است. (الف) با فرض $V=0$ در مرکز کره، رابطهٔ پتانسیل الکتریکی درون کره $V(r)$، را به دست آورید. (ب) اختلاف پتانسیل الکتریکی میان یک نقطهٔ واقع در سطح کره و در مرکز آن چیست؟ (پ) اگر q مثبت باشد، پتانسیل کدام نقطه بالاتر است؟

* ۹ م. بار الکتریکی q در سراسر یک حجم کروی به شعاع R به طور یکنواخت توزیع شده است. (الف) با فرض $V=0$ در بی‌نهایت، نشان دهید که پتانسیل در فاصلهٔ r از مرکز، به ازای $r<R$، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$V = \frac{q(3R^2 - r^2)}{8\pi\varepsilon_0 R^3}$$

(راهنمایی: به بخش ۲۴-۹ رجوع کنید). (ب) چرا این نتیجه با نتیجه قسمت (الف) در مسألهٔ ۸ متفاوت است؟ (پ) اختلاف پتانسیل میان یک نقطهٔ واقع در سطح کره و در مرکز آن چیست؟ (ت) چرا این نتیجه با نتیجهٔ قسمت (ب) در مسألهٔ ۸ تفاوت ندارد؟

۱۰ م. شکل ۲۵-۳۰، لبهٔ یک ورقهٔ نارسانا و نامتناهی به چگالی سطحی بار مثبت σ در یک رویهٔ ورقه را نشان می‌دهد. (الف) با استفاده از معادله‌های ۲۵-۱۸ و ۲۴-۱۳، نشان دهید که رابطهٔ پتانسیل الکتریکی یک ورقهٔ نامتناهی باردار را می‌توان به صورت $V=V_0-(\sigma/2\varepsilon_0)z$ نوشت، که در آن V_0 پتانسیل الکتریکی در سطح ورقه و z فاصله از ورقه است. (ب) کار انجام شده توسط میدان الکتریکی حاصل از ورقه در موقع حرکت کردن بار آزمون مثبت و کوچک q_0 از مکان آغازی‌اش در روی ورقه تا مکان واقع در فاصلهٔ z از ورقه، چقدر است؟



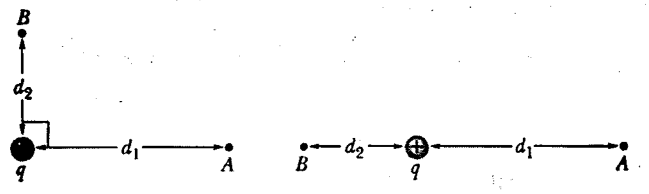
شکل ۲۵-۳۰ مسألهٔ ۱۰.

* ۱۱ م. پوسته‌ای کروی و ضخیم با بار Q و چگالی حجمی بار یکنواخت ρ محصور شده به شعاع‌های r_1 و r_2 است، که $r_2>r_1$. با فرض $V=0$ در بی‌نهایت، رابطهٔ پتانسیل الکتریکی V را برحسب فاصلهٔ r از مرکز کرهٔ باردار، در ناحیه‌های زیر به دست آورید، (الف) $r>r_2$، (ب) $r_2>r>r_1$، و (پ) $r<r_1$. (ت) آیا این پاسخ‌ها برای نقاط $r=r_2$ و $r=r_1$ سازگارند؟ (راهنمایی: بخش ۲۴-۹ را ببینید).

بخش ۲۵-۶ پتانسیل ناشی از گروه بارهای نقطه‌ای

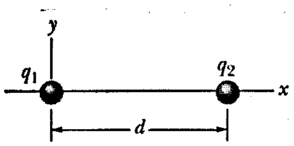
۱۲ ت. یک سفینهٔ فضایی در حین یک دور گردش کردن به دور زمین در درون گازهائی رقیق و یونیدهٔ یون کره پتانسیل نوعی‌اش به اندازهٔ $-1{,}0\,\text{V}$ تغییر می‌کند. با فرض آنکه سفینه کره‌ای به شعاع $10\,\text{m}$ است، مقدار باری را که می‌تواند جمع کند، براورد کنید.

۱۳ ت. بار نقطه‌ای $q=1{,}0\,\mu\text{C}$، و نقطهٔ A به فاصلهٔ $d_1=2{,}0\,\text{m}$ و نقطهٔ B به فاصلهٔ $d_2=1{,}0\,\text{m}$ از بار q را در نظر بگیرید. (الف) اگر این نقطه‌ها نسبت به هم، مطابق شکل ۲۵-۳۱ الف، قرار گرفته باشند، اختلاف پتانسیل الکتریکی V_A-V_B چقدر است؟ (ب) اگر نقطه‌های A و B در وضعیتی، مطابق شکل ۲۵-۳۱ ب، قرار گیرند، این اختلاف پتانسیل چقدر است؟



شکل ۲۵-۳۱ تمرین ۱۳.

۱۴ ت. شکل ۲۵-۳۲، دو ذرهٔ باردار را بر روی یک محور نشان می‌دهد. خط‌های میدان الکتریکی و سطح‌های هم پتانسیل حاصل در صفحهٔ شکل را به ازای، (الف) $q_1=+q$ و $q_2=+2q$، و (ب) $q_1=+q$ و $q_2=-3q$، رسم کنید.



شکل ۲۵-۳۲ تمرین‌های ۱۴، ۱۵ و ۱۶.

۱۵ ت. در شکل ۲۵-۳۲، فرض کنید ذره‌ها دارای بارهای الکتریکی $q_1=+q$ و $q_2=-3q$ هستند و در بی‌نهایت $V=0$. اکنون، نقاطی (به‌جز در بی‌نهایت) از محور x (برحسب فاصلهٔ d) را چنان معین کنید که در آنها پتانسیل ناشی از دو ذرهٔ باردار صفر باشد.

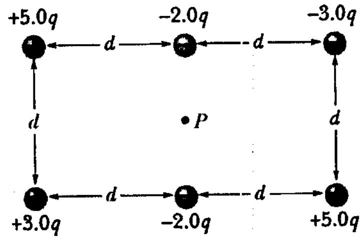
۱۶ ت. در شکل ۲۵-۳۲، دو ذرهٔ با بارهای q_1 و q_2 به اندازهٔ d از هم فاصله دارند. میدان الکتریکی برایند ناشی از این ذره‌ها در نقطه‌ای به فاصلهٔ $x=d/4$ صفر است. به ازای $V=0$ در بی‌نهایت، نقاطی (به جز در بی‌نهایت) از محور x را چنان معین کنید که در آنها پتانسیل الکتریکی ناشی از دو ذرهٔ باردار صفر باشد.

۱۷ م. یک قطرهٔ کروی آب حامل بار الکتریکی ۳۰pC است. در سطح این قطره پتانسیل الکتریکی (با فرض $V=0$ در بی‌نهایت) ۵۰۰V است. (الف) شعاع قطره چقدر است؟ (ب) هرگاه دو قطره با بار الکتریکی و شعاع یکسان به هم ملحق شوند و تک قطره‌ای به وجود آورند، پتانسیل در سطح قطرهٔ جدید چقدر است؟

۱۸ م. (الف) بار الکتریکی و (ب) چگالی بار در روی سطح یک کرهٔ رسانا به شعاع ۰٫۱۵m و دارای پتانسیل ۲۰۰V (با فرض $V=0$ در بی‌نهایت) چقدر است؟

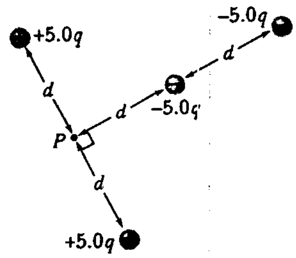
۱۹ م. میدان الکتریکی مشاهده شده در نزدیکی سطح زمین در حدود ۱۰۰V/m است. اگر میدان الکتریکی در سراسر سطح زمین همین مقدار باشد، پتانسیل الکتریکی هر نقطهٔ سطح زمین چقدر خواهد بود؟ (فرض کنید در بی‌نهایت $V=0$).

۲۰ م. در شکل ۲۵-۳۳، نقطهٔ P در مرکز مربع مستطیل قرار دارد. به ازای $V=0$ در بی‌نهایت، پتانسیل الکتریکی خالص ناشی از شش ذرهٔ باردار، در نقطهٔ P چقدر است؟



شکل ۲۵-۳۳ مسألهٔ ۲۰.

۲۱ م. در شکل ۲۵-۳۴، پتانسیل خالص ناشی از چهار بار الکتریکی نقطه‌ای در نقطهٔ P، به ازای $V=0$ در بی‌نهایت، چقدر است؟



شکل ۲۵-۳۴ مسألهٔ ۲۱.

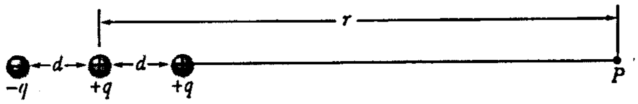
بخش ۲۵ـ۷ پتانسیل ناشی از دوقطبی الکتریکی

۲۲ ت. مولکول آمونیاک، NH_3، دارای گشتاور دوقطبی الکتریکی دایمی ۱٫۴۷D است، که در آن D، **یکای دبای**[1]، مساوی با 3.34×10^{-30} C.m است. پتانسیل الکتریکی ناشی از یک مولکول آمونیاک در نقطه‌ای به فاصلهٔ ۵۲٫۰nm در راستای محور دوقطبی را حساب کنید. (فرض کنید در بی‌نهایت $V=0$).

۲۳ م. شکل ۲۵ـ۳۵، نشان دهندهٔ سه ذرهٔ باردار واقع بر یک محور افقی است. نشان دهید که در نقطه‌های واقع بر محور (مانند نقطهٔ P) به ازای $r\gg d$، رابطهٔ مربوط به پتانسیل الکتریکی $V(r)$، چنین است:

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}\left(1+\frac{2d}{r}\right)$$

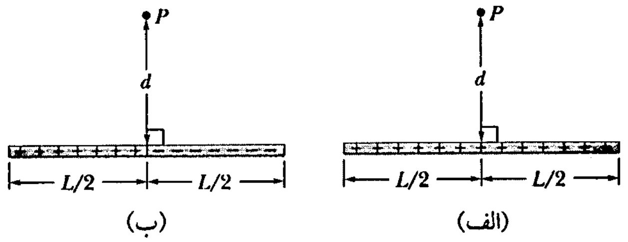
(راهنمایی: این پیکربندی بار را می‌توان به صورت مجموعی از یک بار منزوی و یک دوقطبی در نظر گرفت).



شکل ۲۵-۳۵ مسألهٔ ۲۳.

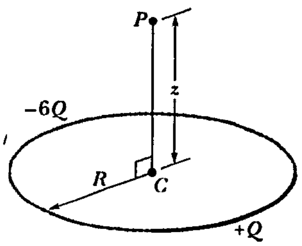
بخش ۲۵ـ۸ پتانسیل ناشی از توزیع بار پیوسته

۲۴ ت. (الف) شکل ۲۵ـ۳۶ الف، یک میلهٔ پلاستیکی با بار مثبت به طول L و چگالی خطی بار یکنواخت λ را نشان می‌دهد. با فرض $V=0$ در بی‌نهایت، و با توجه به شکل ۲۵ـ۱۳ و معادلهٔ ۲۵ـ۳۵، پتانسیل الکتریکی حاصل در نقطهٔ P را بدون محاسبهٔ نوشتنی پیدا کنید. (ب) شکل ۲۵ـ۳۶ ب میلهٔ مشابهی را با این تفاوت که به دو بخش تقسیم شده و نیمهٔ راست آن حامل بار منفی است، نشان می‌دهد؛ بزرگی چگالی خطی بار یکنواخت λ در دو نیمهٔ میله یکسان است. به ازای $V=0$ در بی‌نهایت، پتانسیل الکتریکی حاصل در نقطهٔ P از شکل ۲۵ـ۳۶ ب چقدر است؟



شکل ۲۵-۳۶ تمرین ۲۴.

۲۵ ت. میله‌ای پلاستیکی به شکل دایره‌ای به شعاع R درآمده است. در طول ربع محیط دایره بار مثبت $+Q$ و در طول بقیهٔ محیط دایره بار منفی $-6Q$ به طور یکنواخت توزیع شده است (شکل ۲۵-۳۷). به ازای $V=0$ در

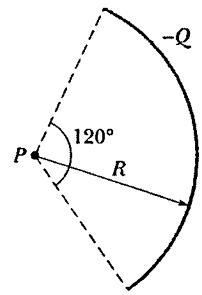


شکل ۲۵-۳۷ تمرین ۲۵.

1. debye unit

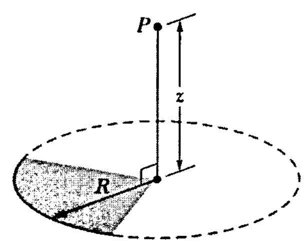
بی‌نهایت، پتانسیل الکتریکی حاصل، (الف) در مرکز دایره C، و (ب) در نقطه‌ای مانند P واقع بر محور مرکزی عمود بر دایره و به فاصلهٔ z از مرکز، چقدر است؟

۲۶ ت. در شکل ۲۵ـ۳۸، میله‌ای پلاستیکی با توزیع یکنواخت بار $-Q$، به صورت کمانی دایره‌ای با زاویهٔ مرکزی ۱۲۰ درجه خم شده است. به ازای $V=0$ در بی‌نهایت، پتانسیل الکتریکی حاصل در نقطهٔ P، مرکز خمیدگی میله، چقدر است؟



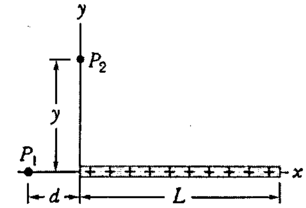
شکل ۲۵ـ۳۸ تمرین ۲۶.

۲۷ ت. یک رویهٔ یک قرص پلاستیکی با چگالی سطحی بار یکنواخت σ باردار و سپس سه ربع قرص برداشته می‌شود. ربع باقی‌ماندهٔ قرص در شکل ۲۵ـ۳۹ نشان داده شده است. به ازای $V=0$ در بی‌نهایت، پتانسیل ناشی از ربع باقی‌مانده، در نقطهٔ P واقع بر محور مرکزی عمود بر قرص اصلی و به فاصلهٔ z از مرکز، چقدر است؟



شکل ۲۵ـ۳۹ تمرین ۲۷.

۲۸ م. شکل ۲۵ـ۴۰، یک میلهٔ پلاستیکی به طول L و حامل بار مثبت یکنواخت Q را، که در راستای محور x قرار دارد، نشان می‌دهد. به ازای



شکل ۲۵ـ۴۰ مسأله‌های ۲۸، ۲۹، ۳۴ و ۳۵.

$V=0$ در بی‌نهایت، پتانسیل الکتریکی حاصل را در نقطهٔ P_1، واقع بر محور x و به فاصلهٔ d از یک سر میله، پیدا کنید.

۲۹ م. میله پلاستیکی نشان داده شده در شکل ۲۵ـ۴۰، دارای طول L و چگالی خطی بار نایکنواخت $\lambda=cx$ است، که در آن c مقداری ثابت و مثبت است. به ازای $V=0$ در بی‌نهایت، پتانسیل الکتریکی حاصل را در نقطهٔ P_1 واقع بر محور x و به فاصلهٔ d از یک سر میله، پیدا کنید.

بخش ۲۵ـ۹ محاسبهٔ میدان الکتریکی با استفاده از پتانسیل

۳۰ ت. دو ورق فلزی بزرگ موازی به فاصلهٔ ۱٫۵cm از هم قرار دارند و حامل بارهای با بزرگی مساوی و ناهمنام در سطح‌های مقابل یکدیگرند. پتانسیل ورق منفی را صفر بگیرید. اگر در نقطهٔ وسط فاصلهٔ میان ورق‌ها پتانسیل ‎+۵٫۰V باشد، در ناحیهٔ میان ورق‌ها میدان الکتریکی چیست؟

۳۱ ت. در نقاطی از صفحهٔ xy تابع پتانسیل به صورت $V=(2.0\,\mathrm{V/m^2})x^2-(3.0\,\mathrm{V/m^2})y^2$ است. بزرگی و جهت میدان الکتریکی در نقطهٔ با مختصات (۳٫۰m و ۲٫۰m) چیست؟

۳۲ ت. پتانسیل الکتریکی V، در فضای میان دو صفحهٔ موازی تخت از معادلهٔ $V=1500x^2$ به دست می‌آید، که در آن x فاصله از یک صفحه برحسب متر، و V برحسب ولت است. بزرگی و جهت میدان الکتریکی را در نقطهٔ $x=1.3\,\mathrm{cm}$ معین کنید.

۳۳ م. (الف) با استفاده از معادلهٔ ۲۵ـ۳۲ نشان دهید که پتانسیل الکتریکی در نقطه‌ای از محور مرکزی یک حلقهٔ باریک با بار q و به شعاع R و فاصلهٔ z از حلقه، برابر است با:

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{z^2+R^2}}$$

(ب) با استفاده از این نتیجه رابطهٔ مربوط به E را برای نقطه‌های واقع بر محور حلقه به دست آورید و آن را با نتیجهٔ حاصل از محاسبهٔ E در بخش ۲۳ـ۶ مقایسه کنید.

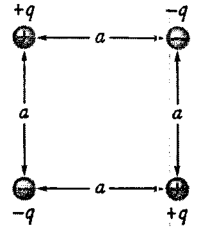
۳۴ م. میلهٔ پلاستیکی نشان داده شده در شکل ۲۵ـ۴۰، دارای طول L و چگالی خطی بار نایکنواخت $\lambda=cx$ است، که در آن c مقداری ثابت و مثبت است. (الف) به ازای $V=0$ در بی‌نهایت، پتانسیل الکتریکی حاصل را در نقطهٔ P_2 واقع بر محور y و به فاصلهٔ y از یک سر میله، پیدا کنید. (ب) با استفاده از این نتیجه، مؤلفهٔ E_y میدان الکتریکی را در نقطهٔ P_2 پیدا کنید. (پ) چرا با استفاده از نتیجهٔ قسمت (الف) نمی‌توان مؤلفهٔ E_x میدان الکتریکی در نقطهٔ P_2 را پیدا کرد؟

۳۵ م. (الف) با استفاده از نتیجهٔ مسألهٔ ۲۸ مؤلفه E_x میدان الکتریکی را در نقطهٔ P_1 در شکل ۲۵ـ۴۰ پیدا کنید. (راهنمایی: نخست، در نتیجهٔ حاصل به جای d متغیر x را قرار دهید.) (ب) با استفاده از تقارن، مؤلفه E_y میدان الکتریکی را در نقطهٔ P_1 پیدا کنید.

بخش ۲۵-۱۰ انرژی پتانسیل الکتریکی دستگاه بارهای نقطه‌ای

۳۶ ت. (الف) انرژی پتانسیل الکتریکی دو الکترون، که $2.00\,nm$ از هم فاصله دارند، چقدر است؟ (ب) اگر فاصلهٔ آنها افزایش پیدا کند، آیا انرژی پتانسیل افزایش می‌یابد یا کاهش؟

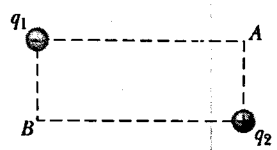
۳۷ ت. رابطهٔ مربوط به کار لازم جهت ترتیب دادن پیکربندی چهار بار الکتریکی مطابق شکل ۲۵-۴۱ را با این فرض که بارها در آغاز به فاصلهٔ بی‌نهایت از هم قرار دارند، به دست آورید.



شکل ۲۵-۴۱ تمرین ۳۷.

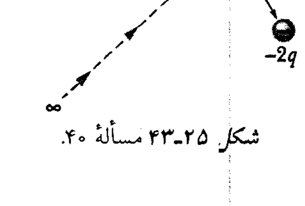
۳۸ ت. انرژی پتانسیل الکتریکی پیکربندی بارهای الکتریکی در شکل ۲۵-۹ الف چقدر است؟ از مقادیر عددی مسألهٔ نمونهٔ ۲۵-۳ استفاده کنید.

۳۹ م. در مربع مستطیل شکل ۲۵-۴۲، طول ضلع‌ها $5.0\,cm$ و $15\,cm$ است و $q_1=-5.0\,\mu C$ و $q_2=+2.0\,\mu C$. به ازای $V=0$ در بی‌نهایت، پتانسیل الکتریکی در (الف) گوشهٔ A و (ب) گوشهٔ B، چقدر است؟ (پ) برای حرکت دادن با رسوم $q_3=+3.0\,\mu C$ از B تا A، در راستای قطر مربع مستطیل، چه مقدار کار لازم است؟ (ت) آیا این کار انرژی الکتریکی دستگاه متشکل از سه بار را افزایش می‌دهد یا کاهش؟ اگر q_3 را، (ث) از طریق مسیرهای واقع در درون مربع مستطیل، اما نه در راستای قطر و (ج) از طریق مسیرهای بیرون مربع مستطیل، حرکت دهیم، آیا مقدار کار لازم بیشتر می‌شود، کمتر می‌شود، یا همان اندازه است؟



شکل ۲۵-۴۲ مسألهٔ ۳۹.

۴۰ م. در شکل ۲۵-۴۳، برای حرکت دادن بار $+5q$ در طول خط‌چین نشان داده شده از بی‌نهایت و قرار دادن آن در نزدیکی بارهای ثابت $+4q$ و $-2q$، چقدر کار لازم است؟ فرض کنید $d=1.40\,cm$ و $q=1.6\times10^{-19}\,C$.



شکل ۲۵-۴۳ مسألهٔ ۴۰.

۴۱ م. ذره‌ای با بار مثبت Q در نقطهٔ P ثابت نگه داشته شده است و ذرهٔ دیگری به جرم m و بار منفی $-q$ با تندی ثابت بر روی دایره‌ای به شعاع r_1 و به مرکز P حرکت می‌کند. رابطهٔ مربوط به کار W را که باید توسط یک عامل خارجی بر روی ذرهٔ دوم انجام شود تا شعاع دایرهٔ حرکت به r_2 افزایش یابد، به دست آورید.

۴۲ م. مطلوب است محاسبهٔ (الف) پتانسیل الکتریکی حاصل از هستهٔ اتم هیدروژن (با فرض $V=0$ در بی‌نهایت) در فاصله‌ای مساوی با شعاع متوسط گردش الکترون ($r=5.29\times10^{-11}\,m$)، به دور هسته، (ب) انرژی پتانسیل الکتریکی اتم در هنگامی که الکترون در این فاصله قرار دارد، و (پ) انرژی جنبشی الکترون با این فرض که الکترون در مداری دایره‌ای با این شعاع و به مرکز هسته، حرکت می‌کند. (ت) برای آنکه اتم هیدروژن یونیده شود (یعنی الکترون از هسته دور و فاصلهٔ جدایی آنها عملاً بی‌نهایت شود) چه مقدار انرژی لازم است؟ تمام انرژی‌ها را برحسب الکترون ـ ولت بیان کنید.

۴۳ م. ذره‌ای با بار q در نقطهٔ P ثابت نگه داشته شده است و ذرهٔ دیگری به جرم m و با همان بار q، در آغاز به فاصلهٔ r_1 از P قرار داده شده است. اکنون ذرهٔ دوم را رها می‌کنیم. تندی ذرهٔ دوم را در لحظه‌ای که به فاصلهٔ r_2 از P قرار دارد، معین کنید. فرض کنید $q=3.1\,\mu C$، $m=20\,mg$، $r_1=0.90\,mm$ و $r_2=2.5\,mm$.

۴۴ م. بار الکتریکی $-9.0\,nC$ بر روی حلقهٔ پلاستیکی باریکی به شعاع $1.5\,m$ به طور یکنواخت توزیع شده است. این حلقه در صفحهٔ yz و مرکزش در مبداء مختصات قرار دارد. بار نقطه‌ای $-6.0\,pC$ در فاصلهٔ $x=3.0\,m$ از صفحهٔ حلقه روی محور x واقع است. کار انجام شده توسط یک نیروی خارجی برای حرکت دادن این بار نقطه‌ای تا مبداء مختصات را حساب کنید.

۴۵ م. دو کرهٔ فلزی کوچک A و B به جرم‌های $m_1=5.00\,g$ و $m_2=10.0\,g$ حامل بارهای مثبت و مساوی $q=5.00\,\mu C$ هستند. این کره‌ها به وسیلهٔ ریسمان نارسانای بدون جرم و به طول $d=1.00\,m$، که خیلی بزرگتر از شعاع کره‌هاست، به هم وصل شده‌اند. (الف) انرژی پتانسیل الکتریکی دستگاه چقدر است؟ (ب) فرض کنید ریسمان را قطع می‌کنیم. در این لحظه شتاب هر کره چقدر است؟ (پ) مدتی طولانی پس از قطع کردن ریسمان، تندی هر یک از کره‌ها چقدر است؟

۴۶ م. پوستهٔ رسانای کروی نازکی به شعاع R روی پایهٔ عایقی قرار دارد و تا پتانسیل $-V$ باردار شده است. الکترونی از نقطهٔ P به فاصلهٔ r از مرکز پوسته ($r \gg R$) با تندی آغازی v_0 مستقیماً به سوی مرکز پوسته پرتاب می‌شود. مقدار v_0 چقدر باشد تا الکترون پیش از وارون شدن جهت حرکتش، درست به پوسته برسد؟

۴۷ م. دو الکترون به فاصلهٔ ثابت ۲٫۰cm از هم نگه داشته شده‌اند. الکترون دیگری از فاصلهٔ بی‌نهایت پرتاب و در نقطهٔ وسط فاصلهٔ میان آن دو متوقف می‌شود. تندی آغازی این الکترون چقدر است؟

۴۸ م. دو سطح رسانای تخت موازی و باردار دارای فاصلهٔ $d=$ ۱٫۰۰cm و اختلاف پتانسیل $\Delta V=$ ۶۲۵V هستند. الکترونی از یک سطح مستقیماً به‌سوی سطح دیگر پرتاب می‌شود. اگر الکترون درست در سطح دیگر به‌حال سکون در آید، تندی آغازی آن چقدر است؟

۴۹ م. الکترونی با تندی آغازی $۳٫۲\times ۱۰^{۵}$m/s به سوی پروتونی که در حال سکون است، پرتاب می‌شود. اگر فاصلهٔ آغازی الکترون تا پروتون به قدر کافی زیاد باشد، در چه فاصله‌ای از پروتون تندی لحظه‌ای الکترون دو برابر تندی آغازی آن خواهد بود؟

بخش ۲۵ـ۱۱ پتانسیل رسانای منزوی باردار

۵۰ ت. یک کرهٔ فلزی توخالی دارای پتانسیل ۴۰۰V+ نسبت به زمین (دارای پتانسیل $V=$ ۰) و حامل بار $۵٫۰\times ۱۰^{-۹}$C است. پتانسیل الکتریکی را در مرکز کره پیدا کنید.

۵۱ ت. یک کرهٔ رسانا دارای شعاع $r=$ ۰٫۱۵m و پتانسیل ۱۵۰۰V است. به‌ازای $V=$ ۰ در بی‌نهایت، بار اضافی روی کره چقدر است؟

۵۲ ت. دو کرهٔ رسانای ۱ و ۲ را به فاصلهٔ زیاد از یکدیگر در نظر بگیرید. قطر کرهٔ ۲ دو برابر قطر کرهٔ ۱ است. در آغاز کرهٔ کوچکتر دارای بار مثبت q و کرهٔ بزرگتر بدون بار است. اکنون کره‌ها را به وسیلهٔ سیم باریک و درازی به هم وصل می‌کنیم. (الف) رابطهٔ پتانسیل‌های پایانی کره‌ها V_1 و V_2، با هم چگونه است؟ (ب) بارهای پایانی روی کره‌ها q_1 و q_2، را برحسب q پیدا کنید. (پ) نسبت چگالی سطحی پایانی بار کرهٔ ۱ به چگالی سطحی بار کرهٔ ۲ چقدر است؟

۵۳ م. مرکزهای دو کرهٔ فلزی، هر یک به شعاع ۳٫۰cm، در فاصلهٔ ۲٫۰m از یکدیگر واقع‌اند. بار یکی از کره‌ها $+۱٫۰\times ۱۰^{-۸}$C و بار کرهٔ دیگر $-۳٫۰\times ۱۰^{-۸}$C است. با این فرض که فاصلهٔ جدایی کره‌ها در مقایسه با اندازهٔ آنها آن قدر زیاد است که توزیع بار روی کره‌ها را می‌توان یکنواخت در نظر گرفت (کره‌ها اثری بر هم ندارند). به ازای $V=$ ۰ در بی‌نهایت، مطلوب است محاسبهٔ، (الف) پتانسیل در نقطهٔ وسط فاصلهٔ میان‌مرکزهای کره‌ها و (ب) پتانسیل هر کره.

۵۴ م. یک کرهٔ فلزی به شعاع ۱۵cm دارای بار الکتریکی خالص $۳٫۰\times ۱۰^{-۸}$C است. (الف) میدان الکتریکی در سطح کره چیست؟ (ب) به ازای $V=$ ۰ در بی‌نهایت، پتانسیل الکتریکی در سطح کره چقدر است؟ (پ) در چه فاصله‌ای از سطح کره، پتانسیل الکتریکی به اندازهٔ ۵۰۰V کاهش می‌یابد؟

۵۵ م. (الف) اگر چگالی سطحی بار خالص کرهٔ زمین ۱٫۰ الکترون بر مترمربع (یک فرض کاملاً ساختگی) باشد، پتانسیل آن چقدر خواهد بود؟ (فرض کنید در بی‌نهایت $V=$ ۰). (ب) میدان الکتریکی حاصل درست در بیرون سطح زمین چیست؟

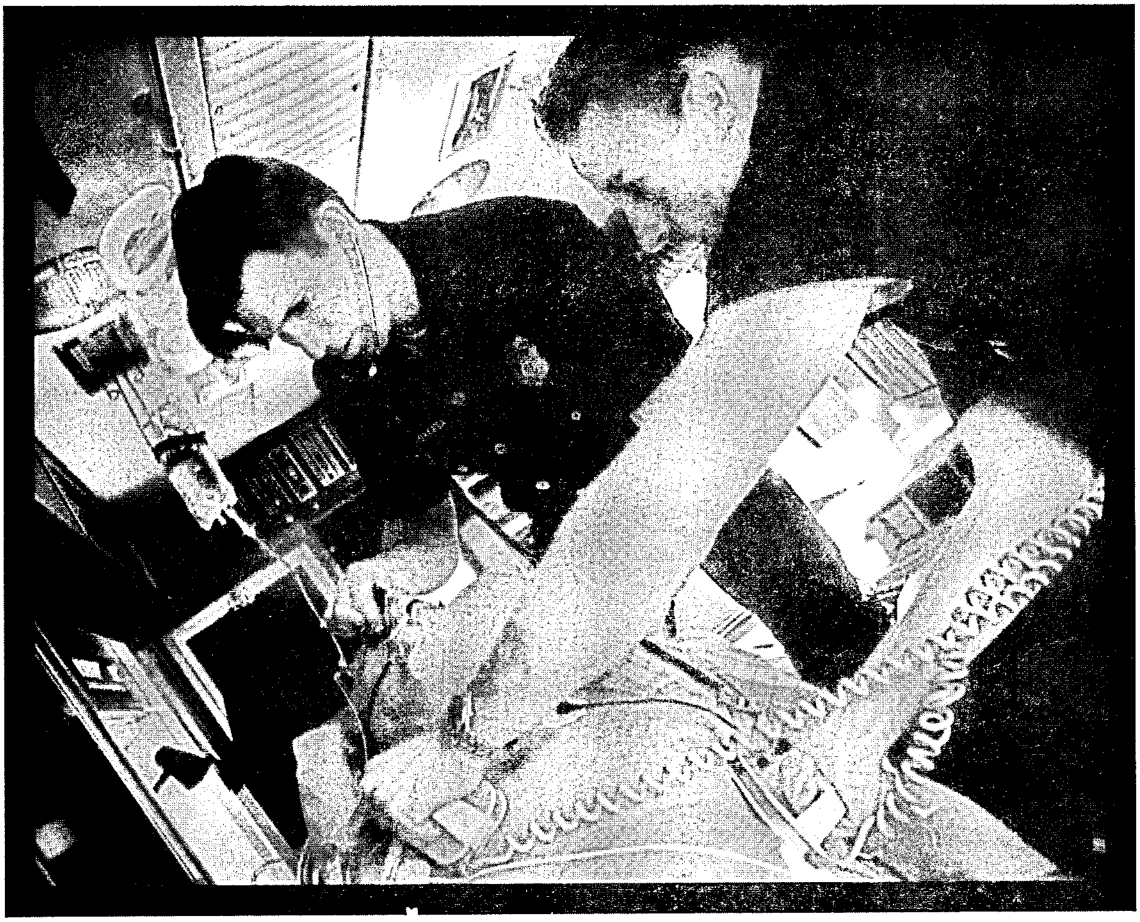
۵۶ م. دو کرهٔ رسانای هم مرکز منزوی و نازک به شعاع‌های R_1 و R_2 $(R_1<R_2)$، حامل بارهای q_1 و q_2 هستند. به ازای $V=$ ۰ در بی‌نهایت، رابطه‌های مربوط به $E(r)$ و $V(r)$ را، که در آنها r فاصله تا مرکز کره‌هاست، به دست آورید. نمودارهای $E(r)$ و $V(r)$ را از $r=$ ۰ تا $r=$ ۴٫۰m، به ازای $R_1=$ ۰٫۵۰m، $R_2=$ ۱٫۰m، $q_1=+$۲٫۰μC و $q_2=+$۱٫۰μC، رسم کنید.

مسألهٔ تکمیلی

۵۷. رمز و راز خرده‌های شکلات. این موضوع با مسألهٔ ۴۸ در فصل ۲۴ آغاز شده است. (الف) با استفاده از پاسخ قسمت (الف) آن مسأله، رابطهٔ مربوط به پتانسیل الکتریکی را به صورت تابعی از فاصلهٔ شعاعی r از مرکز لوله به‌دست آورید. (پتانسیل الکتریکی در دیوارهٔ لوله که متصل به زمین است، صفر است). (ب) به‌ازای چگالی حجمی بار $\rho = -۱٫۱\times ۱۰^{-۳}$C/m^{3} (که مقداری نوعی است)، اختلاف پتانسیل الکتریکی میان مرکز لوله و دیوارهٔ داخلی آن چقدر است؟ (این موضوع با مسألهٔ ۴۸ در فصل ۲۶ ادامه خواهد یافت).

۲۶

ظرفیت الکتریکی

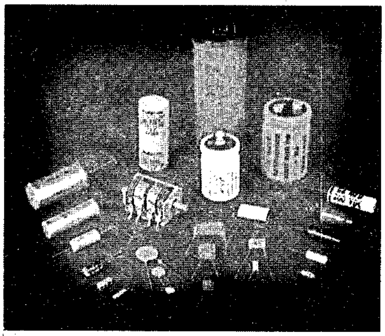


در عارضهٔ گرفتگی رشته‌های عضلانی (فیبریلاسیون) بطنی، که نوع متداولی از حملهٔ قلبی است، حفره‌های قلب از کار پمپ کردن خون باز می‌مانند، زیرا رشته‌های عضلانی آنها به طور کاتوره‌ای منقبض و شل می‌شوند. برای نجات دادن بیمار دچار شده به گرفتگی رشته‌های عضلانی بطنی باید به عضلهٔ قلب شوک داده شود تا قلب دوباره ضربان عادی خود را پیدا کند. بدین منظور، باید با فرستادن یک جریان ۲۰ آمپری به قفسهٔ سینه، در مدتی حدود ۲٫۰ میلی ثانیه، ۲۰۰ ژول انرژی به قلب منتقل شود. این کار به توان الکتریکی‌ای در حدود ۱۰۰ کیلووات نیاز دارد. چنین امکاناتی ممکن است به آسانی در اختیار یک بیمارستان باشد، اما تهیهٔ آن با مقدورات الکتریکی آمبولانسی که برای کمک به بیمار آمده است، امکان‌پذیر نیست.

پس، توان مورد نیاز برای رفع عارضهٔ گرفتگی رشته‌های عضلانی را در جاهای با امکانات ناکافی چه چیزی تأمین می‌کند؟

در این فصل به این پرسش پاسخ داده خواهد شد.

۱ـ۲۶ کاربردهای خازن‌ها



شکل ۱ـ۲۶ تصویری از انواع گوناگون خازن‌ها.

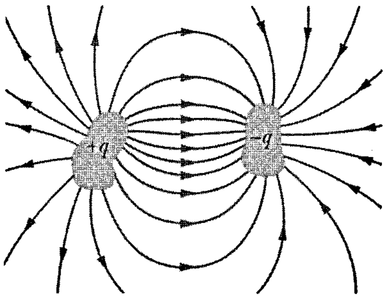
انرژی پتانسیل را می‌توان با کشیدن زه کمان، فشردن فنر، متراکم کردن گاز یا بلند کردن یک کتاب، ذخیره کرد. انرژی را به صورت انرژی پتانسیل در میدان الکتریکی نیز می‌توان ذخیره کرد و **خازن** وسیله‌ای است که دقیقاً می‌تواند برای انجام دادن چنین منظوری به کار رود.

برای مثال، در دستگاه باتری‌دار قابل حمل درخشش نور دوربین عکاسی یک خازن وجود دارد. این خازن در حین فرایند آماده شدن در فاصلهٔ میان درخشش‌ها بار الکتریکی را به آرامی انباشته می‌کند و یک میدان الکتریکی به‌وجود می‌آورد. خازن این میدان و انرژی وابسته را نگه می‌دارد تا آنکه هنگام درخشش زدن به سرعت آزاد شود.

امروزه، خازن‌ها علاوه بر ذخیره کردن انرژی پتانسیل، کاربردهای بسیار در الکترونیک و میکروالکترونیک دارند. به طور مثال، خازن‌ها عنصرهای اساسی در مدارهایی هستند که با آنها فرستنده‌ها و گیرنده‌های رادیویی و تلویزیونی را کوک می‌کنیم. به عنوان مثالی دیگر، خازن‌های میکروسکوپی بانک‌های حافظهٔ رایانه‌ها را تشکیل می‌دهند. این وسایل ظریف از نظر میزان ذخیره کردن انرژی اهمیتی ندارند، بلکه اهمیت آنها به خاطر اطلاعات **وصل ـ قطع**[1] است که با **بود** یا **نبود** میدان الکتریکی تأمین می‌شود.

۲ـ۲۶ ظرفیت الکتریکی

شکل ۱ـ۲۶، برخی خازن‌ها را از نظر اندازه و شکل نشان می‌دهد. شکل ۲ـ۲۶، نمایش دهندهٔ اجزای اصلی هر خازن، یعنی، دو رسانای منزوی با هر شکل، است. بدون توجه به شکل هندسی، تخت یا غیر تخت، این دو رسانا **صفحه** نامیده می‌شوند.



شکل ۲ـ۲۶ دو رسانا که از نظر الکتریکی نسبت به هم و نسبت به محیط پیرامون منزوی هستند، یک *خازن* تشکیل می‌دهند. وقتی خازن باردار می‌شود، رساناها، یا *صفحه‌ها*، دارای بارهای با بزرگی مساوی و مخالف q می‌شوند.

شکل ۳ـ۲۶ الف، آرایشی، کمتر متداول اما بیشتر قراردادی، از یک **خازن صفحه ـ موازی** را نشان می‌دهد که از دو صفحهٔ رسانای موازی، هر یک به مساحت A، و فاصلهٔ جدایی d تشکیل شده است. نمادی که برای نمایش دادن خازن به کار می‌رود (یعنی ⊣⊢)، از ساختار خازن ـ صفحه موازی گرفته شده است، اما برای همهٔ خازن‌ها با هر شکل هندسی، به کار برده می‌شود. فعلاً فرض می‌کنیم که در ناحیهٔ میان صفحه‌های خازن هیچ ماده‌ای (مانند شیشه یا پلاستیک) وجود ندارد، اما در بخش ۶ـ۲۶ این شرط را کنار خواهیم گذاشت.

یک خازن هنگامی باردار است که صفحه‌های آن حامل بارهای با بزرگی مساوی و مخالف $+q$ و $-q$ باشند. اما بهتر است بار الکتریکی خازن را q بگیریم که مقدار مطلق بارهای روی صفحه‌هاست. (توجه کنید که q بار خالص خازن، که مقدارش صفر است، نیست).

صفحه‌های خازن چون رسانا هستند سطح‌های هم پتانسیل تشکیل می‌دهند، یعنی تمام نقطه‌های روی یک صفحه دارای پتانسیل الکتریکی یکسان‌اند. علاوه بر این، میان صفحه‌ها یک اختلاف پتانسیل وجود دارد. به دلایل سابقهٔ کار، مقدار مطلق این اختلاف پتانسیل را به جای نماد ΔV به صورت V نشان می‌دهیم.

در یک خازن بار الکتریکی q با اختلاف پتانسیل V متناسب است؛ یعنی، می‌توان نوشت

$$q = CV \qquad (۱ـ۲۶)$$ ■

ثابت تناسب C را **ظرفیت خازن** می‌نامند. مقدار ظرفیت فقط به شرایط هندسی صفحه‌ها، و نه به بار یا اختلاف پتانسیل آنها، بستگی دارد. ظرفیت معیاری از مقدار باری است که باید روی صفحه‌ها قرار گیرد تا اختلاف پتانسیل معینی در میان آنها به وجود آید: **هر چه ظرفیت خازن بیشتر باشد بار الکتریکی بیشتری را می‌پذیرد.**

یکای SI ظرفیت، که از معادلهٔ ۱ـ۲۶ به دست می‌آید، **کولن بر ولت** (با نماد C/V) است. این یکا آن قدر به کار می‌رود که نام خاص **فاراد** (با نماد F) را به آن داده‌اند:

$$\text{یک فاراد} = 1\,F = \text{یک کولن بر ولت} = 1\,C/V \qquad (۲ـ۲۶)$$

چنانکه خواهیم دید، فاراد یکای بسیار بزرگی است و در عمل اجزای آن، مانند میکروفاراد ($1\mu F = 10^{-6} F$) و

1. ON − OFF

پیکوفاراد ($1pF=10^{-12}F$) را، که مناسب‌ترند، به کار می‌برند.

باردار کردن خازن

یکی از راه‌های باردار کردن خازن قرار دادن آن در یک مدار الکتریکی شامل باتری است. مدار الکتریکی مسیری است که از طریق آن بارهای الکتریکی می‌توانند جریان پیدا کنند. باتری وسیله‌ای است که می‌تواند اختلاف پتانسیل معینی را در بین پایانه‌های خود (یعنی نقاطی که بار به باتری وارد یا از آن خارج می‌شود) نگه دارد. این عمل تحت اثر واکنش‌های الکتروشیمیایی درونی، که در آن نیروهای الکتریکی می‌توانند بارهای درونی را به حرکت درآورند، انجام می‌شود.

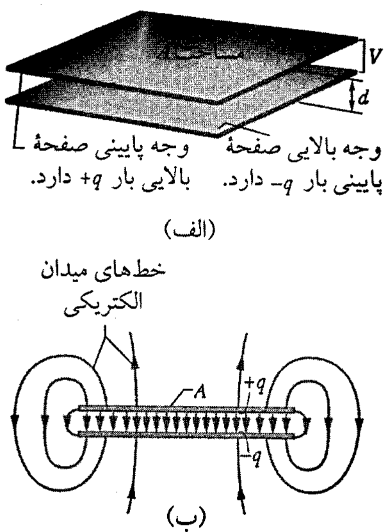
در شکل ۲۶-۴ الف، باتری B، کلید S، خازن بی‌بار C و سیم‌های رابط، یک مدار الکتریکی تشکیل می‌دهند. همان مدار در شکل ۲۶-۴ ب به صورت نموداری **طرح‌وار** رسم شده است، که در آن نمادهای باتری، کلید و خازن را نشان می‌دهند. باتری اختلاف پتانسیل V را در بین پایانه‌های خود نگه می‌دارد. پایانهٔ با پتانسیل بالاتر با + مشخص شده است و اغلب پایانهٔ مثبت، و پایانهٔ با پتانسیل پایین‌تر با − مشخص شده است و اغلب پایانهٔ منفی، نامیده می‌شود.

مدارهای نشان داده شده در شکل‌های ۲۶-۴ الف و ۲۶-۴ ب **ناکامل**‌اند، زیرا کلید S **باز** است؛ یعنی این مدار سیم‌های بسته شده به آن را به طور الکتریکی به هم وصل نکرده است. وقتی کلید **بسته** است این سیم‌ها از نظر الکتریکی به هم وصل و مدار کامل می‌شود و بار الکتریکی می‌تواند از طریق کلید و سیم‌ها جریان پیدا کند. همان طور که در فصل ۲۲ گفته شد، بارهای الکتریکی که می‌توانند از طریق یک رسانا، مانند سیم، جاری شوند همان بار الکترون‌هاست. مدار شکل ۲۶-۴ وقتی کامل می‌شود که الکترون‌ها به وسیلهٔ میدان الکتریکی حاصل از باتری در سیم‌ها به راه بیفتند. میدان الکتریکی، الکترون‌ها را از صفحهٔ h خازن به پایانهٔ مثبت باتری می‌راند؛ در نتیجه، صفحهٔ h که الکترون از دست داده است، به طور مثبت باردار می‌شود. میدان الکتریکی همین تعداد الکترون را از پایانهٔ منفی باتری به صفحهٔ l خازن می‌راند؛ در نتیجه، صفحهٔ l با دریافت الکترون به طور منفی باردار می‌شود، درست به همان اندازهٔ بار صفحهٔ h که با از دست دادن الکترون به طور مثبت باردار شده است.

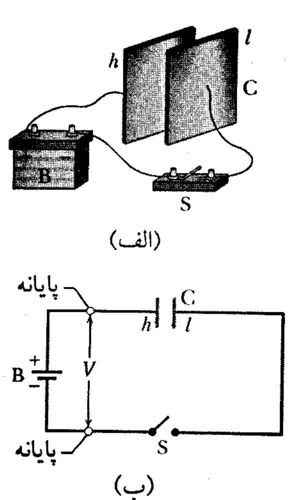
در آغاز، هنگامی که صفحه‌های خازن بی‌بار هستند اختلاف پتانسیل میان آنها صفر است. در حین باردار شدن صفحه‌ها با بارهای مخالف، این اختلاف پتانسیل تا جایی افزایش می‌یابد که با V، اختلاف پتانسیل میان پایانه‌های باتری برابر شود. در این حالت، صفحهٔ h و پایانهٔ مثبت باتری دارای پتانسیل یکسان می‌شوند و دیگر میدان الکتریکی در سیم بین آنها وجود ندارد. به همین ترتیب، صفحهٔ l و پایانهٔ منفی هم به پتانسیل یکسان می‌رسند و در نتیجه در سیم بین آنها میدان الکتریکی از میان می‌رود. اکنون، چون میدان الکتریکی صفر است الکترون‌ها دیگر حرکت نمی‌کنند. در این حالت گفته می‌شود خازن با اختلاف پتانسیل V و بار الکتریکی q، که رابطهٔ میان آنها، مطابق معادلهٔ ۲۶-۱ است، **به طور کامل باردار شده است**.

در اینجا فرض می‌شود که در حین باردار شدن خازن و پس از آن، بار الکتریکی نمی‌تواند از طریق فضای میان صفحه‌ها از صفحه‌ای به صفحهٔ دیگر برود. هم‌چنین، فرض می‌کنیم که یک خازن می‌تواند بار را به مدت نامحدود نگه دارد (یا ذخیره کند) مگر آنکه با قرار گرفتن در یک مدار بار آن بتواند **تخلیه** شود.

خودآزمایی ۱: در یک خازن، هنگامی که (الف) بار خازن q، دو برابر می‌شود و (ب) اختلاف پتانسیل دو سر خازن V، سه برابر می‌شود، آیا ظرفیت C افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد، یا ثابت می‌ماند؟



شکل ۲۶-۳ (الف) خازن صفحه-موازی از دو صفحه، هر یک به مساحت A، و به فاصلهٔ d از یکدیگر ساخته شده است. این صفحه‌ها دارای بارهای با بزرگی مساوی و مخالف q بر روی سطح‌های متقابل هستند. (ب) همان طور که خط‌های میدان نشان می‌دهند، میدان الکتریکی ناشی از صفحه‌های باردار در ناحیهٔ مرکزی میان صفحه‌ها یکنواخت است. میدان الکتریکی در لبه‌های صفحه‌ها یکنواخت نیست و این موضوع از «فریز شدن» خط‌های میدان در لبه‌ها پیداست.



شکل ۲۶-۴ (الف) نمودار باتری B، کلید S، و صفحه‌های h و l خازن C، که در مداری به هم وصل شده‌اند. (ب) نمودار طرح‌وار ***عنصرهای مداری***، که با نمادهای مربوط نشان داده شده‌اند.

روشهای مسأله حل کردن

روش ۱: نماد V و اختلاف پتانسیل

در فصل‌های پیش نماد V معرف پتانسیل الکتریکی در یک نقطه یا در یک سطح هم پتانسیل بود. اما در مورد وسایل الکتریکی، V اغلب معرف اختلاف پتانسیل میان دو نقطه یا دو سطح هم پتانسیل است. معادلهٔ ۲۶-۱ نمونه‌ای از کاربرد این گونه نمادگذاری است. در بخش ۲۶-۳ با آمیزه‌ای از دو مفهوم V آشنا خواهیم شد. در آنجا و در فصل‌های بعد در هنگام استفاده از این نماد باید به آن دقت کرد.

در ضمن، در اینجا و در جاهای دیگر، انواع گوناگونی از عبارت‌ها را در مورد اختلاف پتانسیل خواهیم دید. اختلاف پتانسیل یا «پتانسیل» یا «ولتاژ» را ممکن است در مورد یک وسیله یا در مورد دو سر یک وسیله به کار برد. یک خازن می‌تواند تا یک اختلاف پتانسیل باردار شود، چنانکه می‌توان گفت «یک خازن تا ۱۲V باردار شده است». هم‌چنین، یک باتری می‌تواند با اختلاف پتانسیل دو سرش، مثلاً، به صورت «یک باتری ۱۲V» مشخص شود. همیشه توجه داشته باشید که منظور از این عبارت‌ها چیست: میان دو نقطه، مانند دو نقطه از یک مدار یا دو سر وسیله‌ای مانند یک باتری، اختلاف پتانسیل وجود دارد.

۳-۲۶ محاسبهٔ ظرفیت

اکنون، می‌خواهیم ظرفیت خازنی را که شکل هندسی‌اش معلوم است، حساب کنیم. چون شکل‌های هندسی متفاوتی مورد نظر است، عاقلانه این است که برای آسانی کار از یک روش کلی استفاده کنیم. این روش به طور خلاصه چنین است: (۱) بار الکتریکی q را روی صفحه‌های خازن در نظر می‌گیریم؛ (۲) با استفاده از قانون گاؤس $\vec{E}$، میدان الکتریکی میان صفحه‌ها را برحسب این بار حساب می‌کنیم؛ (۳) با معلوم بودن $\vec{E}$، به کمک معادلهٔ ۲۵-۱۸ اختلاف پتانسیل میان صفحه‌ها، V، را به دست می‌آوریم؛ (۴) مقدار C را با استفاده از معادلهٔ ۲۶-۱ حساب می‌کنیم.

پیش از شروع به این کار، محاسبهٔ میدان و اختلاف پتانسیل را با در نظر گرفتن برخی فرض‌های مناسب می‌توان ساده کرد. اکنون، هر کدام از این مطالب را، به نوبت، مورد بحث قرار می‌دهیم.

محاسبهٔ میدان الکتریکی

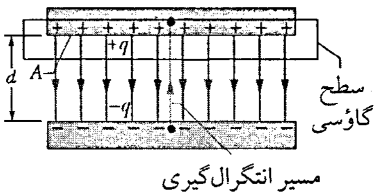
برای پیدا کردن رابطهٔ $\vec{E}$، میدان الکتریکی میان صفحه‌های خازن، با بار روی هر صفحه q، از قانون گاؤس استفاده می‌کنیم:

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q \qquad (۲۶\text{-}۳)$$

در اینجا q بار محصور شده توسط یک سطح گاؤسی، و $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$ شار الکتریکی خالص گذرنده از آن سطح است. در تمام حالت‌های مورد نظر سطح گاؤسی طوری انتخاب می‌شود که هنگام عبور شار الکتریکی از آن، $\vec{E}$ دارای بزرگی یکنواخت E باشد و بردارهای $\vec{E}$ و $d\vec{A}$ با هم موازی باشند. در این صورت، معادلهٔ ۲۶-۳ به صورت زیر ساده می‌شود

$$q = \varepsilon_0 EA \qquad \text{(حالت خاص معادلهٔ ۲۶-۳)} \qquad (۲۶\text{-}۴)$$

در اینجا A مساحت آن بخش از سطح گاؤسی است که شار از آن می‌گذرد. به خاطر آسانی، سطح گاؤسی را همیشه طوری رسم می‌کنیم که بار روی صفحهٔ مثبت را به طور کامل محصور کند؛ به عنوان مثال، شکل ۲۶-۵ را ببینید.



شکل ۲۶-۵ نمودار یک خازن صفحه ـ موازی باردار. یک سطح گاؤسی بار روی صفحهٔ مثبت را محصور کرده است. انتگرال معادلهٔ ۲۶-۶ بر روی یک مسیر مستقیم از صفحهٔ منفی تا صفحهٔ مثبت گرفته می‌شود.

محاسبهٔ اختلاف پتانسیل

با توجه به نمادگذاری فصل ۲۵ (معادلهٔ ۲۵-۱۸)، رابطهٔ اختلاف پتانسیل میان صفحه‌های خازن با میدان الکتریکی $\vec{E}$، به صورت زیر است

$$V_f - V_i = -\int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s} \qquad (۲۶\text{-}۵)$$

در اینجا انتگرال باید در طول مسیری گرفته شود که از یک صفحه آغاز و به صفحهٔ دیگر ختم شود. همیشه مسیری را انتخاب می‌کنیم که در راستای یک خط میدان الکتریکی از صفحهٔ منفی تا صفحهٔ مثبت باشد. در این مسیر بردارهای $\vec{E}$ و $\vec{ds}$ دارای جهت‌های مخالف‌اند و در نتیجه حاصل‌ضرب نقطه‌ای $\vec{E} \cdot \vec{ds}$ برابر با $-Eds$ است. بنابراین، طرف راست معادلهٔ ۲۶ـ۵ مثبت خواهد بود. با این فرض که V معرف $V_f - V_i$ است، معادلهٔ ۲۶ـ۵ را دوباره چنین می‌نویسیم:

$$V = \int_{-}^{+} Eds \qquad \text{(حالت خاص معادلهٔ ۲۶ـ۵)} \qquad (۲۶ـ۶)$$

در این معادله نشانه‌های $-$ و $+$ یادآوری می‌کنند که مسیر انتگرال‌گیری از صفحهٔ منفی آغاز و به صفحهٔ مثبت ختم می‌شود.

اکنون، می‌توان معادله‌های ۲۶ـ۴ و ۲۶ـ۶ را در مورد برخی حالت‌های خاص به کار برد.

خازن صفحه ـ موازی

فرض می‌کنیم صفحه‌های خازن صفحه ـ موازی شکل ۲۶ـ۵ آن قدر بزرگ و به هم نزدیک باشند که بتوان از فریز شدن میدان الکتریکی در لبه‌های صفحه‌ها چشم‌پوشی کرد و $\vec{E}$ را در سرتاسر فضای میان صفحه‌ها ثابت در نظر گرفت.

اکنون، یک سطح گاؤسی را که فقط شامل q، بار موجود روی صفحهٔ مثبت است، مطابق شکل ۲۶ـ۵، رسم می‌کنیم. با توجه به معادلهٔ ۲۶ـ۴ می‌توان نوشت

$$q = \varepsilon_0 EA \qquad (۲۶ـ۷)$$

که در آن A مساحت هر صفحهٔ خازن است.

با استفاده از معادلهٔ ۲۶ـ۶، داریم

$$V = \int_{-}^{+} Eds = E\int_{0}^{d} ds = Ed \qquad (۲۶ـ۸)$$

در این معادله E ثابت است و می‌توان آن را از انتگرال خارج کرد؛ مقدار انتگرال بعدی برابر با فاصلهٔ میان صفحه‌ها، d، است.

اکنون، اگر q را از معادلهٔ ۲۶ـ۷ و V را از معادلهٔ ۲۶ـ۸ در رابطهٔ $q=CV$ (معادلهٔ ۲۶ـ۱) جانشانی کنیم، داریم

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \qquad \text{(خازن صفحه ـ موازی)} \qquad (۲۶ـ۹)$$ ■

بنابراین، ظرفیت فقط به عامل‌های هندسی ـ مانند مساحت A و فاصلهٔ صفحه‌ها، d ـ بستگی دارد. توجه کنید که وقتی مساحت صفحه A، را افزایش یا فاصلهٔ جدایی d را کاهش می‌دهیم، ظرفیت C افزایش می‌یابد.

در ضمن، یادآوری می‌شود که معادلهٔ ۲۶ـ۹ یکی از دلیل‌های نوشتن ثابت الکتروستاتیکی در قانون کولن به صورت $۱/۴\pi\varepsilon_0$ را نشان می‌دهد. اگر این کار را نمی‌کردیم معادلهٔ ۲۶ـ۹ (که در مهندسی بیش از قانون کولن کاربرد دارد)، چنین شکل ساده‌ای پیدا نمی‌کرد. علاوه بر این، معادلهٔ ۲۶ـ۹ به ما اجازه می‌دهد که در مسأله‌های مربوط به خازن‌ها، بتوانیم ثابت گذردهی ε_0 را برحسب یکاهای مناسب‌تر بنویسیم:

$$\varepsilon_0 = ۸{,}۸۵ \times ۱۰^{-۱۲}\mathrm{F/m} = ۸{,}۸۵\mathrm{pF/m} \qquad (۲۶ـ۱۰)$$

این مقدار ثابت پیشتر چنین نوشته شده بود:

$$\varepsilon_0 = ۸{,}۸۵ \times ۱۰^{-۱۲}\mathrm{C^۲/N.m^۲} \qquad (۲۶ـ۱۱)$$

خازن استوانه‌ای

شکل ۲۶ـ۶، مقطع یک خازن استوانه‌ای به طول L را نشان می‌دهد که از دو استوانهٔ هم محور به شعاع‌های a و b تشکیل شده است. در اینجا فرض می‌کنیم $L \gg b$، تا بتوانیم از فریز شدن میدان الکتریکی در دو سر

استوانه‌ها چشم‌پوشی کنیم. بزرگی بار هر صفحه q است.

استوانه‌ای به طول L و شعاع قاعدهٔ r را، که مطابق شکل ۲۶-۶، با سرپوش‌هایی در دو انتها مسدود شده است، به عنوان سطح گاؤسی انتخاب می‌کنیم. با استفاده از معادلهٔ ۲۶-۴، داریم

$$q = \varepsilon_0 EA = \varepsilon_0 E(2\pi rL)$$

که در آن $2\pi rL$ مساحت سطح جانبی استوانهٔ گاؤسی است. سرپوش‌ها هیچ شاری از خود عبور نمی‌دهند. پس از حل کردن این معادله نسبت به E، داریم

$$E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 Lr} \qquad (۲۶\text{-}۱۲)$$

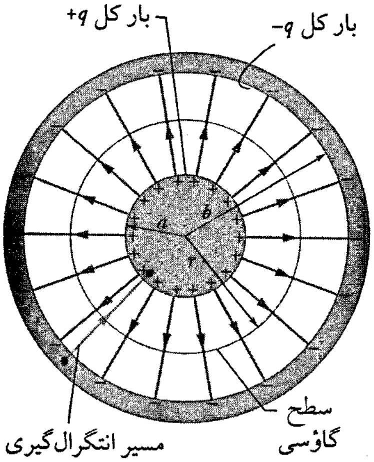
با جانشانی این نتیجه در معادلهٔ ۲۶-۶، داریم

$$V = \int_-^+ Eds = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L}\int_b^a \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \qquad (۲۶\text{-}۱۳)$$

در اینجا از رابطهٔ $ds=-dr$ استفاده کرده‌ایم (انتگرال در طول مسیر شعاعی به درون سو گرفته شده است). در نتیجه، با توجه به رابطهٔ $C=q/V$، داریم

$$C = 2\pi\varepsilon_0 \frac{L}{\ln(b/a)} \qquad \text{(خازن استوانه‌ای)} \qquad (۲۶\text{-}۱۴)$$ ■

چنانکه دیده می‌شود، ظرفیت خازن استوانه‌ای نیز مانند ظرفیت خازن صفحه ـ موازی فقط به عامل‌های هندسی، که در اینجا L، b و a هستند، بستگی دارد.



شکل ۲۶-۶ نمودار مقطع یک خازن استوانه‌ای دراز. شکل، نشان دهندهٔ یک سطح گاوسی استوانه‌ای به شعاع r (محصور کنندهٔ صفحهٔ مثبت) و مسیر شعاعی انتگرال‌گیری است که در طول آن معادلهٔ ۲۶-۶ به کار می‌رود. از این شکل به عنوان نمودار بزرگترین مقطع یک خازن کروی هم استفاده می‌شود.

خازن کروی

شکل ۲۶-۶، بزرگترین مقطع خازنی را که از دو پوستهٔ کروی به شعاع‌های a و b تشکیل شده است، نیز نشان می‌دهد. کره‌ای به شعاع r، هم مرکز با دو پوسته، را به عنوان سطح گاؤسی رسم می‌کنیم. با استفاده از معادلهٔ ۲۶-۴، داریم

$$q = \varepsilon_0 EA = \varepsilon_0 E(4\pi r^2)$$

که در آن $4\pi r^2$ مساحت سطح گاؤسی کروی است. از حل کردن این معادله نسبت به E، داریم

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \qquad (۲۶\text{-}۱۵)$$

که رابطهٔ آشنای مربوط به میدان الکتریکی ناشی از یک توزیع بار کروی (معادلهٔ ۲۴-۱۵) است. اگر این رابطه را در معادلهٔ ۲۶-۶ جانشانی کنیم، خواهیم داشت

$$V = \int_-^+ Eds = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_b^a \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{b-a}{ab} \qquad (۲۶\text{-}۱۶)$$

در اینجا باز هم به جای ds مقدار $-dr$ را قرار داده‌ایم. حال اگر معادلهٔ ۲۶-۱۶ را در معادلهٔ ۲۶-۱ جانشانی و آن را نسبت به C حل کنیم، خواهیم داشت

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a} \qquad \text{(خازن کروی)} \qquad (۲۶\text{-}۱۷)$$ ■

کرهٔ منزوی

تک رسانای کروی منزوی به شعاع R را می‌توان به عنوان یک خازن در نظر گرفت، با این فرض که «صفحهٔ ناپیدای خازن» کره‌ای به شعاع بی‌نهایت باشد. به هر حال، خط‌های میدانی که از سطح یک رسانای منزوی با بار مثبت بیرون می‌آیند، باید به جایی ختم شوند؛ دیوارهای اتاق در برگیرندهٔ رسانا می‌تواند عملاً کرهٔ مورد نظر، با شعاع بی‌نهایت باشد.

برای پیدا کردن ظرفیت رسانای منزوی، نخست معادلهٔ ۲۶-۱۷ را به صورت زیر می‌نویسیم

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{a}{1-a/b}$$

اگر فرض $b \longrightarrow \infty$ را در نظر بگیریم و R را به جای a قرار دهیم، داریم

$$C = ۴\pi\varepsilon_0 R \qquad \text{(کرهٔ منزوی)} \qquad (۲۶\text{-}۱۸)$$ ■

توجه کنید که این فرمول و فرمول‌های دیگری که برای ظرفیت خازن به دست آوردیم (معادله‌های ۲۶-۹، ۲۶-۱۴ و ۲۶-۱۷) شامل ثابت ε_0 ضربدر کمیتی با بُعد طول است.

خودآزمایی ۲: در خازن‌هایی که با باتری‌های یکسان باردار می‌شوند، آیا بار ذخیره شده توسط خازن در هر یک از حالت‌های زیر افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد، یا ثابت می‌ماند؟ (الف) در خازن صفحه - موازی فاصلهٔ میان صفحه‌ها افزایش می‌یابد. (ب) در خازن استوانه‌ای شعاع استوانهٔ درونی افزایش می‌یابد. (پ) در خازن کروی شعاع پوستهٔ کروی بیرونی افزایش می‌یابد.

مسألهٔ نمونهٔ ۲۶-۱

ظرفیت خازن انبارشی در یک تراشهٔ **حافظهٔ با دسترسی کاتوره‌ای** (RAM)[1] ۵۵fF است. اگر این خازن تا ولتاژ ۵٫۳V باردار شود، چند الکترون اضافی روی صفحهٔ منفی آن قرار می‌گیرد؟

حل: در اینجا یک **نکتهٔ کلیدی** این است که تعداد الکترون‌های اضافی روی صفحهٔ منفی n، را وقتی می‌توان پیدا کرد که q، مقدار کل بارهای اضافی روی صفحه معلوم باشد. تعداد الکترون‌ها برابر است با $n=q/e$، که در آن e بزرگی بار هر الکترون است. **نکتهٔ کلیدی** دوم این است که q طبق معادلهٔ ۲۶-۱ $(q=CV)$ به V، اختلاف پتانسیلی که با آن خازن باردار شده است، بستگی دارد. با توجه به این دو نکته، داریم

$$n = \frac{q}{e} = \frac{CV}{e} = \frac{(۵۵\times۱۰^{-۱۵}\text{F})(۵٫۳\text{V})}{۱٫۶۰\times۱۰^{-۱۹}\text{C}} \Rightarrow$$

$$n = ۱٫۸\times۱۰^{۶} \quad \text{الکترون} \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

این عدد برای الکترون‌ها بسیار کوچک است. یک ذرهٔ غبار، که خیلی هم ریز است و هرگز نمی‌توان آن را در آرامش دید، در حدود $۱۰^{۱۷}$ الکترون (و به همین تعداد پروتون) دارد.

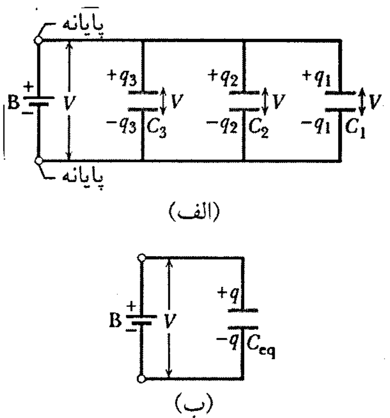
۴-۲۶ خازن‌های موازی و سری

هرگاه در یک مدار ترکیبی از خازن‌ها وجود داشته باشد، برخی اوقات به جای آن ترکیب می‌توان یک **خازن معادل** قرار داد، به گونه‌ای که ظرفیت این تک خازن همان ظرفیت ترکیب واقعی خازن‌ها باشد. این جانشینی می‌تواند مدار را ساده‌تر کند و موجب شود که برای کمیت‌های نامعلوم مدار راه‌حل‌های آسان‌تری به دست آید. در اینجا دو ترکیب اساسی مربوط به تعیین ظرفیت معادل خازن‌ها را مورد بحث قرار می‌دهیم.

ترکیب موازی خازن‌ها

شکل ۲۶-۷ الف، یک مدار الکتریکی را نشان می‌دهد که در آن سه خازن به طور موازی به باتری B وصل شده‌اند. توصیف موضوع به چگونگی ترسیم صفحه‌های خازن چندان بستگی ندارد. اما اصطلاح «به طور موازی» به این معنی است که خازن‌ها در یک صفحه مستقیماً با سیم به هم، و در صفحهٔ دیگر نیز مستقیماً با سیم به هم وصل شده‌اند و اختلاف پتانسیل V به دو گروه صفحه‌های متصل به هم اعمال می‌شود. بنابراین، اختلاف پتانسیل هر خازن همان V است که بار روی هر خازن را تولید می‌کند. (در شکل ۲۶-۷ الف، پتانسیل اعمال شدهٔ V توسط باتری تأمین می‌شود). به طور کلی، می‌توان گفت که:

◄ هرگاه به دو سر چند خازن متصل به هم به طور موازی اختلاف پتانسیل V اعمال شود، به دو سر هر خازن هم همان اختلاف پتانسیل V اعمال می‌شود. بار کل ذخیره شده در روی خازن‌ها q، برابر با مجموع بارهای ذخیره شده در تمام خازن‌هاست.



شکل ۲۶-۷ (الف) مدار شامل ترکیب سه خازن که به طور موازی به باتری B بسته شده‌اند. این باتری اختلاف پتانسیل V را در پایانه‌های خود و در نتیجه در دو سر **هر یک** از خازن‌ها نگه می‌دارد. (ب) خازن معادل، با ظرفیت C_{eq}، به جای ترکیب موازی خازن‌ها قرار گرفته است.

1. random access memory (RAM)

هنگام تحلیل کردن مدار خازن‌های موازی با جانشینی ذهنی زیر می‌توانیم عمل را ساده کنیم:

◀ خازن‌های متصل به هم به طور موازی را می‌توان با خازن معادلی با همان بار کل q و همان اختلاف پتانسیل V مربوط به خازن‌های واقعی، جانشین کرد.

شکل ۲۶ـ۷ ب، خازن معادل (با ظرفیت معادل C_{eq}) را نشان می‌دهد که به جای سه خازن (با ظرفیت‌های واقعی C_1، C_2 و C_3) در شکل ۲۶ـ۷ الف، قرار گرفته است.

برای به دست آوردن رابطهٔ مربوط به C_{eq} در شکل ۲۶ـ۷ ب، نخست با استفاده از معادلهٔ ۲۶ـ۱ مقدار بار روی هر خازن واقعی را پیدا می‌کنیم:

$$q_1 = C_1V \text{ ، } q_2 = C_2V \text{ و } q_3 = C_3V$$

بنابراین، بار کل روی ترکیب موازی خازن‌ها در شکل ۲۶ـ۷ الف، برابر است با:

$$q = q_1 + q_2 + q_3 = (C_1 + C_2 + C_3)V$$

پس، ظرفیت معادل، با همان بار کل q و اختلاف پتانسیل اعمال شدهٔ V به ترکیب خازن‌ها برابر است با:

$$C_{eq} = \frac{q}{V} = C_1 + C_2 + C_3$$

نتیجهٔ حاصل برای n خازن را می‌توان به صورت زیر نوشت

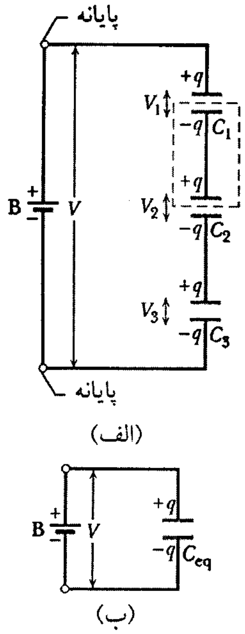
$$C_{eq} = \sum_{j=1}^{n} C_j \qquad (n \text{ خازن موازی}) \qquad (۲۶\text{-}۱۹)$$ ■

بنابراین، برای تعیین ظرفیت معادل یک ترکیب موازی باید ظرفیت‌های تمام خازن‌ها را با هم جمع کرد.

ترکیب سری خازن‌ها

شکل ۲۶ـ۸ الف، سه خازن را نشان می‌دهد که به طور سری به هم و به باتری B وصل شده‌اند. توصیف موضوع به چگونگی ترسیم خازن‌ها چندان بستگی ندارد. اما اصطلاح «به طور سری» به این معنی است که خازن‌ها، یکی پس از دیگری، با سیم به طور سری به هم وصل شده‌اند و اختلاف پتانسیل V به دو انتهای این ترکیب سری اعمال شده است. (در شکل ۲۶ـ۸ الف، اختلاف پتانسیل V توسط باتری B تأمین می‌شود). بنابراین، اختلاف پتانسیل‌های موجود در دو سر خازن‌های سری روی خازن‌ها بارهای یکسان q را به وجود می‌آورند.

◀ هرگاه اختلاف پتانسیل V به دو سر چند خازن متصل به هم به طور سری اعمال شود، خازن‌ها دارای بار یکسان q می‌شوند. مجموع اختلاف پتانسیل‌های دو سر تمام خازن‌ها برابر با اختلاف پتانسیل اعمال شدهٔ V است.



شکل ۲۶ـ۸ (الف) مدار شامل سه خازن که به طور سری به باتری B وصل شده‌اند. این باتری اختلاف پتانسیل V را در میان صفحه‌های بالایی و پایینی ترکیب سری نگه می‌دارد. (ب) خازن معادل، با ظرفیت C_{eq}، به جای ترکیب سری خازن‌ها قرار گرفته است.

با بررسی واکنش زنجیری عملیات مربوط به باردار شدن هر خازن که باعث باردار شدن خازن بعدی می‌شود، دلیل مساوی بودن بارهای نهایی خازن‌ها را می‌توان توضیح داد. ابتدا از خازن ۳ آغاز می‌کنیم، تا در بالا به خازن ۱ برسیم. وقتی باتری در آغاز به خازن‌های سری وصل می‌شود، روی صفحهٔ پایینی خازن ۳ بار $-q$ تولید می‌کند. این بار، بار منفی را از صفحهٔ بالایی خازن ۳ می‌راند (و آن را دارای بار $+q$ می‌کند). بار منفی رانده شده به سوی صفحهٔ پایینی خازن ۲ حرکت می‌کند (و به آن بار $-q$ می‌دهد). سپس، بار روی صفحهٔ پایینی خازن ۲ بار منفی را از صفحهٔ بالایی خازن ۲ می‌راند (و آن را دارای بار $+q$ می‌کند)، این بار منفی به سوی صفحه پایینی خازن ۱ رانده می‌شود (و به آن بار $-q$ می‌دهد). سرانجام، بار روی صفحهٔ پایینی خازن ۱ به‌حرکت بار منفی از صفحهٔ بالایی خازن ۱ به سوی باتری کمک می‌کند، و صفحهٔ بالایی دارای بار $+q$ می‌شود.

در اینجا در مورد خازن‌های سری دو نکتهٔ مهم وجود دارد:

۱. در خازن‌های سری بار الکتریکی در حین جابه‌جا شدن از یک خازن به خازن دیگر می‌تواند فقط در یک مسیر، مثلاً از خازن ۳ به خازن ۲ در شکل ۲۶ـ۸ الف، حرکت کند. اگر مسیرهای دیگری نیز وجود داشته باشد، معلوم می‌شود که خازن‌ها به طور سری به هم وصل نشده‌اند. در مسألهٔ نمونهٔ ۲۶ـ۲ مثالی در این مورد بیان شده است.

۲. باتری بارها را مستقیماً در روی دو صفحهٔ متصل به خود (صفحهٔ پایینی خازن ۳ و صفحهٔ بالایی خازن ۱ در شکل ۲۶ـ۸ الف) به وجود می‌آورد. بارهای ایجاد شده در روی صفحه‌های دیگر، صرفاً از جابه‌جایی بارهای قبلی موجود در آنجا ناشی می‌شوند. مثلاً، در شکل ۲۶ـ۸ بخشی از مدار محصور شده با خط‌چین از نظر الکتریکی نسبت به بقیهٔ مدار منزوی است. در نتیجه، بار خالص آن بخش نمی‌تواند توسط باتری تغییر کند. بار آن بخش فقط می‌تواند باز توزیع شود.

هنگام تحلیل کردن مدار خازن‌های سری با جانشینی ذهنی زیر می‌توانیم عمل را ساده کنیم:

◀ خازن‌های متصل به هم به طور سری را می‌توان با خازن معادلی با همان بار q و همان اختلاف پتانسیل کل V مربوط به خازن‌های سری واقعی، جانشین کرد.

شکل ۲۶ـ۸ ب، خازن معادل (با ظرفیت معادل C_{eq}) را نشان می‌دهد که به جای سه خازن واقعی (با ظرفیت‌های واقعی $C_۱$، $C_۲$ و $C_۳$) در شکل ۲۶ـ۸ الف، قرار گرفته است.

برای به دست آوردن رابطهٔ مربوط به C_{eq} در شکل ۲۶ـ۸ ب، نخست با استفاده از معادلهٔ ۲۶ـ۱ اختلاف پتانسیل هر خازن واقعی را پیدا می‌کنیم:

$$V_۳ = \frac{q}{C_۳} \quad \text{و} \quad V_۲ = \frac{q}{C_۲} \quad ، \quad V_۱ = \frac{q}{C_۱}$$

اختلاف پتانسیل کل ناشی از باتری V، برابر با مجموع این سه اختلاف پتانسیل است. در نتیجه داریم

$$V = V_۱ + V_۲ + V_۳ = q\left(\frac{۱}{C_۱} + \frac{۱}{C_۲} + \frac{۱}{C_۳}\right)$$

پس، ظرفیت معادل برابر است با:

$$C_{eq} = \frac{q}{V} = \frac{۱}{۱/C_۱ + ۱/C_۲ + ۱/C_۳} \Rightarrow$$

$$\frac{۱}{C_{eq}} = \frac{۱}{C_۱} + \frac{۱}{C_۲} + \frac{۱}{C_۳}$$

این نتیجه را به آسانی برای n خازن می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{۱}{C_{eq}} = \sum_{j=۱}^{n} \frac{۱}{C_j} \qquad (n\ \text{خازن سری}) \qquad (۲۶\text{ـ}۲۰)$$ ■

با توجه به معادلهٔ ۲۶ـ۲۰ می‌توان نشان داد که در ترکیب سری خازن‌ها ظرفیت معادل همیشه از کمترین ظرفیت خازن‌های به هم بسته شده **کمتر** است.

خودآزمایی ۳: یک باتری با پتانسیل V، بار q را در ترکیب دو خازن مشابه ذخیره می‌کند. اختلاف پتانسیل دو سر هر خازن و بار روی آن در حالتی که ترکیب خازن‌ها (الف) موازی و (ب) سری، باشد، چیست؟

مسألهٔ نمونهٔ ۲۶ـ۲

(الف) ظرفیت معادل ترکیب خازن‌های نشان داده شده در شکل ۲۶ـ۹ الف، که به دو سر آنها اختلاف پتانسیل V اعمال شده چقدر است؟ فرض کنید

$$C_۱ = ۱۲٫۰\mu F \quad ، \quad C_۲ = ۵٫۲۰\mu F \quad و \quad C_۳ = ۴٫۵۰\mu F$$

حل: در اینجا **نکتهٔ کلیدی** این است، که خازن‌های متصل به هم به طور سری و خازن‌های متصل به هم به طور موازی را می‌توان با خازن معادل آنها جانشین کرد. بنابراین نخست باید ببینیم که در شکل ۲۶ـ۹ الف کدام خازن‌ها به طور سری و کدام آنها به طور موازی به هم وصل شده‌اند.

خازن‌های ۱ و ۳ پشت سر هم وصل شده‌اند، اما آیا آنها به صورت سری هستند؟ پتانسیل اعمال شده به خازن‌ها V، بار روی صفحهٔ پایینی خازن ۳ را تأمین می‌کند. این بار باعث جابه‌جا شدن بار روی صفحهٔ بالایی خازن ۳ می‌شود. اما توجه کنید که این بار در حال جابه‌جایی می‌تواند به صفحه‌های پایینی هر دو خازن ۱ و ۲ منتقل شود. چون در این حالت برای حرکت کردن بارها دو مسیر به وجود می‌آید، پس خازن ۳ با خازن ۱ (یا خازن ۲) به‌صورت سری نیست.

آیا خازن‌های ۱ و ۲ به صورت موازی‌اند؟ بله. چون صفحه‌های بالایی آنها مستقیماً به هم و صفحه‌های پایینی آنها نیز مستقیماً به هم وصل شده‌اند و پتانسیل الکتریکی به زوج صفحهٔ ـ بالایی و زوج صفحهٔ ـ پایینی خازن‌ها اعمال شده است. بنابراین، خازن‌های ۱ و ۲ با هم موازی‌اند و با توجه به معادلهٔ ۲۶ـ۱۹ ظرفیت معادل آنها، $C_{۱۲}$، برابر است با:

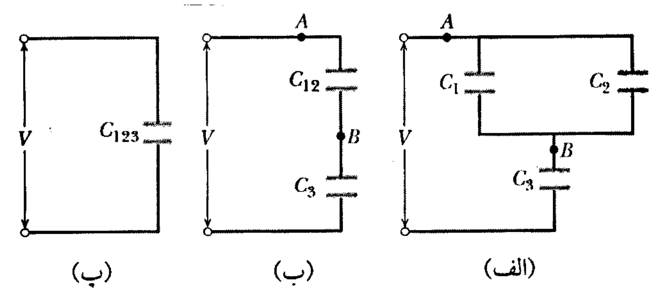
$$C_{۱۲} = C_۱ + C_۲ = ۱۲٫۰\mu F + ۵٫۳۰\mu F = ۱۷٫۳\mu F$$

در شکل ۲۶ـ۹ ب، خازن‌های ۱ و ۲ با خازن معادل‌شان، یعنی خازن ۱۲ (بخوانید خازن «یک دو») جانشین شده است. (در شکل‌های ۲۶ـ۹ الف و ۲۶ـ۹ ب اتصال‌ها در نقاط A و B دقیقاً یکی هستند).

آیا خازن ۱۲ با خازن ۳ به صورت موازی است؟ باز هم با کاربرد روش آزمون ظرفیت‌های سری می‌بینیم که بار جابه‌جا شده از صفحهٔ بالایی خازن ۳ باید به تمامی به صفحهٔ پایینی خازن ۱۲ منتقل شود. بنابراین، خازن ۱۲ و خازن ۳ به صورت سری قرار دارند و ما می‌توانیم آنها را با خازن معادل‌شان $C_{۱۲۳}$، مطابق شکل ۲۶ـ۹ پ، جانشین کنیم. با استفاده از معادلهٔ ۲۶ـ۲۰، داریم

$$\frac{۱}{C_{۱۲۳}} = \frac{۱}{C_{۱۲}} + \frac{۱}{C_۳} = \frac{۱}{۱۷٫۳\mu F} + \frac{۱}{۴٫۵۰\mu F} = ۰٫۲۸۰(\mu F)^{-۱} \Rightarrow$$

$$C_{۱۲۳} = \frac{۱}{۰٫۲۸۰(\mu F)^{-۱}} = ۳٫۵۷\mu F \qquad \text{(پاسخ)}$$



شکل ۲۶ـ۹ مسألهٔ نمونهٔ ۲۶ـ۲. (الف) نمودار ترکیب سه خازن. (ب) به جای ترکیب موازی $C_۱$ و $C_۲$ ظرفیت $C_{۱۲}$ قرار گرفته است. (پ) به جای ترکیب سری $C_{۱۲}$ و $C_۳$ ظرفیت معادل $C_{۱۲۳}$ قرار گرفته است.

(ب) در شکل ۲۶ـ۹ الف، اختلاف پتانسیل اعمال شده به پایانه‌های ورودی برابر است با $V=۱۲٫۵V$، بار خازن $C_۱$ چقدر است؟

حل: در اینجا یک **نکتهٔ کلیدی** این است که برای پیدا کردن $q_۱$، بار روی خازن ۱، باید به طور معکوس، یعنی؛ شروع کردن از خازن معادل ۱۲۳، عمل کنیم. چون اختلاف پتانسیل معلوم V (مساوی با ۱۲٫۵V) در دو سر ترکیب واقعی سه خازن شکل ۲۶ـ۹ الف قرار دارد، همین اختلاف پتانسیل به دو سر خازن ۱۲۳ در شکل ۲۶ـ۹ پ نیز اعمال شده است. بنابراین، با استفاده از معادلهٔ ۲۶ـ۱ ($q=CV$)، داریم

$$q_{۱۲۳} = C_{۱۲۳}V = (۳٫۵۷\mu F)(۱۲٫۵V) = ۴۴٫۶\mu C$$

نکتهٔ کلیدی دوم این است که بار خازن‌های سری ۱۲ و ۳ در شکل ۲۶ـ۹ ب، برابر با بار خازن معادل ۱۲۳ است. بنابراین، بار خازن ۱۲ برابر است با $q_{۱۲}=q_{۱۲۳}=۴۴٫۶\mu C$. با توجه به معادلهٔ ۲۶ـ۱، اختلاف پتانسیل دو سر خازن ۱۲ برابر است با:

$$V_{۱۲} = \frac{q_{۱۲}}{C_{۱۲}} = \frac{۴۴٫۶\mu C}{۱۷٫۳\mu F} = ۲٫۵۸V$$

نکتهٔ کلیدی سوم این است که اختلاف پتانسیل دو سر خازن‌های موازی ۱ و ۲ همان اختلاف پتانسیل دو سر خازن معادل ۱۲ است. پس، اختلاف پتانسیل دو سر خازن ۱ برابر است با $V_۱=V_{۱۲}=۲٫۵۸V$. بنابراین، با توجه به معادلهٔ ۲۶ـ۱، بار خازن ۱ برابر است با:

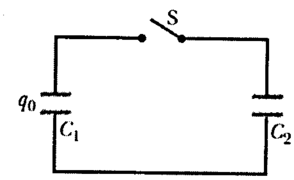
$$q_۱ = C_۱V_۱ = (۱۲٫۰\mu F)(۲٫۵۸V) \Rightarrow \qquad \text{(پاسخ)}$$

$$q_۱ = ۳۱٫۰\mu C$$

مسألهٔ نمونهٔ ۲۶ـ۳

خازن ۱ با ظرفیت $C_۱=۳٫۵۵\mu C$ را با استفاده از یک باتری ۶٫۳۰ ولتی تا اختلاف پتانسیل $V_۰ = ۶٫۳۰V$ باردار می‌کنیم. سپس، باتری را برمی‌داریم و خازن را مطابق شکل ۲۶ـ۱۰، به خازن بی‌بار $C_۲$ با ظرفیت $C_۲=۸٫۹۵\mu C$، وصل می‌کنیم. وقتی کلید S را می‌بندیم بار در بین خازن‌ها جاری می‌شود تا اختلاف پتانسیل دو خازن یکسان و برابر با V شود. V را پیدا کنید.

حل: در اینجا شرایط با وضعیت مسألهٔ قبل تفاوت دارد، زیرا پتانسیل الکتریکی دو سر ترکیب خازن‌ها را باتری یا هر منبع مشابه دیگر تأمین



شکل ۲۶-۱۰ مسألهٔ نمونهٔ ۲۶-۳. اختلاف پتانسیل V_0 به دو سر خازن ۱ اعمال و باتری باردارکننده برداشته شده است. سپس، کلید S بسته می‌شود تا بار خازن ۱ در بین دو خازن ۱ و ۲ تقسیم شود.

نمی‌کند. در اینجا درست پس از بسته شدن کلید S، تنها پتانسیل الکتریکی اعمال شده، همان پتانسیلی است که خازن ۱ به خازن ۲ اعمال می‌کند و این پتانسیل هم در حال کاهش یافتن است. بنابراین، اگرچه خازن‌های شکل ۲۶-۱۰ پشت سر هم به هم وصل شده‌اند، اما در این حالت به صورت سری نیستند؛ هم‌چنین، اگرچه خازن‌ها به طور موازی رسم شده‌اند، در چنین حالتی آنها به صورت موازی هم نیستند.

برای پیدا کردن پتانسیل الکتریکی پایانی (موقعی که دستگاه دو خازن به حال تعادل در می‌آید و شارش بارها متوقف می‌شود) از **نکتهٔ کلیدی** زیر استفاده می‌کنیم: پس از بسته شدن کلید، بار آغازی q_0 خازن ۱ در بین خازن‌های ۱ و ۲ باز توزیع (تقسیم) می‌شود. پس از برقرار شدن تعادل رابطهٔ بار آغازی q_0 و بارهای پایانی q_1 و q_2 را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$q_0 = q_1 + q_2$$

با استفاده از معادلهٔ $q = CV$ در مورد هر جملهٔ معادلهٔ بالا، داریم

$$C_1 V_0 = C_1 V + C_2 V$$

و از آنجا نتیجه می‌گیریم که:

$$V = V_0 \frac{C_1}{C_1 + C_2} = \frac{(6.30\,\mathrm{V})(3.55\,\mu\mathrm{F})}{3.55\,\mu\mathrm{F} + 8.95\,\mu\mathrm{F}} \Rightarrow$$

$$V = 1.79\,\mathrm{V} \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

وقتی اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر خازن‌ها به این مقدار می‌رسد شارش بارها متوقف می‌شود.

خودآزمایی ۴: در این مسألهٔ نمونه، فرض کنید خازن ۲ با ترکیب سری خازن‌های ۳ و ۴ جانشین می‌شود. (الف) پس از بسته شدن کلید و توقف شارش بارها، رابطهٔ میان q_0 بار آغازی، q_1 بار بعدی خازن ۱، و q_{34} بار خازن معادل ۳۴، چگونه است؟ (ب) به ازای $C_3 > C_4$، آیا q_3 بار خازن ۳ نسبت به q_4 بار خازن ۴ بیشتر است، کمتر است، یا مساوی است؟

روشهای مسأله حل کردن

روش ۲: مدارهای چند خازنی

اکنون، روش به کار رفته در حل کردن مسألهٔ نمونهٔ ۲۶-۲ را که در آن چند خازن به یک باتری وصل شده‌اند، مرور می‌کنیم. برای تعیین تک ظرفیت معادل، آرایش ارائه شده برای ظرفیت‌ها را با جانشین کردن آنها، به ترتیب، با معادل ظرفیت‌های موازی با استفاده از معادلهٔ ۲۶-۱۹، و ظرفیت‌های سری با استفاده از معادلهٔ ۲۶-۲۰، ساده می‌کنیم. سپس برای پیدا کردن بار ذخیره شده توسط تک ظرفیت معادل، از معادلهٔ ۲۶-۱ و اختلاف پتانسیل اعمال شده توسط باتری V، استفاده می‌کنیم.

این نتیجه، بار خالص ذخیره شده در آرایش واقعی خازن‌ها را نشان می‌دهد. اما برای پیدا کردن بار هر خازن یا پتانسیل دو سر یک خازن معین در آرایش واقعی خازن‌ها باید مرحله‌های ساده‌سازی را معکوس کنیم. در هر مرحلهٔ معکوس شده این دو قاعده را به کار می‌بریم: وقتیٰ خازن‌ها موازی‌اند اختلاف پتانسیل آنها و نیز اختلاف پتانسیل خازن معادل آنها یکسان است، و برای پیدا کردن بار هر خازن از معادلهٔ ۲۶-۱ استفاده می‌کنیم؛ وقتی خازن‌ها به صورت سری هستند، بار هر یک از آنها با بار خازن معادل آنها برابر است و برای تعیین اختلاف پتانسیل دو سر هر خازن معادلهٔ ۲۶-۱ را به کار می‌بریم.

روش ۳: باتری‌ها و خازن‌ها

یک باتری بین پایانه‌های خود اختلاف پتانسیل معینی را به وجود می‌آورد. بنابراین، وقتی خازن ۱ در مسألهٔ نمونهٔ ۲۶-۳ را به باتری ۶٫۳۰ ولتی وصل می‌کنیم بارهای الکتریکی در بین خازن و باتری جاری می‌شوند تا اختلاف پتانسیل آن با اختلاف پتانسیل باتری برابر شود.

تفاوت خازن و باتری در این است که خازن برای آزاد کردن ذرات باردار (الکترون‌ها) از اتمها و مولکول‌ها نیازی به واکنش‌های الکتروشیمیایی درونی ندارد. بنابراین، وقتی در مسألهٔ نمونهٔ ۲۶-۳ خازن باردار ۱ را از باتری جدا و سپس آن را با بستن کلید S به خازن بی‌بار ۲ وصل می‌کنیم اختلاف پتانسیل دو سر خازن ۱ ثابت نمی‌ماند. کمیتی که ثابت می‌ماند، q_0 بار دستگاه دو خازن است؛ یعنی قانون پایستگی دربارهٔ بار الکتریکی صدق می‌کند، نه پتانسیل الکتریکی.

۵ـ۲۶ انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی

برای باردار کردن خازن باید توسط یک عامل خارجی کار انجام شود. این بحث را با یک خازن بی‌بار آغاز می‌کنیم. به عنوان مثال، تصور کنید که ـ با استفاده از یک «انبرک جادویی» ـ الکترون‌ها از یک صفحه کنده شوند و در طی زمانی به روی صفحهٔ دیگر انتقال یابند. میدان الکتریکی تولید شده در میان صفحه‌ها در جهتی است که می‌خواهد با انتقال بیشتر بارهای الکتریکی مخالفت کند. بنابراین، هر چه بار بیشتری در روی صفحه‌های خازن انباشته شود، برای انتقال الکترون‌ها باید کار بیشتری انجام شود. در عمل، این کار توسط «انبرک جادویی» انجام نمی‌شود، بلکه یک باتری با استفاده از انرژی شیمیایی ذخیره شده، این کار را انجام می‌دهد.

اکنون، کار لازم برای باردار کردن خازن را که به صورت **انرژی پتانسیل الکتریکی** U، در میدان الکتریکی میان صفحه‌ها ذخیره می‌شود، در نظر می‌گیریم. درست همان طور که انرژی پتانسیل ذخیره شده در یک کمان کشیده شده را با رها کردن زه کمان آزاد و آن را به انرژی جنبشی تیر رها شده تبدیل می‌کنیم، این انرژی را نیز می‌توانیم در هنگام دلخواه با تخلیهٔ خازن در یک مدار باز یابیم.

فرض کنید در لحظهٔ معینی بار q' از یک صفحهٔ خازن به صفحهٔ دیگر منتقل شود. اختلاف پتانسیل میان صفحه‌ها V'، در آن لحظه برابر با q'/C خواهد بود. اگر بار منتقل شده به اندازهٔ dq' افزایش یابد افزایش کار لازم برابر خواهد بود با:

$$dW = V'dq' = \frac{q'}{C}\,dq'$$

کار لازم برای آنکه بار کل خازن به مقدار پایانی q برسد عبارت است از:

$$W = \int dW = \frac{1}{C}\int_0^q q'dq' = \frac{q^2}{2C}$$

این کار به صورت انرژی پتانسیل U در خازن ذخیره می‌شود. در نتیجه، داریم

$$U = \frac{q^2}{2C} \qquad \text{(انرژی پتانسیل)} \qquad (۲۱ـ۲۶)$$ ■

معادلهٔ بالا را با استفاده از معادلهٔ ۲۶ـ۱ به صورت زیر هم می‌توان نوشت:

$$U = \frac{1}{2}CV^2 \qquad \text{(انرژی پتانسیل)} \qquad (۲۲ـ۲۶)$$ ■

معادله‌های ۲۶ـ۲۱ و ۲۶ـ۲۲ برای تمام خازن‌ها، با هر شکل هندسی، صادق‌اند.

برای پیدا کردن یک دید فیزیکی دربارهٔ ذخیره شدن انرژی، دو خازن صفحه ـ موازی را در نظر بگیرید که مشابه‌اند اما فاصلهٔ صفحه‌های خازن ۱ دو برابر فاصلهٔ صفحه‌های خازن ۲ است. در این صورت، حجم میان صفحه‌های خازن ۱ دو برابر حجم میان صفحه‌های خازن ۲ است و در نتیجه، طبق معادلهٔ ۲۶ـ۹، ظرفیت آن نصف ظرفیت خازن ۲ است. معادلهٔ ۲۶ـ۴ نشان می‌دهد که اگر بار خازن‌ها q، یکسان باشد، میدان الکتریکی میان صفحه‌های آنها هم یکسان خواهد بود. در ضمن، معادلهٔ ۲۶ـ۲۱ نشان می‌دهد که انرژی پتانسیل ذخیره شده در خازن ۱ دو برابر انرژی ذخیره شده در خازن ۲ است. بنابراین، از دو خازن مشابه با بار یکسان و میدان الکتریکی یکسان، خازنی که حجم میان صفحه‌هایش دو برابر است، دارای دو برابر انرژی پتانسیل ذخیره شده است. چنین استدلال‌هایی فرض‌هایی را که در گذشته کرده بودیم تأیید می‌کنند:

◀ انرژی پتانسیل یک خازن باردار را می‌توان به صورت انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی میان صفحه‌های خازن تصور کرد.

دستگاه رفع کنندهٔ گرفتگی رشته‌های عضلانی در پزشکی

توانایی خازن برای ذخیره کردن انرژی پتانسیل الکتریکی اساس وسایل رفع کنندهٔ گرفتگی رشته‌های

عضلانی (دفیبریلاتور[1]) از طریق شوک الکتریکی را تشکیل می‌دهد. این وسایل توسط گروه فوریت‌های پزشکی برای متوقف کردن گرفتگی رشته‌های عضلانی (فیبریلاسیون[2]) در بیماران مبتلا به حملهٔ قلبی به کار می‌روند. در نوع قابل حمل این وسیله یک باتری خازنی را تا اختلاف پتانسیل بالا باردار و در آن مقدار زیادی انرژی را در مدتی کمتر از یک دقیقه ذخیره می‌کند. مقدار اختلاف پتانسیلی که باتری تأمین می‌کند چندان زیاد نیست، اما با استفاده از یک مدار الکترونیکی چند برابر کنندهٔ ولتاژ این اختلاف پتانسیل بارها و بارها به خازن داده می‌شود تا اختلاف پتانسیل آن به مقدار زیاد افزایش پیدا کند. توان، یا آهنگ انتقال انرژی در این فرایند هم چندان زیاد نیست.

در این عمل اضطراری سر سیم‌های اتصال («قاشقک‌ها») روی قفسهٔ سینهٔ بیمار قرار داده می‌شوند. وقتی کلید کنترل بسته می‌شود خازن بخشی از انرژی ذخیره شده را از طریق بدن بیمار از یک قاشقک، به قاشقک دیگر می‌فرستد. به عنوان مثال، وقتی در یک دستگاه دفیبریلاتور یک خازن $70\mu F$ تا $5000 V$ باردار می‌شود انرژی ذخیره شده در خازن طبق معادلهٔ ۲۶-۲۲، برابر است با:

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}(70\times10^{-6}F)(5000V)^2 = 875J$$

در حدود $200J$ از این انرژی در طول یک تپ (پالس) ۲٫۰ میلی ثانیه‌ای به بدن بیمار فرستاده می‌شود. توان این تپ برابر است با:

$$P = \frac{U}{t} = \frac{200J}{2.0\times10^{-3}s} = 100kW$$

این توان خیلی بیشتر از توان خود باتری است. از روش باردار شدن تدریجی یک خازن به وسیلهٔ باتری و سپس تخلیه شدن خازن با توان بسیار بالاتر، معمولاً، در عکاسی با درخش و عکاسی استروبوسکوپی استفاده می‌شود (شکل ۲۶-۱۱ را ببینید).

چگالی انرژی

در یک خازن صفحه ـ موازی اگر از فریز شدن خطهای میدان در لبه‌ها چشم‌پوشی کنیم میدان الکتریکی در تمام نقاط میان صفحه‌ها یکنواخت است. بنابراین، **چگالی انرژی** u ـ یعنی، انرژی پتانسیل در یکای حجم میان صفحه‌ها ـ نیز باید یکنواخت باشد. چگالی انرژی u از تقسیم کردن انرژی پتانسیل کل به حجم فضای میان صفحه‌ها، d، به دست می‌آید. در نتیجه، با استفاده از معادلهٔ ۲۶-۲۲، داریم

$$u = \frac{U}{Ad} = \frac{CV^2}{2Ad}$$

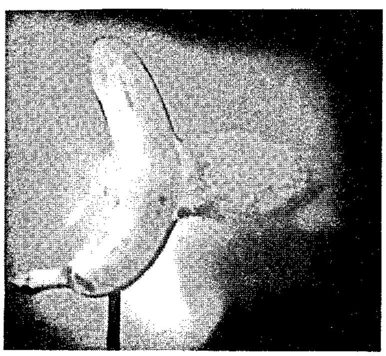
با توجه به معادلهٔ ۲۶-۹ ($C = \varepsilon_0 A/d$)، این نتیجه به صورت زیر در می‌آید

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{V}{d}\right)^2$$

اما با توجه به معادلهٔ ۲۵-۴۲، بزرگی میدان الکتریکی E برابر با V/d است و در نتیجه، داریم

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \qquad \text{(چگالی انرژی)} \qquad (26\text{-}23)$$ ■

اگرچه این معادله را برای حالت ویژهٔ خازن صفحه ـ موازی به دست آوردیم، اما به طور کلی، در مورد هرگونه مولد میدان الکتریکی صادق است. هرگاه در نقطه‌ای از فضا میدان الکتریکی $\vec{E}$ وجود داشته باشد، می‌توان آن نقطه را جایگاه انرژی پتانسیل الکتریکی تصور کرد که مقدارش در یکای حجم از معادلهٔ ۲۶-۲۳ به دست می‌آید.



شکل ۲۶-۱۱ تصویری از یک گلوله در حین خارج شدن از یک موز. **هارولد ادگرتون**[3]، مخترع **استروبوسکوپ** برای خالی کردن انرژی الکتریکی در یکی از لامپ‌های استروبوسکوپ خود از یک خازن استفاده کرد. این لامپ میوهٔ موز را فقط به مدت $0.3\mu s$ به شدت روشن کرد.

1. defibrillator 2. fibrillation 3. Harold Edgerton

مسألهٔ نمونهٔ ۲۶ـ۴

یک کرهٔ رسانای منزوی با شعاع $R=۶٫۸۵\text{cm}$، حامل بار $q=۱٫۲۵\text{nC}$ است. (الف) چقدر انرژی پتانسیل در میدان الکتریکی این رسانای باردار ذخیره می‌شود؟

حل: در اینجا **نکتهٔ کلیدی** این است که U، انرژی ذخیره شده در یک خازن، طبق معادلهٔ ۲۶ـ۲۱، به q، بار و C، ظرفیت خازن، بستگی دارد. با جانشانی مقدار C از معادلهٔ ۲۶ـ۱۸ در معادلهٔ ۲۶ـ۲۱، داریم

$$U = \frac{q^۲}{۲C} = \frac{q^۲}{۸\pi\varepsilon_۰ R}$$

$$U = \frac{(۱٫۲۵\times۱۰^{-۹}\text{C})^۲}{(۸\pi)(۸٫۸۵\times۱۰^{-۱۲}\text{F/m})(۰٫۰۶۸۵\text{m})} \Rightarrow$$

$$U = ۱٫۰۳\times۱۰^{-۷}\text{J} = ۱۰۳\text{nJ} \qquad \text{(پاسخ)}$$

(ب) چگالی انرژی در سطح کره چقدر است؟

حل: در اینجا **نکتهٔ کلیدی** این است که u، چگالی انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی، طبق معادلهٔ ۲۶ـ۲۳ ($u = \frac{۱}{۲}\varepsilon_۰ E^۲$)، به E، بزرگی میدان الکتریکی بستگی دارد. در نتیجه، نخست باید E را در سطح کره پیدا کنیم. این مقدار با استفاده از معادلهٔ ۲۴ـ۱۵ برابر است با:

$$E = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{q}{R^۲}$$

پس، چگالی انرژی برابر است با:

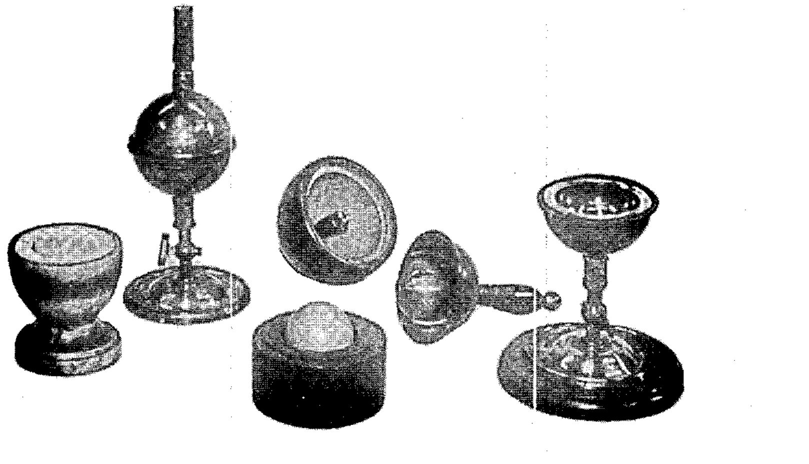
$$u = \frac{۱}{۲}\varepsilon_۰ E^۲ = \frac{q^۲}{۳۲\pi^۲\varepsilon_۰ R^۴}$$

$$u = \frac{(۱٫۲۵\times۱۰^{-۹}\text{C})^۲}{(۳۲\pi^۲)(۸٫۸۵\times۱۰^{-۱۲}\text{C}^۲/\text{N.m}^۲)(۰٫۰۶۸۵\text{m})^۴} \Rightarrow$$

$$u = ۲٫۵۴\times۱۰^{-۵}\text{J/m}^۳ = ۲۵٫۴\mu\text{J/m}^۳ \qquad \text{(پاسخ)}$$

۲۶ـ۶ خازن با دی‌الکتریک

اگر فضای میان صفحه‌های یک خازن را با دی‌الکتریک، که ماده‌ای عایق مانند روغن معدنی یا پلاستیک است، پر کنیم ظرفیت خازن چه تغییری خواهد کرد؟ مایکل فارادی ـ که مفهوم ظرفیت به طور کلی به او مربوط می‌شود، و یکای SI ظرفیت خازن به نام اوست ـ در سال ۱۸۳۷/۱۲۱۶ برای نخستین بار به چنین موضوعی توجه کرد. او با وسایلی ساده، نظیر آنچه در شکل ۲۶ـ۱۲ دیده می‌شود، دریافت که ظرفیت خازن به نسبت عددی κ، به نام **ثابت دی‌الکتریک** مادهٔ عایق، افزایش می‌یابد. جدول ۲۶ـ۱، برخی مواد دی‌الکتریک و ثابت‌های دی‌الکتریک آنها را نشان می‌دهد. ثابت دی‌الکتریک خلاء بنا به تعریف مساوی با یک است. چون هوا یک فضای تقریباً خالی است، ثابت دی‌الکتریک اندازه‌گیری شدهٔ آن تنها اندکی از یک بیشتر است.



شکل ۲۶ـ۱۲ تصویری از اسباب‌های الکتروستاتیکی ساده‌ای که توسط فارادی به کار رفته است. مجموعهٔ اسباب سرهم بندی شده (تصویر دوم از سمت چپ) یک خازن کروی است که شامل یک گلولهٔ برنجی در وسط و یک پوستهٔ برنجی هم مرکز با آن است. فارادی مواد دی‌الکتریک را در فضای میان گلوله و پوسته قرار می‌داد.

جدول ۲۶-۱ برخی خواص دی‌الکتریک‌ها* (برای خلاء $\kappa=1$)

ماده	ثابت دی‌الکتریک κ	استقامت دی‌الکتریکی (kV/mm)
هوا (فشار یک اتمسفر)	۱٫۰۰۰۵۴	۳
پلی استیرن	۲٫۶	۲۴
کاغذ	۳٫۵	۱۶
روغن ترانسفورماتور	۴٫۵	
پیرکس	۴٫۷	۱۴
میکای یاقوتی	۵٫۴	
چینی	۶٫۵	
سیلیسیوم	۱۲	
ژرمانیوم	۱۶	
اتانول	۲۵	
آب (۲۰°C)	۸۰٫۴	
آب (۲۵°C)	۷۸٫۵	
سرامیک تیتانیوم	۱۳۰	
تیتانات استرانسیوم	۳۱۰	

* اندازه‌گیری شده در دمای اتاق، به جز در مورد آب.

اثر دیگری که با وارد کردن دی‌الکتریک، در خازن مشاهده می‌شود، محدود شدن اختلاف پتانسیل تا حد مقدار بیشینهٔ Vmax است که می‌تواند به صفحه‌ها اعمال شود و **پتانسیل فروشکست** نام دارد. اگر اختلاف پتانسیل از این مقدار تجاوز کند مادهٔ دی‌الکتریک فرو می‌شکند و یک مسیر رسانا در میان صفحه‌ها به وجود می‌آورد. هر مادهٔ دی‌الکتریک دارای مشخصه‌ای به نام استقامت دی‌الکتریکی است که عبارت است از بیشینهٔ میدان الکتریکی‌ای که یک دی‌الکتریک بدون فروشکست می‌تواند تحمل کند. در جدول ۲۶-۱ استقامت دی‌الکتریکی چند ماده درج شده است.

همان طور که در ارتباط با معادلهٔ ۲۶-۱۸ بحث شد، ظرفیت یک خازن را می‌توان از معادلهٔ زیر به دست آورد

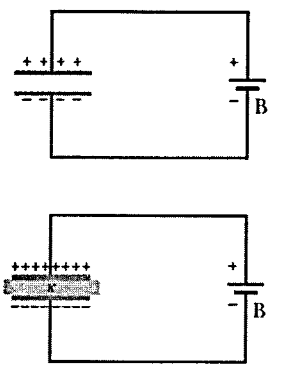
$$C = \varepsilon_0 \mathscr{L} \qquad (۲۶\text{-}۲۴)$$

که در آن $\mathscr{L}$ دارای بُعد طول است. به عنوان مثال، در یک خازن صفحه ـ موازی، داریم $\mathscr{L}=A/d$. چیزی که فارادی کشف کرد این بود که وقتی یک دی‌الکتریک فضای میان صفحه‌های خازن را به طور کامل پر می‌کند، معادلهٔ ۲۶-۲۴ به صورت زیر در می‌آید

$$C = \kappa\varepsilon_0 \mathscr{L} = \kappa C_{\text{air}} \qquad (۲۶\text{-}۲۵)$$

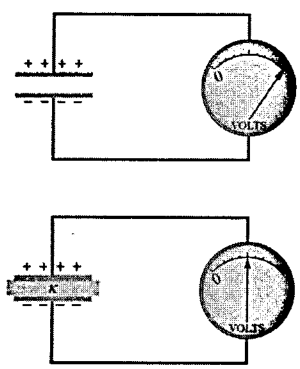
که در آن C_{air} مقدار ظرفیت خازن در موقع وجود هوا در میان صفحه‌هاست.

شکل ۲۶-۱۳، چگونگی انجام دادن برخی آزمایش‌های فارادی را نشان می‌دهد. در شکل ۲۶-۱۳ الف، باتری اختلاف پتانسیل میان صفحه‌ها را در مقدار ثابت V نگه می‌دارد. هرگاه در میان صفحه‌های خازن یک برهٔ دی‌الکتریک جا داده شود، بار خازن q، به نسبت κ افزایش می‌یابد و این بار اضافی را باتری به صفحه‌های خازن می‌دهد. در شکل ۲۶-۱۳ ب باتری وجود ندارد. بنابراین، هنگام جا دادن برهٔ دی‌الکتریک بار q ثابت می‌ماند. در این حالت، اختلاف پتانسیل میان صفحه‌ها، V، به نسبت κ کاهش می‌یابد. این مشاهدات هر دو با موضوع افزایش یافتن ظرفیت در اثر وجود دی‌الکتریک (از طریق رابطهٔ $q=CV$) سازگارند.



V= const.

(الف)



q = const.

(ب)

شکل ۲۶-۱۳ (الف) هرگاه اختلاف پتانسیل میان صفحه‌های یک خازن به وسیلهٔ باتری B ثابت نگه داشته شود وجود دی‌الکتریک باعث افزایش دادن بار روی صفحه‌ها می‌شود. (ب) اگر بار روی صفحه‌های خازن، مانند این حالت، ثابت نگه داشته شود، وجود دی‌الکتریک باعث کاهش یافتن اختلاف پتانسیل میان صفحه‌ها می‌شود. صفحهٔ مدرج نشان داده شده مربوط به پتانسیومتر (پتانسیل سنج) است، که برای اندازه‌گیری اختلاف پتانسیل (در اینجا میان صفحه‌ها) به کار می‌رود. خازن نمی‌تواند از طریق پتانسیومتر بی‌بار شود.

مقایسهٔ معادله‌های ۲۶ـ۲۴ و ۲۶ـ۲۵ نشان می‌دهد که اثر دی‌الکتریک در خازن را می‌توان به صورت کلی زیر توضیح داد:

◄ در ناحیه‌ای که به طور کامل از دی‌الکتریکی با ثابت دی‌الکتریک κ پر شده است، تمام معادله‌های الکتروستاتیکی شامل ثابت گذردهی $\varepsilon_\circ$ باید با جانشین کردن $\kappa\varepsilon_\circ$ با $\varepsilon_\circ$، اصلاح شوند.

بنابراین، بزرگی میدان الکتریکی حاصل از یک بار نقطه‌ای واقع در درون دی‌الکتریک، بنا به قانون کولن، برابر است با:

$$E = \frac{۱}{۴\pi\kappa\varepsilon_\circ}\frac{q}{r^۲} \qquad (۲۶\text{ـ}۲۶)$$

هم‌چنین، رابطهٔ میدان الکتریکی درست در بیرون یک رسانای منزوی غوطه‌ور در یک دی‌الکتریک (معادلهٔ ۲۴ـ۱۱ را ببینید) عبارت است از:

$$E = \frac{\sigma}{\kappa\varepsilon_\circ} \qquad (۲۶\text{ـ}۲۷)$$

دو معادلهٔ بالا نشان می‌دهند که در توزیع ثابت بارهای الکتریکی اثر دی‌الکتریک باعث تضعیف میدان الکتریکی موجود می‌شود.

مسألهٔ نمونهٔ ۲۶ـ۵

ظرفیت یک خازن صفحه ـ موازی $C=۱۳٫۵\text{pF}$ و اختلاف پتانسیل میان صفحه‌ها $V=۱۲٫۵\text{V}$ است. اکنون باتری باردارکننده را جدا می‌کنیم و بُره‌ای از جنس چینی ($\kappa=۶٫۵۰$) در میان صفحه‌ها قرار می‌دهیم. انرژی پتانسیل دستگاه خازن ـ بُره پیش و پس از جا دادن بُره چقدر است؟

حل: در اینجا **نکتهٔ کلیدی** این است که انرژی پتانسیل خازن U، با ظرفیت خازن C، و پتانسیل آن V (از طریق معادلهٔ ۲۶ـ۲۲) یا با بار آن q (از طریق معادلهٔ ۲۶ـ۲۱) ارتباط دارد:

$$U_i = \frac{۱}{۲}CV^۲ = \frac{q^۲}{۲C}$$

چون پتانسیل آغازی V (مساوی با $۱۲٫۵\text{V}$) معلوم است با استفاده از معادلهٔ ۲۶ـ۲۲ انرژی ذخیره شدهٔ آغازی را پیدا می‌کنیم:

$$U_i = \frac{۱}{۲}CV^۲ = \frac{۱}{۲}(۱۳٫۵\times ۱۰^{-۱۲}\text{F})(۱۲٫۵\text{V})^۲ \Rightarrow$$

$$U_i = ۱٫۰۵۵\times ۱۰^{-۹}\text{J} = ۱۰۵۵\text{pJ} \approx ۱۱۰۰\text{pJ} \quad \text{(پاسخ)}$$

برای پیدا کردن انرژی پتانسیل پایانی U_f (پس از جا دادن بُره)، به **نکتهٔ کلیدی** دیگری نیاز داریم: چون باتری برداشته شده است، هنگام جا دادن بره بار خازن نمی‌تواند تغییر کند، حال آنکه پتانسیل آن تغییر می‌کند. بنابراین، برای نوشتن معادلهٔ انرژی پتانسیل پایانی U_f، باید از معادلهٔ ۲۶ـ۲۱ (برمبنای q) استفاده کنیم، اما چون بُره درون خازن قرار دارد ظرفیت آن κC است. در نتیجه، داریم

$$U_f = \frac{q^۲}{۲\kappa C} = \frac{U_i}{\kappa} = \frac{۱۰۵۵\text{pJ}}{۶٫۵۰} \Rightarrow$$

$$U_f = ۱۶۲\text{pJ} \approx ۱۶۰\text{pJ} \quad \text{(پاسخ)}$$

هنگام جا دادن بُره در درون خازن انرژی پتانسیل به نسبت κ کاهش می‌یابد.

انرژی «تلف شده»، در اصل، برای کسی که بُره را جا می‌دهد محسوس است. در حین جا دادن، خازن به بُره کشش وارد می‌کند و روی آن کار انجام می‌دهد، که مقدارش برابر است با:

$$W = U_i - U_f = (۱۰۵۵ - ۱۶۲)\text{pJ} = ۸۹۳\text{pJ}$$

اگر اجازه دهیم بُره بدون مقاومت به میان صفحه‌های خازن بلغزد و اصطکاک وجود نداشته باشد، بُره با انرژی مکانیکی (ثابت) ۸۹۳pJ در میان صفحه‌ها به پس و پیش نوسان می‌کند و این انرژی دستگاه بین انرژی جنبشی بُرهٔ در حال حرکت و انرژی پتانسیل ذخیره شده در میدان الکتریکی، دست به دست می‌شود.

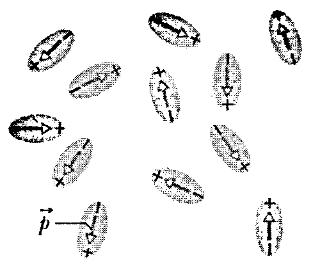
خودآزمایی ۵: در این مسألهٔ نمونه اگر باتری به مدار متصل بماند، وقتی بُره را درون خازن جا می‌دهیم آیا مقادیر زیر افزایش می‌یابند، کاهش می‌یابند یا ثابت می‌مانند: (الف) اختلاف پتانسیل میان صفحه‌های خازن، (ب) ظرفیت، (پ) بار خازن، (ت) انرژی پتانسیل دستگاه، (ث) میدان الکتریکی میان صفحه‌ها؟ (راهنمایی: در قسمت (ث)، توجه کنید که بار الکتریکی ثابت نیست).

۷ـ۲۶ دی‌الکتریک‌ها: دید اتمی

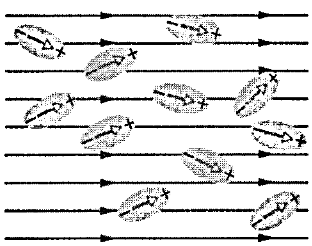
اکنون، می‌خواهیم بدانیم هنگام قراردادن دی‌الکتریک در یک میدان الکتریکی از لحاظ اتمی و مولکولی چه اتفاقی می‌افتد. در اینجا با توجه به ماهیت مولکول‌ها، دو امکان وجود دارد:

۱. دی‌الکتریک‌های قطبی. مولکول‌های برخی دی‌الکتریک‌ها، مانند آب، گشتاور دوقطبی الکتریکی دایمی دارند. در چنین موادی (که دی‌الکتریک‌های قطبی نامیده می‌شوند)، دوقطبی‌های الکتریکی میل دارند خود را، مطابق شکل ۲۶ـ۱۴، با میدان الکتریکی خارجی هم راستا کنند. چون مولکول‌ها بر اثر حرکت گرمایی کتره‌ای پیوسته به هم برخورد می‌کنند، این هم راستا شدن کامل نیست اما با افزایش یافتن بزرگی میدان اعمال شده (یا کاهش یافتن دما و در نتیجه کاهش یافتن برخوردها) کامل‌تر می‌شود. هم راستا شدن دوقطبی‌های الکتریکی میدان الکتریکی‌ای ایجاد می‌کند که نسبت به میدان اعمال شده جهتش مخالف و بزرگی‌اش کمتر است.

۲. دی‌الکتریک‌های ناقطبی. مولکول‌های این مواد بدون توجه به اینکه دارای گشتاور دوقطبی الکتریکی دایمی باشند یا نباشند، وقتی در میدان الکتریکی خارجی قرار می‌گیرند، به طریق القا دارای گشتاور دوقطبی می‌شوند. در بخش ۲۵ـ۷ (شکل ۲۵ـ۱۲ را ببینید) دیدیم که میدان خارجی می‌کوشد تا مولکول‌ها را به صورت «کشیده» در آورد و مرکزهای بارهای منفی و مثبت را اندکی از هم جدا کند.



(الف)



(ب)

شکل ۲۶ـ۱۴ (الف) نمودار مولکول‌های با گشتاورهای دوقطبی الکتریکی دایمی که سمتگیری کتره‌ای آنها را در غیاب میدان الکتریکی خارجی نشان می‌دهد. (ب) اعمال شدن میدان الکتریکی باعث هم راستا شدن جزئی دوقطبی‌ها می‌شود. اغتشاش گرمایی از هم راستا شدن کامل دوقطبی‌ها جلوگیری می‌کند.

شکل ۲۶ـ۱۵ الف، یک بُرهٔ دی‌الکتریک ناقطبی را در حالتی بدون اعمال میدان الکتریکی خارجی نشان می‌دهد. در شکل ۲۶ـ۱۵ ب، میدان الکتریکی $\vec{E}_\circ$ از طریق یک خازن، که صفحه‌هایش، مطابق شکل، باردار شده اعمال شده است. براثر اعمال میدان خارجی، مرکزهای توزیع‌های مثبت و منفی بارهای الکتریکی درون بُره اندکی از هم جدا می‌شوند. در نتیجه، در یک رویهٔ بُره بار مثبت (به خاطر قرار گرفتن سرهای مثبت دوقطبی‌ها به آن سو) و در رویهٔ مقابل بار منفی (به خاطر قرار گرفتن سرهای منفی دوقطبی‌ها به آن سو) به‌وجود می‌آید. کل بُره از نظر الکتریکی خنثی می‌ماند و ـ درون بُره ـ در هیچ عنصر حجمی بار اضافی وجود ندارد.

شکل ۲۶ـ۱۵ پ، نشان می‌دهد که بارهای سطحی القایی روی وجه‌های دی‌الکتریک، میدان الکتریکی $\vec{E}'$ را ناهمسوی با میدان الکتریکی خارجی $\vec{E}_\circ$ به وجود می‌آورند. میدان برایند $\vec{E}$ در درون دی‌الکتریک (که برابر با جمع برداری میدان‌های $\vec{E}_\circ$ و $\vec{E}'$ است) نسبت به $E_\circ$ همسو اما بزرگی‌اش کمتر است.

میدان $\vec{E}'$ حاصل از بارهای سطحی در شکل ۲۶ـ۱۵ پ و نیز میدان الکتریکی حاصل از دوقطبی‌های الکتریکی دایمی در شکل ۲۶ـ۱۴، هر دو، به یک نحو عمل می‌کنند، یعنی با میدان اعمال شدهٔ $\vec{E}$ مخالف‌اند. بنابراین، اثر دی‌الکتریک‌های قطبی و ناقطبی، هر دو، ضعیف کردن میدان اعمال شده در درون آنها، و در نتیجه میدان میان صفحه‌های یک خازن است.

اکنون، می‌توان فهمید که چرا بُرهٔ چینی دی‌الکتریک در مسألهٔ نمونهٔ ۲۶ـ۵ به درون خازن کشیده می‌شود: هنگام وارد شدن دی‌الکتریک به فضای میان صفحه‌ها بارهای سطحی ظاهر شده در هر رویهٔ بُره، با بارهای نزدیک به خود که روی صفحهٔ خازن قرار دارند مخالف می‌شوند. در نتیجه، بُره و صفحه‌ها یکدیگر را جذب می‌کنند.

۸ـ۲۶ دی‌الکتریک‌ها و قانون گاؤس

هنگام بحث کردن دربارهٔ قانون گاؤس در فصل ۲۴، فرض کردیم که بارهای الکتریکی در خلاء قرار دارند. اکنون می‌خواهیم ببینیم در اثر وجود مواد دی‌الکتریک، نظیر مواد مندرج در جدول ۲۶ـ۱، این قانون چگونه باید اصلاح شود و تعمیم پیدا کند. شکل ۲۶ـ۱۶، یک خازن صفحه ـ موازی با مساحت صفحهٔ A همراه با دی‌الکتریک و بدون دی‌الکتریک را نشان می‌دهد. فرض می‌کنیم q، بار روی صفحه‌ها در هر دو حالت یکسان است. توجه کنید که میدان بین صفحه‌ها بارها را به وسیلهٔ یکی از روشهای بخش ۲۶ـ۷ روی وجه‌های خازن القا می‌کند.

در وضعیت شکل ۲۶ـ۱۶ الف، که دی‌الکتریک وجود ندارد، میدان الکتریکی میان صفحه‌ها $\vec{E}_\circ$، را

می‌توانیم نظیر آنچه در مورد شکل ۲۶ـ۵ انجام دادیم، پیدا کنیم: بار روی صفحهٔ بالایی خازن $+q$، را با یک سطح گاؤسی محصور می‌کنیم و سپس قانون گاؤس را در مورد آن به کار می‌بندیم. اگر E_0 معرف بزرگی میدان باشد، داریم

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \varepsilon_0 E_0 A = q \qquad (۲۶\text{ـ}۲۸)$$

یا

$$E_0 = \frac{q}{\varepsilon_0 A} \qquad (۲۶\text{ـ}۲۹)$$

در شکل ۲۶ـ۱۶ ب، در میان صفحه‌ها دی‌الکتریک جا داده شده است. در این حالت، میدان الکتریکی میان صفحه‌ها (و درون دی‌الکتریک) را می‌توان با استفاده از سطح گاؤسی پیدا کرد. اما در اینجا سطح گاؤسی دو نوع بار را محصور کرده است: این سطح شامل بار روی صفحهٔ بالایی خازن $+q$، است، اما اکنون بار القایی روی وجه بالایی دی‌الکتریک $-q'$، را هم در بر می‌گیرد. بارهای روی صفحهٔ رسانا بارهای آزاد نامیده می‌شود، زیرا اگر پتانسیل الکتریکی صفحه را تغییر دهیم این بارها می‌توانند حرکت کنند. اما بارهای القا شده روی سطح دی‌الکتریک آزاد نیستند، زیرا آنها نمی‌توانند از روی آن سطح به جای دیگر حرکت کنند.

بار خالص محصور شده توسط سطح گاؤسی در شکل ۲۶ـ۱۶ ب، $q-q'$ است. در نتیجه، با استفاده از قانون گاؤس، داریم

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \varepsilon_0 EA = q-q' \qquad (۲۶\text{ـ}۳۰)$$

یا

$$E = \frac{q-q'}{\varepsilon_0 A} \qquad (۲۶\text{ـ}۳۱)$$

اثر دی‌الکتریک باعث تضعیف میدان اصلی E_0 به نسبت κ می‌شود، به گونه‌ای که می‌توان نوشت

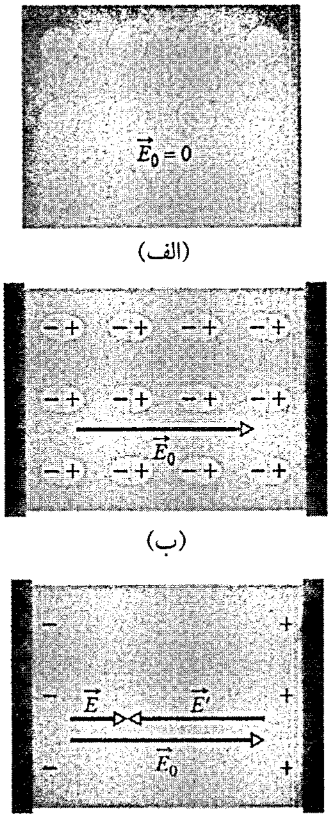
$$E = \frac{E_0}{\kappa} = \frac{q}{\kappa \varepsilon_0 A} \qquad (۲۶\text{ـ}۳۲)$$

از مقایسهٔ معادله‌های ۲۶ـ۳۱ و ۲۶ـ۳۲ نتیجه می‌گیریم که:

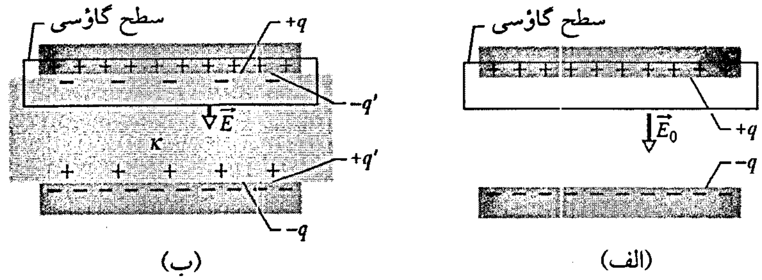
$$q-q' = \frac{q}{\kappa} \qquad (۲۶\text{ـ}۳۳)$$

معادلهٔ ۲۶ـ۳۳ دقیقاً نشان می‌دهد که بزرگی بار سطحی القایی q'، از بار آزاد q کوچکتر است و در صورت نبودن دی‌الکتریک (یعنی $\kappa=1$ در معادلهٔ ۲۶ـ۳۳) این بار برابر با صفر است.

با جانشانی $q-q'$ از معادلهٔ ۲۶ـ۳۳ در معادلهٔ ۲۶ـ۳۰، معادلهٔ بیان کنندهٔ قانون گاؤس را می‌توان چنین نوشت:



شکل ۲۶ـ۱۵ (الف) نمودار یک بُرهٔ دی‌الکتریک ناقطبی. دایره‌ها اتم‌های خنثای درون بُره را نشان می‌دهند. (ب) یک میدان الکتریکی از طریق صفحه‌های یک خازن باردار اعمال می‌شود؛ این میدان اتم‌ها را اندکی کشیده می‌کند و مرکزهای بارهای مثبت و منفی از هم جدا می‌شوند. (پ) جدا شدن مرکزها باعث به وجود آمدن بارهای سطحی در رویه‌های بُره می‌شود. این بارها میدان $\vec{E}'$ را به وجود می‌آورند، که مخالف میدان اعمال شدهٔ $\vec{E}_0$ است. میدان برایند $\vec{E}$ در درون دی‌الکتریک (مجموع برداری $\vec{E}_0$ و $\vec{E}'$) نسبت به $\vec{E}_0$ هم جهت است اما بزرگی‌اش کمتر است.



شکل ۲۶ـ۱۶ نمودار خازن صفحه ـ موازی، (الف) بدون بُرهٔ دی‌الکتریک و (ب) با بُرهٔ دی‌الکتریک جا داده شده درون خازن. بار الکتریکی روی صفحه‌ها q، را در هر دو حالت یکسان فرض می‌کنیم.

$$\varepsilon_0 \oint \kappa \vec{E} \cdot d\vec{A} = q \qquad \text{(قانون گاؤس در حالت وجود دی‌الکتریک)} \qquad (۲۶\text{-}۳۴)$$ ■

این معادلهٔ مهم، اگرچه برای یک خازن صفحه ـ موازی به دست آمده است، اما رابطه‌ای است درست و کلی‌ترین شکلی است که در مورد قانون گاؤس می‌تواند نوشته شود.

۱. در اینجا انتگرال شار شامل $\kappa\vec{E}$ است نه فقط $\vec{E}$. (بردار $\varepsilon_0\kappa\vec{E}$ را گاهی جابه‌جایی الکتریکی، با نماد $\vec{D}$، می‌نامند. در نتیجه معادلهٔ ۲۶-۳۴ را می‌توان به صورت $\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = q$ نوشت).

۲. q، بار محصور شده درون سطح گاؤسی فقط بار آزاد است. بار سطحی القایی در طرف راست معادلهٔ ۲۶-۳۴ از روی حساب نادیده گرفته شده است، زیرا با قرار دادن ثابت دی‌الکتریک κ در سمت چپ معادله این بار به حساب آمده است.

۳. تفاوت معادلهٔ ۲۶-۳۴ با معادلهٔ ۲۴-۷، که در ابتدا بیان کنندهٔ قانون گاؤس بود، تنها در این است که در آن معادله ε_0 با $\kappa\varepsilon_0$ جانشین شده است. در اینجا κ به درون انتگرال معادلهٔ ۲۶-۳۴ برده شده است تا معادله برای حالت‌هایی که κ در سرتاسر سطح گاؤسی ثابت نیست مورد استفاده قرار گیرد.

مسألهٔ نمونهٔ ۲۶-۶

شکل ۲۶-۱۷، یک خازن صفحه ـ موازی را نشان می‌دهد، که در آن مساحت هر صفحه A و فاصلهٔ صفحه‌ها d است. پس از اعمال کردن اختلاف پتانسیل V_0 بین دو صفحه، باتری باردار کننده را جدا می‌کنیم و یک بُرهٔ دی‌الکتریک به ضخامت b و ثابت دی‌الکتریک κ مطابق شکل، در میان صفحه‌ها قرار می‌دهیم. فرض کنید

$$A = ۱۱۵\,\text{cm}^2 \qquad d = ۱٫۲۴\,\text{cm} \qquad V_0 = ۸۵٫۵\,\text{V}$$
$$b = ۰٫۷۸۰\,\text{cm} \qquad \kappa = ۲٫۶۱$$

(الف) ظرفیت خازن C_0، پیش از قرار دادن بُره چقدر است؟

حل: با استفاده از معادلهٔ ۲۶-۹، داریم

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{d} = \frac{(۸٫۸۵ \times ۱۰^{-۱۲}\,\text{F/m})(۱۱۵ \times ۱۰^{-۴}\,\text{m}^2)}{۱٫۲۴ \times ۱۰^{-۲}\,\text{m}} \Rightarrow$$

$$C_0 = ۸٫۲۱ \times ۱۰^{-۱۲}\,\text{F} = ۸٫۲۱\,\text{pF} \qquad \text{(پاسخ)}$$

(ب) بار آزاد ظاهر شده در روی صفحه‌ها چقدر است؟

حل: با استفاده از معادلهٔ ۲۶-۱، داریم

$$q = C_0 V_0 = (۸٫۲۱ \times ۱۰^{-۱۲}\,\text{F})(۸۵٫۵\,\text{V}) \Rightarrow$$

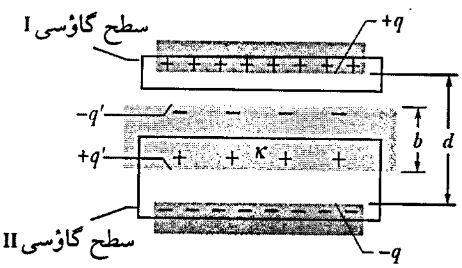
$$q = ۷٫۰۲ \times ۱۰^{-۱۰}\,\text{C} = ۷۰۲\,\text{pC} \qquad \text{(پاسخ)}$$

چون پیش از قرار دادن بُره باتری باردار کننده جدا شده است، در موقع قرار دادن بُره بار آزاد ثابت می‌ماند.

(پ) میدان الکتریکی E_0 در شکاف‌های میان صفحه‌ها و بُرهٔ دی‌الکتریک چقدر است؟

حل: در اینجا **نکتهٔ کلیدی** به کار بردن قانون گاؤس به صورت معادلهٔ ۲۶-۳۴ برای سطح گاؤسی I در شکل ۲۶-۱۷ است ـ این سطح از شکاف عبور می‌کند و به این دلیل فقط بار آزاد روی صفحهٔ بالایی خازن را محصور می‌کند. چون بردار سطح $d\vec{A}$ و بردار میدان $\vec{E}_0$ هر دو به سوی پایین‌اند، حاصل‌ضرب نقطه‌ای در معادلهٔ ۲۶-۳۴ چنین نوشته می‌شود:

$$\vec{E}_0 \cdot d\vec{A} = E_0\, dA \cos 0° = E_0\, dA$$



شکل ۲۶-۱۷ مسألهٔ نمونهٔ ۲۶-۶. یک خازن صفحه ـ موازی شامل بُرهٔ دی‌الکتریکی است که فقط بخشی از فضای میان صفحه‌ها را فراگرفته است.

در نتیجه، معادلهٔ ۲۶-۳۴ به صورت زیر در می‌آید

$$\varepsilon_0 \kappa E_0 \oint dA = q$$

در اینجا حاصل انتگرال‌گیری مساحت صفحهٔ خازن A، را به دست می‌دهد. بنابراین، می‌توان نوشت

$$\varepsilon_0 \kappa E_0 A = q \Rightarrow$$

$$E_0 = \frac{q}{\varepsilon_0 \kappa A}$$

پیش از محاسبهٔ E_0 به **نکتهٔ کلیدی** دیگری نیازمندیم. در اینجا باید از مقدار $\kappa = ۱$ استفاده کنیم، زیرا سطح گاؤسی I از دی‌الکتریک عبور نمی‌کند. پس، داریم

$$E_0 = \frac{q}{\varepsilon_0 \kappa A} = \frac{۷٫۰۲ \times ۱۰^{-۱۰}\,\text{C}}{(۸٫۸۵ \times ۱۰^{-۱۲}\,\text{F/m})(۱)(۱۱۵ \times ۱۰^{-۴}\,\text{m}^2)} \Rightarrow$$

$$E_0 = ۶۹۰۰\,\text{V/m} = ۶٫۹۰\,\text{kV/m} \qquad \text{(پاسخ)}$$

توجه کنید که در موقع قرار دادن بُره مقدار E_0 تغییر نمی‌کند، زیرا مقدار بار محصور شده توسط سطح گاؤسی I در شکل ۲۶-۱۷، تغییر نمی‌کند.

(ت) میدان الکتریکی E_1 در بُرهٔ دی‌الکتریک چقدر است؟

حل: در اینجا **نکتهٔ کلیدی** به کار بردن معادلهٔ ۲۶-۳۴ برای سطح گاؤسی II

در شکل ۲۶-۱۷ است. این سطح شامل بار آزاد $-q$ و بار القایی $+q'$ است، اما هنگام استفاده کردن از معادلهٔ ۲۶-۳۴ مقدار $+q'$ را در نظر نمی‌گیریم. در نتیجه، داریم

$$\varepsilon_0 \oint \kappa \vec{E}_1 \cdot d\vec{A} = -\varepsilon_0 \kappa E_1 A = -q$$ (۲۶-۳۵)

(در این معادله علامت منهای اولی ناشی از حاصل‌ضرب نقطه‌ای $\vec{E}_1 . d\vec{A}$ است، چون جهت بردار میدان $\vec{E}_1$ به سمت پایین و جهت بردار سطح $d\vec{A}$ به سمت بالاست) با استفاده از معادلهٔ ۲۶-۳۵، داریم

$$E_1 = \frac{q}{\varepsilon_0 \kappa A} = \frac{E_0}{\kappa} = \frac{۶٫۹۰\,kV/m}{۲٫۶۱} \Rightarrow$$

(پاسخ) $E_1 = ۲٫۶۴\,kV/m$

(ث) اختلاف پتانسیل میان صفحه‌ها پس از قرار دادن بُره چقدر است؟

حل: در اینجا **نکتهٔ کلیدی** پیدا کردن V با انتگرال‌گیری در مسیر خط راستی است که از صفحهٔ پایینی تا صفحهٔ بالایی امتداد دارد. در درون دی الکتریک طول مسیر b و میدان الکتریکی E_1 و در درون دو شکاف بالا و پایین دی‌الکتریک طول کل مسیر $d-b$ و میدان الکتریکی E_0 است. در نتیجه، با استفاده از معادلهٔ ۲۶-۶، داریم

$$V = \int_{-}^{+} E\,ds = E_0(d-b) + E_1 b$$

$$V = (۶۹۰۰\,V/m)(۰٫۰۱۲۴ - ۰٫۰۰۷۸۰)m + (۲۶۴۰\,V/m)(۰٫۰۰۷۸۰\,m)$$

(پاسخ) $V = ۵۲٫۳V$ $\Rightarrow$

این مقدار از اختلاف پتانسیل اولی ۸۵٫۵V، کمتر است.

(ج) در حالتی که بُره در میان صفحه‌ها قرار داده شده ظرفیت خازن چقدر است؟

حل: اکنون **نکتهٔ کلیدی** این است که ظرفیت خازن C، از طریق معادلهٔ ۲۶-۱ به بار آزاد q و اختلاف پتانسیل V مربوط است، درست مانند هنگامی که دی‌الکتریک در میان صفحه‌ها قرار ندارد. با توجه به مقدار q از قسمت (ب) و مقدار V از قسمت (ث)، داریم

$$C = \frac{q}{V} = \frac{۷٫۰۲ \times ۱۰^{-۱۰}C}{۵۲٫۳V} \Rightarrow$$

(پاسخ) $C = ۱٫۳۴ \times ۱۰^{-۱۱}F = ۱۳٫۴pF$

این مقدار از ظرفیت اولی ۸٫۲۱pF، بیشتر است.

خودآزمایی ۶: در این مسألهٔ نمونه، اگر ضخامت بُره b، افزایش یابد، آیا مقادیر زیر افزایش می‌یابند، کاهش می‌یابند، یا ثابت می‌مانند: (الف) میدان الکتریکی E_1، (ب) اختلاف پتانسیل میان صفحه‌ها، و (پ) ظرفیت خازن؟

مرور و خلاصهٔ مطالب فصل

خازن؛ ظرفیت یک **خازن** از دو رسانای منزوی (**دو صفحه**) که حامل بارهای با بزرگی مساوی و مخالف $+q$ و $-q$ هستند، تشکیل شده است. **ظرفیت خازن C**، چنین تعریف می‌شود:

$$q = CV$$ (۲۶-۱)

که در آن V اختلاف پتانسیل میان صفحه‌هاست. یکای SI ظرفیت خازن **فاراد** است (یک کولن بر ولت = ۱F = یک فاراد).

تعیین ظرفیت به طور کلی، ظرفیت یک پیکربندی خازنی خاص را چنین معین می‌کنیم: (۱) فرض می‌کنیم بار q در روی صفحه‌های خازن قرار دارد، (۲) میدان الکتریکی ناشی از این بار $\vec{E}$، را پیدا می‌کنیم، (۳) اختلاف پتانسیل V را حساب می‌کنیم، و (۴) با استفاده از معادلهٔ ۲۶-۱، C را به‌دست می‌آوریم. برخی نتیجه‌های مربوط به ظرفیت خازن عبارت‌اند از:

ظرفیت خازن صفحه ـ موازی، که در آن مساحت هر صفحه A و فاصلهٔ میان صفحه‌ها d است، برابر است با:

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$ (۲۶-۹)

ظرفیت خازن استوانه‌ای (شامل دو استوانهٔ دراز هم محور) به طول L و شعاع‌های a و b برابر است با:

$$C = ۲\pi\varepsilon_0 \frac{L}{\ln(b/a)}$$ (۲۶-۱۴)

ظرفیت خازن کروی، که از دو صفحهٔ کروی هم مرکز به شعاع‌های a و b تشکیل شده برابر است با:

$$C = ۴\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a}$$ (۲۶-۱۷)

در معادلهٔ ۲۶-۱۷ اگر $b \to \infty$ و $a=R$ باشد، ظرفیت یک کرهٔ منزوی به شعاع R به دست می‌آید:

$$C = ۴\pi\varepsilon_0 R$$ (۲۶-۱۸)

خازن‌های موازی و سری **ظرفیت‌های معادل** C_{eq} ترکیب‌های **موازی و سری** چند خازن از رابطه‌های زیر به دست می‌آیند

$$C_{eq} = \sum_{j=۱}^{n} C_j$$ (n خازن موازی) (۲۶-۱۹)

و

$$\frac{۱}{C_{eq}} = \sum_{j=۱}^{n} \frac{۱}{C_j}$$ (n خازن سری) (۲۶-۲۰)

ظرفیت‌های معادل را می‌توان برای محاسبهٔ ظرفیت‌های ترکیب‌های پیچیدهٔ سری ـ موازی به کار برد.

انرژی پتانسیل و چگالی انرژی **انرژی پتانسیل** یک خازن باردار U، که

رابطه‌های زیر به دست می‌آید:

$$U = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 \qquad (۲۶\text{-}۲۱، ۲۶\text{-}۲۲)$$

برابر است با مقدار کار لازم برای باردار کردن خازن است. این انرژی را می‌توان انرژی وابسته به میدان الکتریکی خازن $\vec{E}$، در نظر گرفت. با بسط دادن این موضوع، انرژی ذخیره شده را می‌توان به یک میدان الکتریکی وابسته کرد. در خلاء **چگالی انرژی** u، یا انرژی پتانسیل در یکای حجم، در میدان الکتریکی با بزرگی E، برابر است با:

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \qquad (۲۶\text{-}۲۳)$$

ظرفیت خازن با دی‌الکتریک اگر فضای میان صفحه‌های یک خازن به طور کامل با یک مادهٔ دی‌الکتریک پر شود، ظرفیت خازن C، به نسبت κ، که **ثابت دی‌الکتریک** نامیده می‌شود و از مشخصات ماده است، افزایش می‌یابد. در ناحیه‌ای که به طور کامل با دی‌الکتریک پر شده است، تمام معادله‌های الکتروستاتیکی شامل ε_0 باید با قرار دادن $\kappa\varepsilon_0$ به جای ε_0، اصلاح شوند.

آثار جا دادن دی‌الکتریک در میان صفحه‌ها را از نظر فیزیکی، می‌توان با تأثیر میدان الکتریکی بر دوقطبی‌های الکتریکی دایمی یا القایی در بُرهٔ دی‌الکتریک درک کرد. نتیجهٔ این تأثیر تشکیل شدن بارهای القایی بر روی سطح‌های دی‌الکتریک است، که با همان بارهای آزاد روی صفحه‌ها، باعث تضعیف شدن میدان در درون دی‌الکتریک می‌شود.

قانون گاؤس در خازن با دی‌الکتریک در حالتی که دی‌الکتریک وجود دارد، قانون گاؤس را می‌توان به صورت کلی زیر نوشت:

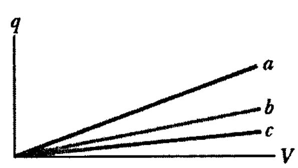
$$\varepsilon_0 \oint \kappa\vec{E} \cdot d\vec{A} = q \qquad (۲۶\text{-}۳۴)$$

در اینجا q بار آزاد است؛ بار سطحی القایی با قرار دادن ثابت دی‌الکتریک κ در درون انتگرال به حساب آمده است.

پرسش‌ها

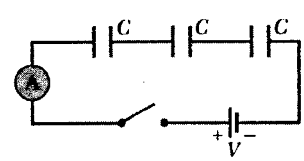
۱. شکل ۲۶-۱۸، نمودارهای تغییرات بار الکتریکی را برحسب اختلاف پتانسیل برای سه خازن صفحه ـ موازی نشان می‌دهد. مساحت صفحه‌ها و فاصلهٔ جدایی آنها در جدول زیر داده شده است. کدام نمودار مربوط به کدام خازن است؟

خازن	مساحت صفحه	فاصلهٔ جدایی
۱	A	d
۲	$2A$	d
۳	A	$2d$



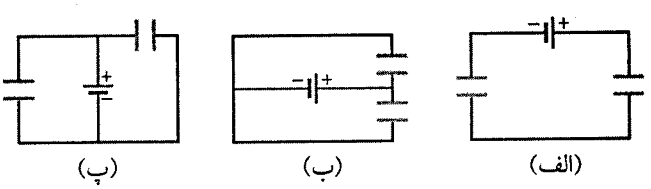
شکل ۲۶-۱۸ پرسش ۱.

۲. شکل ۲۶-۱۹، یک کلید باز، یک باتری با اختلاف پتانسیل V، یک آمپرسنج A، و سه خازن مشابه بی‌بار با ظرفیت یکسان C را نشان می‌دهد. وقتی کلید بسته می‌شود و مدار به حالت تعادل می‌رسد، (الف) اختلاف پتانسیل دو سر هر خازن و (ب) بار روی صفحهٔ طرف چپ هر خازن، چیست؟ (پ) در طی فرایند باردار شدن خازن‌ها، بار خالص گذرنده از آمپرسنج چقدر است؟



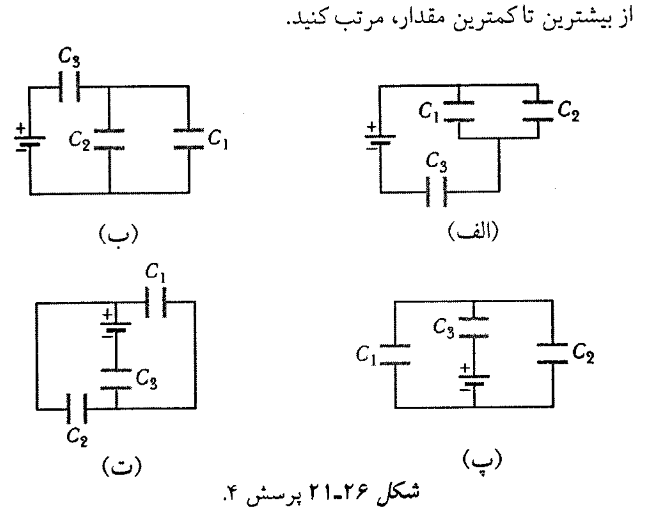
شکل ۲۶-۱۹ پرسش ۲.

۳. در هر یک از مدارهای شکل ۲۶-۲۰، خازن‌ها چگونه بسته شده‌اند، به‌طور سری، به طور موازی، یا هیچ‌کدام؟



شکل ۲۶-۲۰ پرسش ۳.

۴. (الف) در شکل ۲۶-۲۱ الف، آیا خازن‌های C_1 و C_3 به صورت سری‌اند؟ (ب) در این شکل، آیا خازن‌های C_1 و C_2 به صورت موازی‌اند؟ (پ) ظرفیت خازن‌های معادل در چهار مدار نشان داده شده در شکل ۲۶-۲۱ را از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



شکل ۲۶-۲۱ پرسش ۴.

۵. سه خازن، هر یک به ظرفیت C، به یک باتری بسته شده‌اند. ظرفیت معادل آنها، (الف) به طور سری و (ب) به طور موازی، چیست؟ (پ) در کدام آرایش بار روی خازن با ظرفیت معادل، بیشتر است؟

۶. خازن‌های با ظرفیت‌های C_1 و C_2 را که در آنها $C_1 > C_2$، ابتدا تک تک، سپس به طور سری، آنگاه به طور موازی، به یک باتری وصل می‌کنیم. این آرایش‌ها را با توجه به مقدار بار ذخیره شده، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.

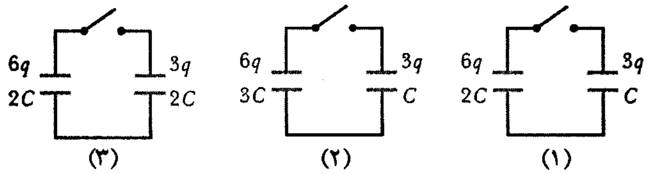
۷. ابتدا تک خازن با ظرفیت C_1 را به یک باتری وصل می‌کنیم. سپس، خازن با ظرفیت C_2 را به طور موازی به مدار اضافه می‌کنیم. آیا در این حالت، (الف) اختلاف پتانسیل دو سر خازن C_1 و (ب) بار q_1 روی خازن C_1، نسبت به مقادیر قبلی بیشتر است، کمتر است، یا مساوی است؟ (پ) آیا ظرفیت معادل C_{12} مربوط به خازن‌های C_1 و C_2 نسبت به ظرفیت C_1 بیشتر است، کمتر است یا مساوی است؟ (ت) آیا بار کل ذخیره شده روی خازن‌های C_1 و C_2 با هم، نسبت به بار ذخیره شدهٔ قبلی در خازن C_1 بیشتر است، کمتر است، یا مساوی است؟

۸. پرسش ۷ را برای حالتی که C_2 به طور سری، نه به طور موازی، به مدار اضافه می‌شود، تکرار کنید.

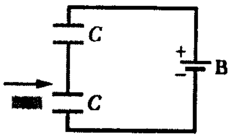
۹. شکل ۲۶-۲۲، سه مدار را نشان می‌دهد که هر کدام شامل یک کلید و دو خازن است و خازن‌ها به اندازهٔ مقادیر داده شده در شکل باردار شده‌اند. پس از بستن کلیدها، در کدام مدار (در صورت امکان) بار روی خازن سمت چپ، (الف) افزایش می‌یابد، (ب) کاهش می‌یابد و (پ) ثابت می‌ماند؟

۱۰. دو کرهٔ فلزی منزوی A و B، به ترتیب، دارای شعاع‌های R و ۲R و بار یکسان q هستند. (الف) آیا ظرفیت کرهٔ A نسبت به ظرفیت کرهٔ B، بیشتر است، کمتر است، یا مساوی است؟ (ب) آیا چگالی انرژی درست در بیرون سطح، در کرهٔ A نسبت به کرهٔ B بیشتر است، کمتر است، یا مساوی است؟ (پ) آیا چگالی انرژی در فاصلهٔ ۳R از مرکز هر کره، برای کرهٔ A نسبت به کرهٔ B، بیشتر است، کمتر است، یا مساوی است؟ (ت) آیا انرژی کل میدان الکتریکی ناشی از کره‌ها، برای کرهٔ A نسبت به کرهٔ B، بیشتر است، کمتر است، یا مساوی است؟

۱۱. هرگاه یک بُرهٔ دی‌الکتریک را به میان صفحه‌های یکی از دو خازن مشابه در شکل ۲۶-۲۳ وارد کنیم، آیا در مورد آن خازن کمیت‌های زیر افزایش می‌یابند، کاهش می‌یابند، یا ثابت می‌مانند: (الف) ظرفیت، (ب) بار الکتریکی، (پ) اختلاف پتانسیل، و (ت) انرژی پتانسیل؟ (ث) این کمیت‌ها در مورد خازن دیگر چگونه تغییر می‌کنند؟



شکل ۲۶-۲۲ پرسش ۹.



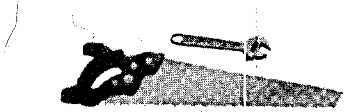
شکل ۲۶-۲۳ پرسش ۱۱.

تمرین‌ها و مسأله‌ها

بخش ۲۶-۲ ظرفیت

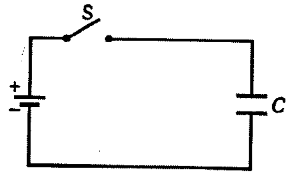
۱ ت. الکترومتر (برق‌سنج) وسیله‌ای است که برای اندازه‌گیری بارهای ایستا به‌کار می‌رود. در این وسیله باری نامعلومی را روی صفحه‌های خازن آن قرار می‌دهیم و اختلاف پتانسیل خازن را اندازه می‌گیریم. با الکترومتری که شامل خازنی به ظرفیت ۵۰pF و دارای حساسیت ولتاژ ۱۵V/۰ است، کمینهٔ بار الکتریکی‌ای که می‌تواند اندازه‌گیری شود، چقدر است؟

۲ ت. دو ابزار فلزی شکل ۲۶-۲۴، دارای بارهای خالص ۷۰pC+ و ۷۰pC− هستند و بین آنها یک اختلاف پتانسیل ۲۰V به وجود آمده است. (الف) ظرفیت این دستگاه چقدر است؟ (ب) اگر بارهای الکتریکی این ابزار به ۲۰۰pC+ و ۲۰۰pC− تغییر پیدا کنند، ظرفیت چقدر می‌شود؟ (پ) اختلاف پتانسیل چقدر می‌شود؟



شکل ۲۶-۲۴ تمرین ۲.

۳ ت. خازن شکل ۲۶-۲۵، دارای ظرفیت ۲۵μC و در آغاز بی‌بار است و باتری ولتاژ ۱۲۰V را تأمین می‌کند. پس از بسته شدن کلید S، چه مقدار بار از باتری خواهد گذشت؟



شکل ۲۶-۲۵ تمرین ۳.

بخش ۲۶ـ۳ محاسبهٔ ظرفیت

۴ ت. اگر معادلهٔ ۲۶ـ۹ را نسبت به ε_0 حل کنیم، نتیجه می‌گیریم که یکای SI آن **فاراد بر متر** است. نشان دهید که این یکا با یکایی که پیشتر برای ε_0 به دست آوردیم ـ یعنی **کولن مربع برنیوتون. مترمربع** (با نماد $C^2/N.m^2$) هم‌ارز است.

۵ ت. یک خازن صفحه ـ موازی دارای صفحه‌هایی دایره‌ای به شعاع ۸٫۲cm و فاصلهٔ جدایی ۱٫۳mm است. (الف) ظرفیت خازن را حساب کنید. (ب) در اثر اعمال اختلاف پتانسیل ۱۲۰V به دو سر این خازن چه باری روی صفحه‌های آن ظاهر می‌شود؟

۶ ت. با دو ورق تخت فلزی که مساحت هر کدام $۱٫۰۰m^2$ است، یک خازن صفحه ـ موازی ساخته‌ایم. اگر قرار شود ظرفیت این خازن ۱٫۰۰F باشد، فاصلهٔ جدایی صفحه‌ها چقدر است؟ آیا واقعاً چنین خازنی را می‌توان ساخت؟

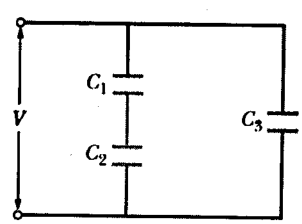
۷ ت. ظرفیت یک قطرهٔ کروی جیوه به شعاع R از رابطهٔ $C=4\pi\varepsilon_0 R$ به‌دست می‌آید. اگر دو تا از این قطره‌ها به هم ملحق شوند و تک قطرهٔ بزرگتری تشکیل دهند، ظرفیت این قطره چیست؟

۸ ت. شعاع‌های صفحه‌های یک خازن کروی، ۳۸٫۰mm و ۴۰٫۰mm است. (الف) ظرفیت خازن را حساب کنید. (ب) مساحت هر صفحهٔ یک خازن صفحه ـ موازی با همین فاصلهٔ جدایی و ظرفیت چقدر است؟

۹ م. فرض کنید شعاع‌های دو پوستهٔ کروی یک خازن کروی تقریباً مساوی‌اند. در چنین شرایطی، این وسیله تقریباً مانند یک خازن صفحه ـ موازی به ازای $b-a=d$ عمل می‌کند. نشان دهید که در این حالت معادلهٔ ۲۶ـ۱۷ به صورت معادلهٔ ۲۶ـ۹ در می‌آید.

بخش ۲۶ـ۴ خازن‌های موازی و سری

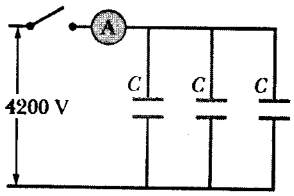
۱۰ ت. در شکل ۲۶ـ۲۶، ظرفیت معادل ترکیب خازن‌ها را پیدا کنید. فرض کنید $C_1=10.0\mu F$، $C_2=5.00\mu F$، و $C_3=4.00\mu F$.



شکل ۲۶ـ۲۶ تمرین ۱۰ و مسألهٔ ۳۰.

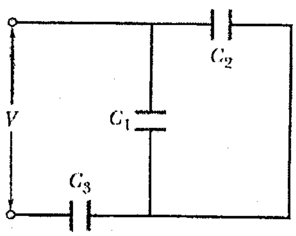
۱۱ ت. چند خازن ۱٫۰ میکروفارادی را باید به طور موازی به هم ببندیم تا بتوانیم با اختلاف پتانسیل ۱۱۰V در دو سر مجموعه بار ۱٫۰ کولنی در خازن‌ها ذخیره کنیم؟

۱۲ ت. ظرفیت هر یک از خازن‌های بی‌بار شکل ۲۶ـ۲۷، برابر با ۲۵٫۰μF است. با بسته شدن کلید، اختلاف پتانسیل ۴۲۰۰V به دو سر مدار اعمال می‌شود. چند کولن بار از دستگاه اندازه‌گیری A عبور می‌کند؟



شکل ۲۶ـ۲۷ تمرین ۱۲.

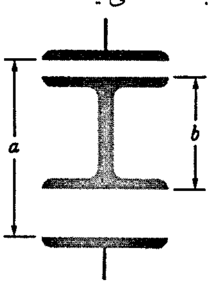
۱۳ ت. در شکل ۲۶ـ۲۸، ظرفیت معادل ترکیب خازن‌ها را به دست آورید. فرض کنید $C_1=10.0\mu F$، $C_2=5.00\mu F$، و $C_3=4.00\mu F$.



شکل ۲۶ـ۲۸ تمرین ۱۳، مسأله‌های ۱۴ و ۲۸.

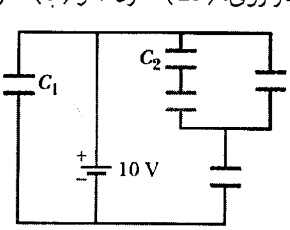
۱۴ م. در شکل ۲۶ـ۲۸، فرض کنید خازن ۳ از نظر الکتریکی فرو می‌شکند و مانند یک مسیر رسانا عمل می‌کند. چه تغییری در، (الف) بار و (ب) اختلاف پتانسیل خازن ۱، به وجود می‌آید؟ فرض کنید $V=100V$.

۱۵ م. شکل ۲۶ـ۲۹، دو خازن با اتصال سری را نشان می‌دهد که بخش میانی آن به طول b می‌تواند در راستای قائم حرکت کند. نشان دهید که ظرفیت معادل این ترکیب سری از محل بخش میانی مستقل است و از رابطهٔ $C=\varepsilon_0 A/(a-b)$ به‌دست می‌آید. A مساحت صفحهٔ خازن است.



شکل ۲۶ـ۲۹ مسألهٔ ۱۵.

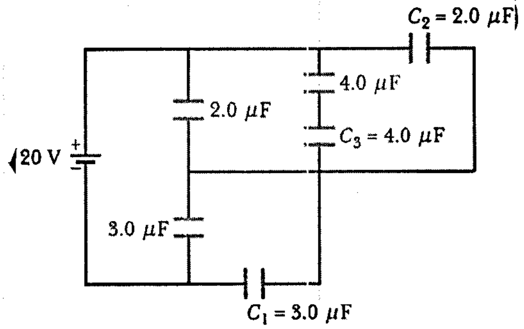
۱۶ م. در شکل ۲۶ـ۳۰، اختلاف پتانسیل باتری ۱۰V و ظرفیت هریک از پنج خازن ۱۰μF است. بار روی، (الف) خازن ۱ و (ب) خازن ۲، چقدر است؟



شکل ۲۶ـ۳۰ مسألهٔ ۱۶.

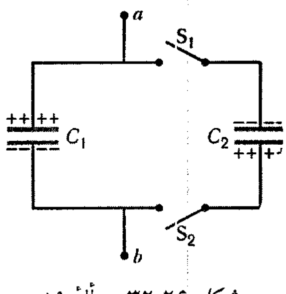
۱۷ م. یک خازن ۱۰۰pF تا اختلاف پتانسیل ۵۰V باردار و سپس باتری باردارکننده از آن جدا می‌شود. اکنون، این خازن را به طور موازی به خازن دیگری (که در آغاز بی‌بار است) وصل می‌کنیم. اگر اختلاف پتانسیل دو سر خازن اول به ۳۵V کاهش پیدا کند ظرفیت خازن دوم چقدر است؟

۱۸ م. در شکل ۲۶-۳۱، اختلاف پتانسیل دو سر باتری ۲۰V است. مطلوب است تعیین (الف) ظرفیت معادل تمام خازن‌ها و (ب) بار ذخیره شده در خازن با ظرفیت معادل. پتانسیل دو سر و بار روی، (پ) خازن ۱، (ت) خازن ۲، و (ث) خازن ۳ را پیدا کنید.



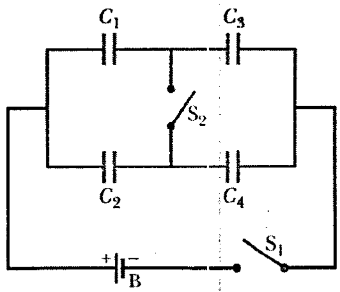
شکل ۲۶-۳۱ مسألهٔ ۱۸.

۱۹ م. در شکل ۲۶-۳۲، خازن‌های C_1=۱ر۰μF و C_2=۳ر۰μF تا پتانسیل V=۱۰۰V، اما با قطبیت مخالف، مطابق شکل، باردار می‌شوند. اکنون کلیدهای S_1 و S_2 را می‌بندیم. (الف) اختلاف پتانسیل میان نقطه‌های a و b چقدر است؟ در این حالت بار روی، (ب) خازن ۱ و (پ) خازن ۲، چقدر است؟



شکل ۲۶-۳۲ مسألهٔ ۱۹.

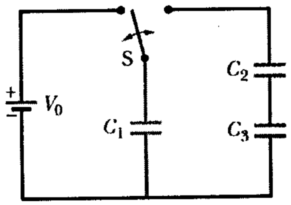
۲۰ م. در شکل ۲۶-۳۳، باتری B ولتاژ ۱۲V را تأمین می‌کند. مطلوب است



شکل ۲۶-۳۳ مسألهٔ ۲۰.

تعیین بار روی هر خازن وقتی که، (الف) ابتدا فقط کلید S_1 بسته شود، و (ب) بعداً کلید S_2 نیز بسته شود. فرض کنید C_1=۱ر۰μF، C_2=۲ر۰μF، C_3=۳ر۰μF و C_4=۴ر۰μF.

۲۱ م. در شکل ۲۶-۳۴، موقعی که کلید S به طرف چپ زده می‌شود، صفحه‌های خازن ۱ دارای اختلاف پتانسیل V_0 می‌شوند. خازن‌های ۲ و ۳ در آغاز بی‌بارند. اکنون، کلید S را به طرف راست می‌زنیم. بارهای نهایی خازن‌ها، q_1، q_2 و q_3، را معین کنید.



شکل ۲۶-۳۴ مسألهٔ ۲۱.

بخش ۲۶-۵ انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی

۲۲ ت. انرژی ذخیره شده در یک متر مکعب هوا، که از میدان الکتریکی به بزرگی ۱۵۰V/m در «هوای صاف» ناشی می‌شود، چقدر است؟

۲۳ ت. چه ظرفیتی لازم است تا بتوان انرژی ۱۰kW.h را تحت اختلاف پتانسیل ۱۰۰۰V ذخیره کرد؟

۲۴ ت. یک خازن صفحه ـ موازی با دی‌الکتریک هوا، که دارای صفحه‌هایی به مساحت ۴۰cm^2 و به فاصلهٔ جدایی ۱ر۰mm است، تا اختلاف پتانسیل ۶۰۰V باردار می‌شود. مطلوب است تعیین (الف) ظرفیت، (ب) بزرگی بار روی هر صفحه، (پ) انرژی ذخیره شده، (ت) میدان الکتریکی میان صفحه‌ها، و (ث) چگالی انرژی در میان صفحه‌ها.

۲۵ ت. دو خازن به ظرفیت‌های ۲ر۰μF و ۴ر۰μF به طور موازی به یک اختلاف پتانسیل ۳۰۰V بسته شده‌اند. انرژی کل ذخیره شده در خازن‌ها را حساب کنید.

۲۶ م. برای ذخیره کردن انرژی الکتریکی از یک مجموعهٔ ۲۰۰۰ خازن موازی، که ظرفیت هر خازن ۵ر۰۰μF است، استفاده می‌شود. هزینهٔ باردار کردن این مجموعه تا ۵۰۰۰۰V، با نرخ هر کیلووات ساعت ۱۰۰ ریال، چقدر است؟

۲۷ م. خازنی را باردار می‌کنیم تا انرژی ذخیره شده در آن به ۴ر۰J برسد. سپس خازن بی‌بار دیگری را به طور موازی به آن می‌بندیم. (الف) اگر بار به طور مساوی میان دو خازن توزیع شود، انرژی کل ذخیره شده در میدان‌های الکتریکی خازن‌ها چقدر است؟ (ب) تفاوت انرژی چه می‌شود؟

۲۸ م. در شکل ۲۶-۲۸، مطلوب است تعیین (الف) بار، (ب) اختلاف پتانسیل، و (پ) انرژی ذخیره شده در هر خازن. مقادیر عددی تمرین ۱۳ را به کار ببرید و فرض کنید V=۱۰۰V.

۲۹ م. یک خازن صفحه ـ موازی را، که مساحت هر صفحهٔ آن A و فاصلهٔ میان صفحه‌ها d است، تا اختلاف پتانسیل V باردار می‌کنیم. سپس، باتری باردارکننده را بر می‌داریم و صفحه‌ها را آن‌قدر از هم دور می‌کنیم تا فاصلهٔ میان آنها $2d$ شود. مطلوب است تعیین رابطه‌های مربوط به، (الف) اختلاف پتانسیل جدید، (ب) انرژی‌های ذخیره شدهٔ آغازی و پایانی U_i و U_f، و (پ) کار لازم برای دور کردن صفحه‌ها از هم، برحسب A، d و V.

۳۰ م. در شکل ۲۶ـ۲۶، مطلوب است تعیین (الف) بار، (ب) اختلاف پتانسیل، و (پ) انرژی ذخیره شده در هر خازن. مقادیر عددی تمرین ۱۰ را به کار ببرید و فرض کنید $V=$ ۱۰۰V.

۳۱ م. یک خازن استوانه‌ای، مطابق شکل ۲۶ـ۶، دارای شعاع‌های a و b است. نشان دهید که نصف انرژی پتانسیل الکتریکی ذخیره شده در درون استوانه‌ای قرار دارد که شعاع آن برابر است با: $r=\sqrt{ab}$.

۳۲ م. یک کرهٔ فلزی منزوی باردار به قطر ۱۰cm دارای پتانسیل ۸۰۰۰V با فرض $V=0$ در بی‌نهایت، است. چگالی انرژی را در میدان الکتریکی نزدیک سطح کره حساب کنید.

۳۳ م. (الف) نشان دهید که صفحه‌های یک خازن صفحه ـ موازی، یکدیگر را با نیروی $F=q^2/2\varepsilon_0 A$ جذب می‌کنند. این موضوع را با محاسبهٔ کار لازم برای افزایش دادن فاصلهٔ میان صفحه‌ها از x تا $x+dx$، با شرط ثابت ماندن q، نیز نشان دهید. (ب) سپس، نشان دهید که نیروی یکای سطح (تنش الکتروستاتیکی) وارد بر هر صفحهٔ خازن از رابطهٔ $\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ به دست می‌آید (در واقع این، نیرویی است که بر یکای سطح هر رسانایی با هر شکل، که میدان الکتریکی در سطح آن $\vec{E}$ باشد، وارد می‌شود).

بخش ۲۶ـ۶ خازن با دی‌الکتریک

۳۴ ت. ظرفیت یک خازن صفحه ـ موازی با دی‌الکتریک هوا ۱٫۳pF است. فاصلهٔ صفحه‌ها را دو برابر و میان آنها را از موم پر می‌کنیم. ظرفیت جدید خازن ۲٫۶pF می‌شود. ثابت دی‌الکتریک موم را پیدا کنید.

۳۵ ت. خازنی با ظرفیت ۷٫۴pF با دی‌الکتریک هوا در اختیار داریم و می‌خواهیم آن را به خازنی تبدیل کنیم که بتواند انرژی ۷٫۴μJ را با اختلاف پتانسیل بیشینهٔ ۶۵۲V ذخیره کند. کدام دی‌الکتریک مندرج در جدول ۲۶ـ۱ را باید برای پر کردن شکاف هوای میان صفحه‌های خازن، بدون آنکه خطا داشته باشیم، به کار ببریم.

۳۶ ت. ظرفیت یک خازن صفحه ـ موازی با دی‌الکتریک هوا ۵۰pF است. (الف) اگر مساحت هر صفحهٔ خازن ۰٫۳۵m² باشد، فاصلهٔ میان صفحه‌ها چقدر است؟ (ب) اگر ناحیهٔ میان صفحه‌ها را از ماده‌ای با ثابت دی‌الکتریک $\kappa=$ ۵٫۶ پر کنیم، ظرفیت خازن چقدر می‌شود؟

۳۷ ت. کابل هم محور مورد استفاده در خط انتقال علایم الکتریکی، دارای شعاع درونی ۰٫۱۰mm و شعاع بیرونی ۰٫۶۰mm است. ظرفیت اثر خازنی هر متر از این کابل را حساب کنید. فرض کنید فضای میان رساناها محتوی پلی‌استیرن است.

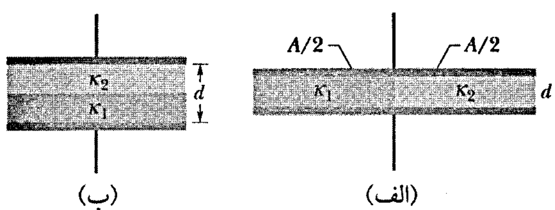
۳۸ م. می‌خواهیم خازنی با ظرفیت حدود ۱nF و پتانسیل فروشکست بیش از ۱۰۰۰۰V طراحی کنیم. این کار را با استفاده از یک لیوان بلند پیرکس و پوشاندن سطح‌های درونی و بیرونی لیوان با ورقهٔ آلومینیومی انجام می‌دهیم. بلندی لیوان ۱۵cm و شعاع‌های سطح‌های درونی و بیرونی آن، به ترتیب، ۳٫۶cm و ۳٫۸cm است. (الف) ظرفیت و (ب) پتانسیل فروشکست این خازن چقدر است؟

۳۹ م. ماده‌ای دارای ثابت دی‌الکتریک ۲٫۸ و استقامت دی‌الکتریکی ۱۸MV/m است. اگر از این ماده به عنوان دی‌الکتریک در یک خازن صفحه ـ موازی استفاده شود، کمینهٔ مساحت صفحه‌های خازن چقدر باید باشد تا ظرفیت آن $7.0\times10^{-2}\,\mu F$ شود و این خازن بتواند اختلاف پتانسیل ۴٫۰kV را تحمل کند؟

۴۰ م. یک خازن صفحه ـ موازی، که مساحت هر صفحه‌اش A است، مطابق شکل ۲۶ـ۳۵ الف، با دو دی‌الکتریک پر شده است. نشان دهید که ظرفیت این خازن برابر است با:

$$C=\frac{\varepsilon_0 A}{d}\,\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}$$

این فرمول را برای حالت‌های حدی مورد آزمون قرار دهید. (راهنمایی: آیا این آرایش را می‌توان به صورت ترکیب موازی دو خازن تلقی کرد؟)



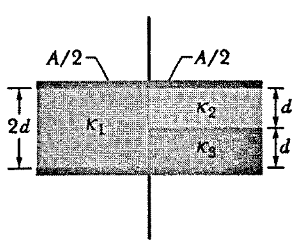
شکل ۲۶ـ۳۵ مسأله‌های ۴۰ و ۴۱.

۴۱ م. یک خازن صفحه ـ موازی، که مساحت هر صفحه‌اش A است، مطابق شکل ۲۶ـ۳۵ ب، با دو دی‌الکتریک پر شده است. نشان دهید که ظرفیت این خازن برابر است با:

$$C=\frac{2\varepsilon_0 A}{d}\,\frac{\kappa_1\kappa_2}{\kappa_1+\kappa_2}$$

این فرمول را برای حالت‌های حدی مورد آزمون قرار دهید. (راهنمایی: آیا این آرایش را می‌توان به صورت ترکیب سری دو خازن تلقی کرد؟)

۴۲ م. ظرفیت خازن شکل ۲۶ـ۳۶، که مساحت هر صفحه‌اش A است، چقدر است؟ (راهنمایی: مسأله‌های ۴۰ و ۴۱ را ببینید).



شکل ۲۶ـ۳۶ مسألهٔ ۴۲.

بخش ۲۶ـ۸ دی‌الکتریک‌ها و قانون گاؤس

۴۳ ت. ظرفیت یک خازن صفحه ـ موازی $100\,\text{pF}$ و مساحت هر صفحهٔ آن $100\,\text{cm}^2$ است. فضای میان صفحه‌ها به طور کامل با دی‌الکتریک میکا ($\kappa=5{,}4$) پر شده است. اگر اختلاف پتانسیل دو سر خازن $50\,\text{V}$ باشد، مطلوب است محاسبهٔ (الف) بزرگی میدان الکتریکی E در میکا، (ب) بزرگی بارهای آزاد روی صفحه‌ها، و (پ) بزرگی بارهای سطحی القایی در میکا.

۴۴ ت. در مسألهٔ نمونهٔ ۲۶ـ۶، فرض کنید که در حین جا دادن بُرهٔ دی‌الکتریک، باتری از خازن جدا نمی‌شود. مطلوب است محاسبهٔ (الف) ظرفیت خازن، (ب) بار روی صفحه‌های خازن، (پ) میدان الکتریکی در شکاف‌ها، و (ت) میدان الکتریکی در بُره پس از جا دادن آن در خازن.

۴۵ م. فضای میان دو پوستهٔ کروی رسانای هم مرکز به شعاع‌های b و a (که در آن $b>a$) با ماده‌ای با ثابت دی‌الکتریک κ پر شده است. اختلاف پتانسیل میان پوسته‌های درونی و بیرونی V است. مطلوب است تعیین (الف) ظرفیت این خازن کروی، (ب) بار آزاد روی پوستهٔ درونی q، و (پ) بار القا شده در سطح پوستهٔ درونی q'.

۴۶ م. هر یک از دو صفحهٔ موازی یک خازن، به مساحت $100\,\text{cm}^2$ دارای بارهای الکتریکی با بزرگی مساوی و مخالف $8{,}9\times10^{-7}\,\text{C}$ هستند. میدان الکتریکی در درون مادهٔ دی‌الکتریکی که فضای میان صفحه‌ها را پر می‌کند، $1{,}4\times10^{6}\,\text{V/m}$ است. (الف) ثابت دی‌الکتریک این ماده را پیدا کنید. (ب) بزرگی بار القایی روی هر سطح دی‌الکتریک را معین کنید.

۴۷ م. بُرهٔ دی‌الکتریکی به ضخامت b در میان صفحه‌های یک خازن صفحه ـ موازی، که در آن فاصلهٔ جدایی صفحه‌ها d است، جا داده می‌شود. نشان دهید که ظرفیت این خازن از معادله زیر به دست می‌آید

$$C=\frac{\kappa\varepsilon_0 A}{\kappa d-b(\kappa-1)}$$

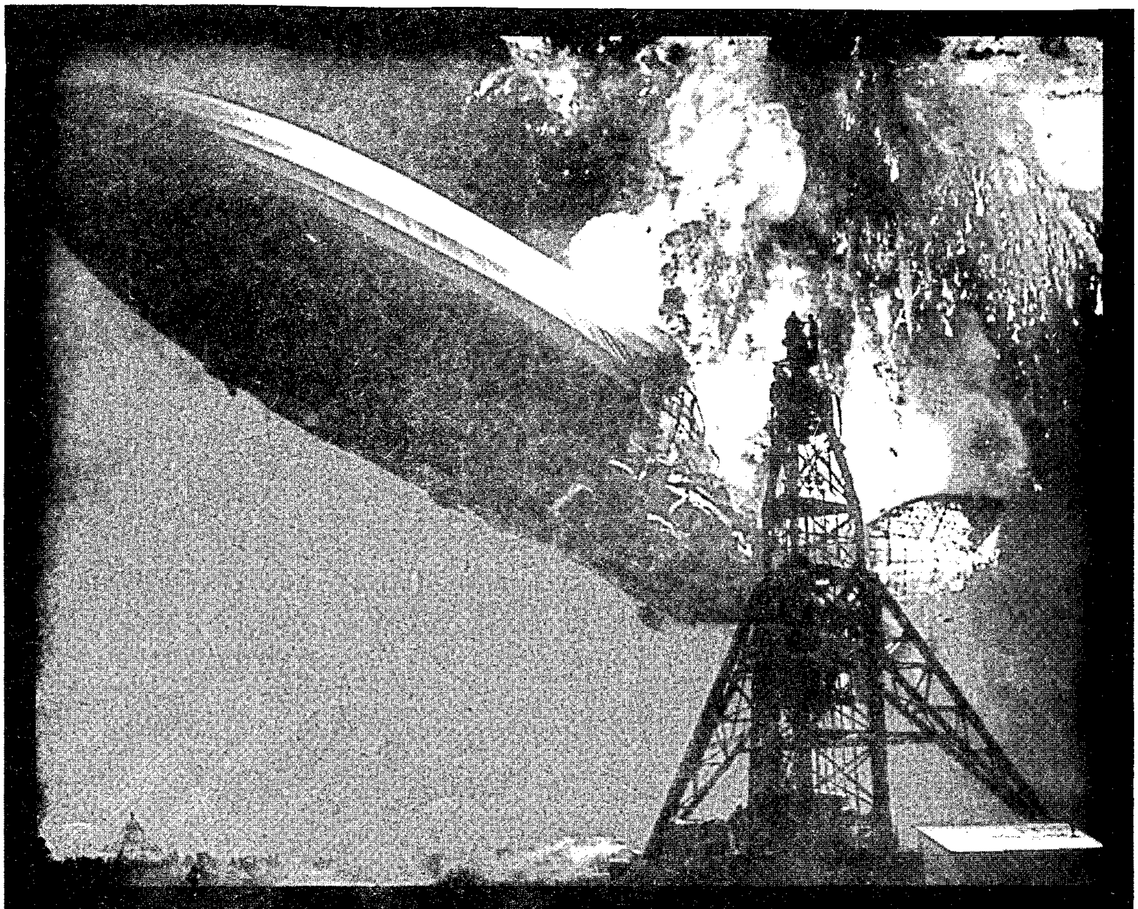
(راهنمایی: این فرمول را با در نظر گرفتن متن مسألهٔ نمونهٔ ۲۶ـ۶ به دست آورید). آیا این فرمول نتیجهٔ عددی درست مسألهٔ نمونهٔ ۲۶ـ۶ را پیشگویی می‌کند؟ تحقیق کنید که در حالت‌های خاص $b=0$، $\kappa=1$ و $b=d$، این فرمول نتیجهٔ قابل قبولی به دست می‌دهد.

مسألهٔ تکمیلی

۴۸. رمز و راز خرده‌های شکلات. این مسأله با مسألهٔ ۴۸ در فصل ۲۴ و مسألهٔ ۵۷ در فصل ۲۵ آغاز شده است. در کارخانهٔ بیسکویت سازی، به‌عنوان بخشی از بررسی‌های علل انفجار، پتانسیل‌های الکتریکی کارگران در حین خالی کردن کیسه‌های پودر خرده‌های شکلات در پاتیل خمیرگیری در حال به هم زدن ابری از پودر در اطراف آنها، اندازه‌گیری شد. پتانسیل الکتریکی هر کارگر نسبت به زمین (به عنوان پتانسیل صفر)، $7{,}0\,\text{kV}$ بود. (الف) با این فرض که هر کارگر عملاً خازنی با ظرفیتی در حدود $200\,\text{pF}$ است، انرژی ذخیره شده در این خازن را پیدا کنید. اگر یک تک جرقه در بین کارگر و هر شیء رسانای متصل به زمین، بار الکتریکی کارگر را خنثی کند، آن انرژی به جرقه منتقل می‌شود. بر پایهٔ اندازه‌گیری، جرقه‌ای که بتواند ابری از پودر خرده شکلات را مشتعل کند و در نتیجه باعث انفجار شود، باید دست کم دارای انرژی $150\,\text{mJ}$ باشد. (ب) آیا جرقه‌ای از یک کارگر می‌تواند انفجاری در ابر پودر درون پاتیل ایجاد کند؟ (این موضوع با مسألهٔ ۴۴ فصل ۲۷ ادامه خواهد یافت).

۲۷

جریان و مقاومت الکتریکی



کشتی هوایی (زیپلین) هیندن بورگ، که مایهٔ مباهات کشور آلمان و وسیله‌ای شگفت‌انگیز در زمان خود بود ـ با طولی در حدود سه برابر طول زمین فوتبال ـ بزرگترین ماشین پرنده‌ای بود که ساخته شده بود. این ماشین، با آنکه به وسیلهٔ ۱۶ مخزن گاز هیدروژن بسیار آتشگیر در آسمان نگه داشته می‌شد، بارها سفر رفت و برگشت خود را بر روی اقیانوس اطلس بدون حادثه انجام داد. در واقع، کشتی‌های هوایی آلمانی، که همه به هیدروژن وابسته بودند، هرگز به خاطر گاز هیدروژن دچار حادثه نشدند. اما، اندکی پس از ساعت ۷ و ۲۱ دقیقهٔ بعد از ظهر روز ششم ماه مه سال ۱۹۳۷، هنگامی که هیندن بورگ برای فرود آمدن در ایستگاه هوایی نیروی دریایی در لیک هورست، ایالت نیوجرسی امریکا، آماده می‌شد، دچار حریق شد. کارکنان کشتی در حالی که در انتظار فرونشستن توفان و باران بودند و طناب‌های کنترل کننده را به طرف خدمهٔ زمینی نیروی دریایی در پایین می‌انداختند، در بدنهٔ بیرونی کشتی و در فاصلهٔ یک سوم از پاشنهٔ کشتی لرزش‌هایی مشاهده کردند. چند ثانیه بعد، از آن ناحیه شعله‌ای برخاست و هالهٔ سرخ رنگی درون کشتی را روشن کرد و در مدت ۳۲ ثانیه کشتی شعله‌ور شد و به زمین افتاد.

پس از چندین بار پروازهای موفقیت‌آمیز کشتی‌های هوایی شناور با هیدروژن، چرا این کشتی هوایی دچار انفجار شد؟

در این فصل به این پرسش پاسخ داده خواهد شد.

۱ـ۲۷ بارهای در حال حرکت و جریان‌های الکتریکی

در فصل‌های ۲۲ تا ۲۶، به طور عمده، به مطالعهٔ **الکتروستاتیک** ـ یعنی مطالعهٔ بارهای در حال سکون، پرداختیم. از این فصل بررسی **جریان‌های الکتریکی**، یعنی بارهای در حال حرکت را آغاز می‌کنیم.

نمونه‌های گوناگون جریان‌های الکتریکی فراوان‌اند و گسترهٔ آنها جریان‌های قوی تشکیل دهنده آذرخش‌ها تا جریان‌های عصبی ضعیف تنظیم کنندهٔ فعالیت‌های عضلانی بدن را در بر می‌گیرد. همهٔ ما با جریان‌های سیم‌کشی خانه‌ها در لامپ‌های روشنایی و در وسایل برقی خانگی آشنا هستیم. باریکه‌ای از الکترون‌ها ـ یعنی یک جریان الکتریکی ـ در فضای تخلیه شدهٔ لامپ تصویر تلویزیون حرکت می‌کند. ذرات باردار منفی و مثبت، هر دو، در گازهای یونیدهٔ لامپ‌های فلوئورسنت، در باتری رادیو و در باتری اتومبیل، جریان دارند. جریان‌های الکتریکی را در نیمرساناها، در ماشین‌های حسابگر و در تراشه‌های کنترل کنندهٔ اجاق‌های میکروموج و در ماشین‌های ظرف‌شویی الکتریکی هم می‌توان یافت.

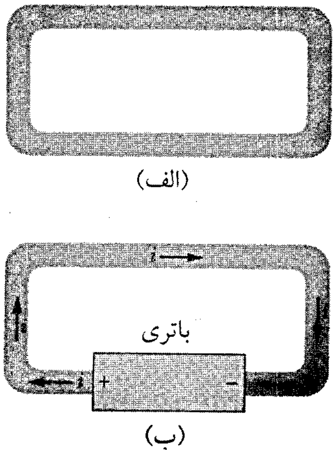
در مقیاس جهانی، ذرات باردار گیر افتاده در کمربندهای تابشی **وان آلن**[1] در بالای جوّ، میان قطب‌های مغناطیسی شمال و جنوب زمین به پس و پیش حرکت می‌کنند. در مقیاس منظومهٔ شمسی، جریان‌های بسیار عظیمی از پروتون‌ها، الکترون‌ها، و یون‌ها به صورت **باد خورشیدی** از خورشید خارج می‌شوند. در مقیاس کهکشانی، پرتوهای کیهانی، که عمدتاً از پروتون‌های پرانرژی تشکیل شده‌اند، در کهکشان **راه شیری** جریان دارند و برخی از آنها به زمین می‌رسند.

با آنکه جریان الکتریکی از بارهای الکتریکی در حال حرکت تشکیل می‌شود، اما همهٔ بارهای متحرک، به وجود آورندهٔ جریان الکتریکی نیستند. وقتی می‌گوییم یک جریان الکتریکی از سطح معینی عبور می‌کند، باید جریان خالص بارهای گذرنده از آن سطح مورد نظر باشد. دو مثال زیر به روشن شدن موضوع کمک می‌کنند.

۱. الکترون‌های آزاد (الکترون‌های رسانش) در طول یک سیم منزوی به طور کتره‌ای با تندی تقریبی $10^6 m/s$ حرکت می‌کنند. اگر این سیم را با یک صفحهٔ فرضی قطع کنیم الکترون‌های رسانش از آن صفحه با آهنگ چند میلیارد بر ثانیه، در هر دو جهت عبور می‌کنند، اما هیچ‌گونه انتقال خالص بار الکتریکی‌ای صورت نمی‌گیرد و در نتیجه، هیچ جریانی از سیم نمی‌گذرد. البته، هرگاه دو سر سیم را به یک باتری وصل کنیم شارش آرامی از بارهای الکتریکی در یک جهت ظاهر می‌شود و در این حالت انتقال خالصی از بارها و در نتیجه، یک جریان الکتریکی، در سیم به وجود می‌آید.

۲. شارش آب در یک لوله نشان دهندهٔ شارش جهت‌دار بارهای مثبت (پروتون‌ها در مولکول‌های آب) با آهنگ حدود چند میلیون کولن بر ثانیه است. اما در اینجا انتقال خالص بار وجود ندارد زیرا یک شارش موازی متشکل از بارهای منفی (الکترون‌ها در مولکول‌های آب) هم درست به همان تعداد بارهای مثبت و در حال حرکت در همان جهت، نیز وجود دارد.

در این فصل مطالعهٔ خود را ـ در چارچوب فیزیک کلاسیک ـ به **جریان‌های پایای الکترون‌های رسانش** متحرک در **رساناهای فلزی**، نظیر سیم‌های مسی، محدود می‌کنیم.



شکل ۱ـ۲۷ (الف) نمودار یک حلقهٔ مسی در حال تعادل الکتروستاتیکی. تمام نقاط حلقه پتانسیل یکسان دارند و میدان الکتریکی در تمام نقاط درون آن صفر است. (ب) با وارد کردن یک باتری در حلقه بین دو سر حلقهٔ متصل به پایانه‌های باتری یک اختلاف پتانسیل ایجاد می‌شود. در نتیجه، باتری یک میدان الکتریکی در درون حلقه از یک پایانه تا پایانهٔ دیگر به وجود می‌آورد و این میدان باعث حرکت بارهای الکتریکی در حلقه می‌شود. این حرکت کردن بارها جریان i را تولید می‌کند.

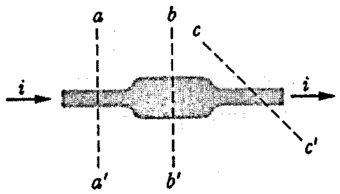
۲ـ۲۷ جریان الکتریکی

همان طورکه شکل ۱ـ۲۷ الف نشان می‌دهد، در تمام نقاط یک حلقهٔ رسانای منزوی ـ بدون توجه به بودن یا نبودن بار اضافی در حلقه ـ پتانسیل یکسان است و در درون یا در سطح این رسانا هیچ میدان الکتریکی‌ای نمی‌تواند وجود داشته باشد. با آنکه الکترون‌های رسانش در حلقه وجود دارند، هیچ نیروی الکتریکی برایندی به الکترون‌ها وارد نمی‌شود و در نتیجه، هیچ جریانی به وجود نمی‌آید.

هرگاه مطابق شکل ۱ـ۲۷ ب، یک باتری در حلقه وارد شود، حلقهٔ رسانا دیگر هم پتانسیل نخواهد بود. در این حالت، در درون رسانا یک میدان الکتریکی به وجود می‌آید. این میدان با وارد کردن نیرو به الکترون‌های

---
1. Van Allen

رسانش آنها را به حرکت وامی‌دارد، که نتیجه‌اش برقرار شدن **جریان الکتریکی** است. پس از مدتی بسیار کوتاه شارش الکترونی به یک مقدار ثابت و جریان به **حالت پایای** خود می‌رسد (یعنی، با گذشت زمان تغییر نمی‌کند).



شکل ۲-۲۷ جریان i گذرنده از رسانا در صفحه‌های aa'، bb' و cc' یکسان است.

شکل ۲-۲۷، بخشی از یک حلقهٔ رسانا را نشان می‌دهد که در آن جریان الکتریکی برقرار شده است. اگر بار dq در مدت زمان dt از یک صفحهٔ فرضی (مانند صفحهٔ aa') عبور کند، جریان i گذرنده از آن صفحه چنین تعریف می‌شود:

$$i = \frac{dq}{dt} \qquad \text{(تعریف جریان الکتریکی)} \qquad (۱-۲۷)$$ ■

بار الکتریکی گذرنده از این صفحه در بازهٔ زمانی صفر تا t با انتگرال‌گیری به دست می‌آید:

$$q = \int dq = \int_{0}^{t} i dt \qquad (۲-۲۷)$$

که در آن جریان i ممکن است برحسب زمان تغییر کند.

در شرایط پایا جریان در صفحه‌های aa'، bb' و cc'، و در واقع در تمام صفحه‌های قطع کنندهٔ رسانا بدون توجه به محل یا سمتگیری آنها، یکسان است. این واقعیت ناشی از پایستگی بار الکتریکی است. در شرایط پایایی که در اینجا فرض شده است به ازای هر الکترونی که از صفحهٔ cc' عبور می‌کند باید الکترونی از صفحهٔ aa' بگذرد. به همین ترتیب، اگر شارش آب در یک لوله پایا باشد، به ازای هر قطرهٔ آبی که از یک سر لوله وارد می‌شود، باید قطرهٔ آبی از سر دیگر لوله خارج شود. مقدار آب در این لوله یک کمیت پایسته است.

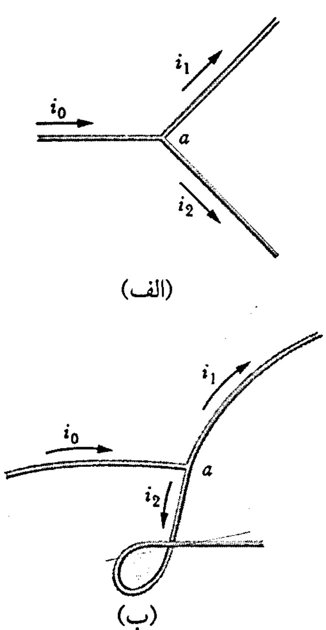
یکای SI جریان **کولن بر ثانیه** (با نماد C/s) است که **آمپر** (با نماد A) هم نامیده می‌شود:

$$۱\text{C/s} = \text{یک کولن بر ثانیه} = ۱\text{A} = \text{یک آمپر}$$

آمپر یکی از یکاهای اصلی SI است؛ کولن، چنانکه در فصل ۲۲ هم دیدیم، برحسب آمپر تعریف می‌شود. تعریف صوری آمپر را در فصل ۳۰ بیان خواهیم کرد.

جریان الکتریکی، چنانکه با معادلهٔ ۱-۲۷ تعریف شد، کمیتی نرده‌ای است، زیرا در آن معادله بار الکتریکی و زمان، هر دو، کمیت‌هایی نرده‌ای‌اند. در عین حال، جریان اغلب، مطابق شکل ۱-۲۷ ب، با یک پیکان مشخص می‌شود تا نشان داده شود که بار الکتریکی حرکت می‌کند. اما این پیکان‌ها بردار نیستند و نیازی به جمع برداری ندارند. شکل ۳-۲۷ الف، رسانایی با جریان i_0 را که در یک پیوند گاه به دو شاخه تقسیم شده است، نشان می‌دهد. چون بار الکتریکی پایسته است مجموع بزرگی جریان‌های شاخه‌ها برابر با بزرگی جریان در رسانای اصلی است:

$$i_0 = i_1 + i_2 \qquad (۳-۲۷)$$



شکل ۳-۲۷ در نقطهٔ a، رابطهٔ $i_0=i_1+i_2$، بدون توجه به سمتگیری سه سیم حامل جریان در فضا، صادق است. جریان‌ها کمیت‌هایی نرده‌ای هستند نه برداری.

چنانکه شکل ۳-۲۷ ب نشان می‌دهد، خم کردن یا تغییر سمتگیری سیم‌های حامل جریان در فضا اعتبار معادلهٔ ۳-۲۷ را نقض نمی‌کند. پیکان‌های جریان فقط جهت (یا سوی) شارش را در طول یک رسانا نشان می‌دهند، نه جهت آن را در فضا.

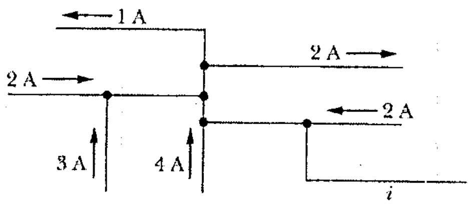
جهت جریان‌ها

در شکل ۱-۲۷ ب، پیکان‌های جریان در جهتی رسم شده‌اند که ذرات با بار مثبت باید تحت اثر نیروی حاصل از میدان الکتریکی در آن جهت در حلقه حرکت کنند. این ذرات، که حامل‌های بار مثبت نام دارند، از پایانهٔ مثبت باتری دور و به پایانهٔ منفی نزدیک می‌شوند. در واقع، در حلقهٔ مسی شکل ۱-۲۷ ب، حامل‌های بار الکترون‌ها هستند که بار منفی دارند. میدان الکتریکی این الکترون‌ها را در خلاف جهت پیکان‌های جریان از پایانهٔ منفی به سوی پایانهٔ مثبت حرکت می‌دهد. اما به دلایل تاریخی، در مورد جهت جریان قرارداد زیر به کار می‌رود:

◀ پیکان جریان در جهتی رسم می‌شود که حامل‌های بار مثبت حرکت می‌کنند، حتی اگر حامل‌های بار واقعی منفی باشند و در جهت مخالف حرکت کنند.

این قرارداد می‌تواند مفید باشد زیرا در بیشتر حالت‌ها نتیجهٔ حرکت فرضی حامل‌های بار مثبت در یک جهت همانند اثر حرکت واقعی حامل‌های بار منفی در جهت مخالف است. (البته، وقتی همان اثر حاصل نشود این قرارداد به کنار می‌رود و حرکت واقعی مورد نظر قرار می‌گیرد).

خودآزمایی ۱: شکل زیر، بخشی از یک مدار را نشان می‌دهد. بزرگی و جهت جریان i در سیم پایین سمت راست چقدر است؟



مسألهٔ نمونهٔ ۲۷ـ۱

در لوله‌ای آب با آهنگ شارش حجمی $dV/dt = ۴۵۰\text{cm}^۳/\text{s}$ جریان دارد. جریان حاصل از بارهای منفی چقدر است؟

حل: جریان بارهای منفی i، از الکترون‌های مولکول‌های آب گذرنده از لوله ناشی می‌شود. این جریان برابر با آهنگی است که با آن بارهای منفی از هر صفحه‌ای که به طور کامل لوله را قطع می‌کند، می‌گذرند. بنابراین، در اینجا **نکتهٔ کلیدی** این است که جریان را می‌توان برحسب تعداد مولکول‌های گذرنده در هر ثانیه از آن صفحه، حساب کرد:

$$i = \begin{pmatrix}\text{تعداد مولکول‌ها}\\ \text{در هر ثانیه}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{تعداد الکترون‌ها}\\ \text{در هر مولکول}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{بار الکتریکی}\\ \text{هر الکترون}\end{pmatrix}$$

یا

$$i = (e)(۱۰)\frac{dN}{dt}$$

تعداد الکترون‌ها در هر مولکول به این دلیل ۱۰ است که هر مولکول آب $(H_۲O)$ شامل ۸ الکترون در تک اتم اکسیژن و ۱ الکترون در هر یک از دو اتم هیدروژن است.

آهنگ dN/dt را برحسب آهنگ شارش حجمی معلوم dV/dt می‌توان چنین نوشت:

$$\begin{pmatrix}\text{تعدادمولکول‌ها}\\ \text{در هر ثانیه}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{تعداد مولکول‌ها}\\ \text{در هر مول}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{تعداد مول‌ها}\\ \text{در یکای جرم}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{جرم یکای}\\ \text{حجم}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{حجم در}\\ \text{هر ثانیه}\end{pmatrix}$$

«تعداد مولکول‌ها در هر مول» برابر با عدد آووگادرو[1]، N_A، است. «تعداد مول‌ها در یکای جرم»، برابر با عکس جرم هر مول است، که جرم مولی آب M است. «جرم یکای حجم» همان چگالی (جرمی) آب ρ_{mass}، است. حجم در هر ثانیه، همان آهنگ شارش حجمی dV/dt است. بنابراین، می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{dN}{dt} = N_A\left(\frac{۱}{M}\right)\rho_{\text{mass}}\left(\frac{dV}{dt}\right) = \frac{N_A\rho_{\text{mass}}}{M}\frac{dV}{dt}$$

با جانشانی این مقدار در معادلهٔ مربوط به i، داریم

$$i = ۱۰eN_AM^{-۱}\rho_{\text{mass}}\frac{dV}{dt}$$

N_A برابر با: مول / مولکول $۱۰^{۲۳}\times۶٫۰۲$، یا $۶٫۰۲\times۱۰^{۲۳}\text{mol}^{-۱}$، و ρ_{mass} برابر با $۱۰۰۰\text{kg/m}^۳$ است. جرم مولی آب را می‌توان از جرم‌های مولی مندرج در پیوست ج کتاب به دست آورد: جرم مولی اکسیژن (۱۶g/mol) را با دو برابر جرم مولی هیدروژن (۱g/mol) جمع می‌کنیم تا $۱۸\text{g/mol} = ۰٫۰۱۸\text{kg/mol}$ به دست آید. پس، می‌توانیم بنویسیم

$$i = (۱۰)(۱٫۶\times۱۰^{-۱۹}\text{C})(۶٫۰۲\times۱۰^{۲۳}\text{mol}^{-۱})$$
$$\times(۰٫۰۱۸\text{kg/mol})^{-۱}(۱۰۰۰\text{kg/m}^۳)(۴۵۰\times۱۰^{-۶}\text{m}^۳/\text{s})$$
$$i = ۲٫۴۱\times۱۰^۷\text{C/s} = ۲٫۴۱\times۱۰^۷\text{A} \Rightarrow$$

$$i = ۲۴٫۱\text{MA}$$ **(پاسخ)**

این جریان بارهای منفی، دقیقاً با جریان بارهای مثبت مربوط به هسته‌های سه اتم تشکیل دهندهٔ مولکول آب، خنثی می‌شود. در نتیجه، هیچ‌گونه جریان خالصی از بارها از لوله عبور نمی‌کند.

1. Avogadro

۳-۲۷ چگالی جریان

گاهی اوقات مقدار جریان i در یک رسانای خاص مورد نظر است. اما گاهی هم با نگاهی موضعی میل داریم شارش بارها را در نقطهٔ خاصی از یک مقطع رسانا بدانیم. برای توصیف این شارش از **چگالی جریان $\vec{J}$**، استفاده می‌کنیم، که همان جهت سرعت حرکت بارها را دارد. چگالی جریان اگر بارها مثبت باشند در جهت حرکت و اگر بارها منفی باشند در خلاف جهت حرکت بارهاست. در هر عنصر سطح مقطع، بزرگی J برابر با جریان گذرنده از یکای آن عنصر سطح است. جریان گذرنده از این عنصر از رابطهٔ $\vec{J}.d\vec{A}$ به دست می‌آید، که در آن $d\vec{A}$ بردار مساحت عنصر سطح است، که بر عنصر عمود است. در این صورت، جریان کل گذرنده از این سطح برابر است با:

$$i = \int \vec{J} \cdot d\vec{A} \qquad (۴-۲۷)$$

■

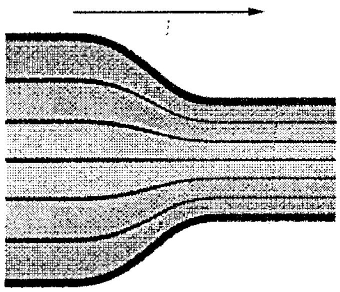
اگر جریان در سراسر سطح یکنواخت و موازی با $d\vec{A}$ باشد، $\vec{J}$ نیز یکنواخت و موازی با $d\vec{A}$ خواهد بود. بنابراین، با استفاده از معادلهٔ ۲۷-۴، داریم

$$i = \int J dA = J\int dA = JA \Rightarrow$$

$$J = \frac{i}{A} \qquad (۵-۲۷)$$

در این رابطه A مساحت کل سطح مقطع است. با توجه به معادلهٔ ۲۷-۴ یا معادلهٔ ۲۷-۵، نتیجه می‌گیریم که یکای SI برای چگالی جریان **آمپر بر مترمربع** (با نماد A/m^2) است.

در فصل ۲۳ دیدیم که میدان الکتریکی را می‌توان با خط‌های میدان الکتریکی نمایش داد. شکل ۲۷-۴ نشان می‌دهد که چگونه چگالی جریان را می‌توان با گروهی از خط‌ها، به نام **خط جریان**، نمایش داد. جریان که در شکل ۲۷-۴ جهتش به سمت راست است، در حال عبور از رسانای گشاد در سمت چپ به رسانای تنگ در سمت راست است. چون بار الکتریکی در حین عبور پایسته است، مقدار بار و در نتیجه مقدار جریان، تغییر نمی‌کند. اما چگالی جریان تغییر می‌کند و مقدارش در رسانای تنگ بیشتر است. فاصلهٔ میان خط جریان‌ها این افزایش چگالی جریان را نشان می‌دهد؛ نزدیک بودن خط جریان‌ها به هم نشانهٔ بیشتر بودن چگالی جریان است.



شکل ۲۷-۴ نمودار خط جریان‌های نشان دهندهٔ چگالی جریان در شارش بار الکتریکی از رسانایی که دهانهٔ آن تنگ شده است.

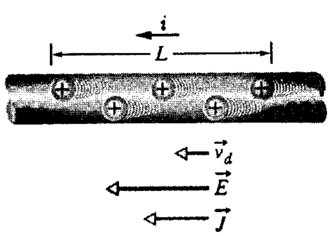
تندی سوق

هنگامی که از یک رسانا جریانی عبور نمی‌کند الکترون‌های رسانش در رسانا کاتوره‌ای حرکت می‌کنند و در هیچ جهتی حرکت برایندی وجود ندارد. در حین عبور جریان از رسانا الکترون‌ها باز هم کاتوره‌ای حرکت می‌کنند، اما در این حالت تمایل دارند با **تندی سوق v_d**، در خلاف جهت میدان الکتریکی به وجود آورندهٔ جریان سوق پیدا کنند. تندی سوق در مقایسه با تندی‌های حرکت کاتوره‌ای بسیار کم است. برای مثال، در سیم‌های مسی سیم‌کشی برق خانه‌ها تندی سوق الکترون‌ها شاید 10^{-5}m/s یا 10^{-4}m/s باشد، در حالی که تندی حرکت کاتوره‌ای آنها در حدود 10^{6}m/s است.

برای تعیین رابطهٔ v_d، تندی سوق الکترون‌های رسانش، در جریان گذرنده از یک سیم با J، بزرگی چگالی جریان در سیم، می‌توان از شکل ۲۷-۵ استفاده کرد. این شکل حرکت سوقی هم‌ارز حامل‌های بار مثبت را در جهت میدان الکتریکی اعمال شدهٔ $\vec{E}$ نشان می‌دهد. فرض می‌کنیم این حامل‌های بار همگی با تندی سوق یکسان v_d حرکت می‌کنند و چگالی جریان J در سراسر مساحت مقطع سیم A، یکنواخت است. تعداد حامل‌های بار در طول سیم L، برابر با nAL است، که در آن n تعداد حامل‌ها در یکای حجم است. پس، بار کل حامل‌ها، هر یک با بار e، در طول سیم L، برابر است با:

$$q = (nAL)e$$

چون تمام حامل‌ها در طول سیم با تندی v_d حرکت می‌کنند، این بار کل از هر سطح مقطع در بازهٔ زمانی زیر عبور می‌کند:



شکل ۲۷-۵ در یک رسانا حامل‌های بار مثبت با تندی سوق v_d، در جهت میدان الکتریکی اعمال شدهٔ $\vec{E}$ حرکت می‌کنند. طبق قرارداد، چگالی جریان $\vec{J}$ و پیکان جریان در یک جهت رسم شده‌اند.

$$t = \frac{L}{v_d}$$

معادله ۲۷ـ۱ نشان می‌دهد که جریان i برابر با آهنگ زمانی عبور بار الکتریکی از یک مقطع است، به گونه‌ای که می‌توان نوشت:

$$i = \frac{q}{t} = \frac{nALe}{L/v_d} = nAev_d \qquad (۲۷\text{ـ}۶)$$

با یادآوری معادلهٔ ۲۷ـ۵ ($J=i/A$) و حل کردن معادلهٔ بالا نسبت به v_d، داریم

$$v_d = \frac{i}{nAe} = \frac{J}{ne}$$

شکل برداری این معادله چنین است:

$$\vec{J} = (ne)\vec{v}_d \qquad (۲۷\text{ـ}۷)$$ ■

در اینجا حاصل‌ضرب ne، که یکای SI آن **کولن بر مترمکعب** (با نماد C/m^3) است، چگالی بار حامل‌ها است. برای حامل‌های مثبت، ne مثبت است و معادلهٔ ۲۷ـ۷ نشان می‌دهد که $\vec{J}$ و $\vec{v}_d$ همسوی‌اند. برای حامل‌های منفی، ne منفی است و $\vec{J}$ و $\vec{v}_d$ ناهمسوی‌اند.

خودآزمایی ۲: شکل زیر، الکترون‌های رسانش یک سیم را در حال حرکت به سمت چپ نشان می‌دهد. آیا جهت این کمیت‌ها به سمت چپ است یا به سمت راست: (الف) جریان i، (ب) چگالی جریان $\vec{J}$، (پ) میدان الکتریکی $\vec{E}$ در سیم؟



مسألهٔ نمونهٔ ۲۷ـ۲

(الف) در مقطعی از یک سیم استوانه‌ای به شعاع $R=۲{,}۰\,mm$ چگالی جریان یکنواخت و برابر است با $J=۲{,}۰\times۱۰^{۵}A/m^{۲}$. جریان گذرنده از پوستهٔ بیرونی این سیم واقع در بین شعاع‌های $R/۲$ و R (شکل ۲۷ـ۶ الف) چقدر است؟

حل: نکتهٔ کلیدی این است که چون چگالی جریان در سطح مقطع یکنواخت است چگالی جریان J، جریان i و مساحت مقطع A، طبق معادلهٔ ۲۷ـ۵ ($J=i/A$) به هم مربوط‌اند. در اینجا می‌خواهیم فقط جریان گذرنده از مساحت مقطع کاهش یافتهٔ A' در سیم (به جای مساحت کل) را پیدا کنیم، که برابر است با:

$$A' = \pi R^{۲} - \pi(\frac{R}{۲})^{۲} = \pi(\frac{۳R^{۲}}{۴})$$
$$A' = \frac{۳\pi}{۴}(۰{,}۰۰۲m)^{۲} = ۹{,}۴۲۴\times۱۰^{-۶}m^{۲}$$

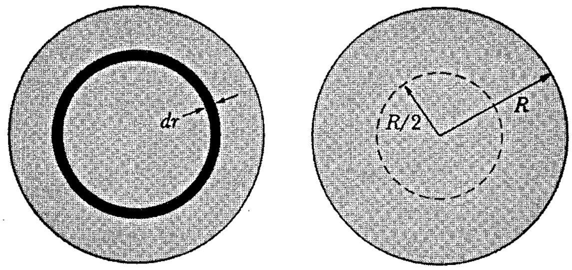
اکنون، معادلهٔ ۲۷ـ۵ را دوباره می‌نویسیم:

$$i = JA'$$

و سپس داده‌ها را جانشانی می‌کنیم:

$$i = (۲{,}۰\times۱۰^{۵}A/m^{۲})(۹{,}۴۲۴\times۱۰^{-۶}m^{۲}) \Rightarrow$$
$$i = ۱{,}۹A \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

(ب) اکنون، فرض می‌کنیم چگالی جریان گذرنده از سطح مقطع سیم برحسب فاصلهٔ شعاعی r به صورت $J=ar^{۲}$ تغییر می‌کند، که در آن $a=۳{,}۰\times۱۰^{۱۱}A/m^{۴}$ و r برحسب متر است. در این حالت جریان گذرنده



(ب) (الف)

شکل ۲۷ـ۶ مسألهٔ نمونهٔ ۲۷ـ۲. (الف) نمایش مقطع سیمی به شعاع R. (ب) نمودار یک حلقهٔ باریک به پهنای dr و محیط $۲\pi r$، که مساحت دیفرانسیلی آن $dA=۲\pi rdr$ است.

از همان پوستهٔ بیرونی سیم چقدر است؟

حل: در اینجا **نکتهٔ کلیدی** این است که چون چگالی جریان در این مقطع سیم یکنواخت نیست باید رابطهٔ جریان را به صورت کلی معادلهٔ ۲۷ـ۴ ($i=\int\vec{J}.d\vec{A}$) بنویسیم و از چگالی جریان در روی مقطع پوستهٔ سیم از $r=R/۲$ تا $r=R$ انتگرال بگیریم. بردار چگالی جریان $\vec{J}$ (در طول سیم) با بردار سطح دیفرانسیلی $d\vec{A}$ (عمود بر مقطع سیم) همسو است. پس، می‌توان نوشت

$$\vec{J}\,.\,d\vec{A} = JdA\cos۰ = JdA$$

در اینجا لازم است به جای مساحت دیفرانسیلی dA چیزی قرار دهیم که بتوانیم در بین حدود $r=R/۲$ و $r=R$ انتگرال‌گیری را انجام دهیم. ساده‌ترین این جاگذاری برای یک حلقهٔ باریک به محیط $۲\pi r$ و پهنای dr مقدار $۲\pi r dr$ است (چون J تابعی از r است) (شکل ۲۷ـ۶ ب). اکنون، با در نظر گرفتن متغیر r می‌توان انتگرال‌گیری را انجام داد. در نتیجه، با استفاده از معادلهٔ ۲۷ـ۴، داریم

$$i = \int \vec{J}\cdot d\vec{A} = \int J dA = \int_{R/۲}^{R} ar^۲ ۲\pi r dr = ۲\pi a \int_{R/۲}^{R} r^۳ dr$$

$$i = ۲\pi a \left[\frac{r^۴}{۴}\right]_{R/۲}^{R} = \frac{\pi a}{۲}\left[R^۴ - \frac{R^۴}{۱۶}\right] = \frac{۱۵}{۳۲}\pi a R^۴$$

$$i = \frac{۱۵}{۳۲}\pi(۳{,}۰\times ۱۰^{۱۱}\text{A/m}^۴)(۰{,}۰۰۲\text{m})^۴ \Rightarrow$$

$$i = ۷{,}۱\text{A} \qquad \text{(پاسخ)}$$

مسألهٔ نمونهٔ ۲۷ـ۳

تندی سوق الکترون‌های رسانش در یک سیم مسی به شعاع $r=۹۰۰\mu m$، که از آن جریان $i=۱۷\text{mA}$ می‌گذرد، چقدر است؟ فرض کنید در این جریان از هر اتم مس یک الکترون سهیم و چگالی جریان در سطح مقطع سیم یکنواخت است.

حل: در اینجا باید به سه **نکتهٔ کلیدی** زیر توجه کنیم:

۱. با توجه به معادلهٔ ۲۷ـ۷، تندی سوق v_d، با جریان J و تعداد الکترون‌های رسانش در یکای حجم n، رابطه دارد. این معادله را برحسب بزرگی J می‌توان به صورت $J=nev_d$، نوشت.

۲. چون چگالی جریان یکنواخت است بزرگی آن J، طبق معادلهٔ ۲۷ـ۵ ($J=i/A$، که در آن A مساحت مقطع سیم است) به جریان معلوم i مربوط است.

۳. چون بنا به فرض هر اتم مس یک الکترون رسانش دارد، تعداد الکترون‌های رسانش در یکای حجم n، با تعداد اتم‌ها در یکای حجم برابر است.

اکنون، با توجه به نکتهٔ سوم چنین می‌نویسیم:

$$n = \left(\text{تعداد اتم‌ها در یکای حجم}\right) = \left(\text{تعداد اتم‌ها در هر مول}\right)\left(\text{تعداد مول‌ها در یکای جرم}\right)\left(\text{جرم در یکای حجم}\right)$$

تعداد اتم‌ها در هر مول برابر با عدد آووگادرو N_A (مساوی با $۶{,}۰۲\times ۱۰^{۲۳}\text{mol}^{-۱}$) است. تعداد مول‌ها در یکای جرم برابر با عکس جرم یکای مول، یا جرم مولی مس M، است. جرم یکای حجم همان چگالی (جرمی) مس ρ_{mass}، است. پس، می‌توانیم بنویسیم:

$$n = N_A\left(\frac{۱}{M}\right)\rho_{\text{mass}} = \frac{N_A \rho_{\text{mass}}}{M}$$

با به کار بردن جرم مولی M و چگالی مس ρ_{mass}، از پیوست ج کتاب (و پس از انجام دادن تبدیل یکاها)، داریم

$$n = \frac{(۶{,}۰۲\times ۱۰^{۲۳}\text{mol}^{-۱})(۸{,}۹۶\times ۱۰^{۳}\text{kg/m}^۳)}{۶۳{,}۵۴\times ۱۰^{-۳}\text{kg/mol}}$$

$$n = ۸{,}۴۹\times ۱۰^{۲۸}\ \text{الکترون}/\text{m}^۳ \Rightarrow$$

$$n = ۸{,}۴۹\times ۱۰^{۲۸}\text{m}^{-۳}$$

سپس، دو نکتهٔ کلیدی اول را با هم ترکیب می‌کنیم:

$$\frac{i}{A} = nev_d$$

با نشاندن $\pi r^۲$ (مساوی با $۲{,}۵۴\times ۱۰^{-۶}\text{m}^۲$) به جای A و حل کردن معادلهٔ حاصل نسبت به v_d، خواهیم داشت

$$v_d = \frac{i}{ne(\pi r^۲)}$$

$$v_d = \frac{۱۷\times ۱۰^{-۳}\text{A}}{(۸{,}۴۹\times ۱۰^{۲۸}\text{m}^{-۳})(۱{,}۶\times ۱۰^{-۱۹}\text{C})(۲{,}۵۴\times ۱۰^{-۶}\text{m}^۲)} \Rightarrow$$

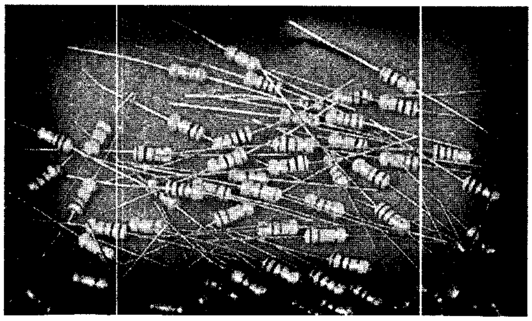
$$v_d = ۴{,}۴۹\times ۱۰^{-۷}\text{m/s} \qquad \text{(پاسخ)}$$

این تندی در حدود $۱{,}۸\text{mm/h}$ است، که از تندی یک مار تنبل هم کمتر است.

ممکن است از خود بپرسید «اگر تندی سوق الکترون‌ها این قدر کم است، چرا با زدن کلید برق، لامپ‌های اتاق فوراً روشن می‌شوند؟» این اشتباه ناشی از ندانستن تفاوت میان تندی سوق الکترون‌ها و تندی انتشار تغییرات پیکربندی میدان الکتریکی در طول سیم‌هاست. تندی اخیر نزدیک به تندی نور است و الکترون‌ها در همه جای سیم، از جملهٔ در لامپ‌ها، تقریباً به‌طور آنی حرکت سوقی را آغاز می‌کنند. به همین ترتیب، هنگامی که شیر متصل به یک لولهٔ پر از آب را باز می‌کنیم، یک موج فشار در طول لوله با تندی صوت در آب به راه می‌افتد. اما تندی حرکت آب در لوله ـ که می‌تواند با یک نشانهٔ رنگی اندازه‌گیری شود ـ بسیار کمتر است.

۲۷ـ۴ مقاومت و مقاومت ویژهٔ الکتریکی

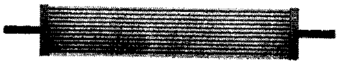
هرگاه به دو سر میله‌ای مسی یا شیشه‌ای، با شکل هندسی مشابه، اختلاف پتانسیل یکسانی اعمال کنیم، جریان‌های حاصل در میله‌ها کاملاً متفاوت خواهند بود. مشخصه‌ای از رساناها که در این کیفیت دخالت دارد، **مقاومت** الکتریکی آن است. مقاومت میان دو نقطه از یک رسانا را با برقرار کردن اختلاف پتانسیل بین آن دو نقطه V، و اندازه‌گیری جریان حاصل i، معین می‌کنیم. مقاومت R برابر است با:



شکل ۲۷-۷ تصویری از مجموعه‌ای از انواع مقاومت‌ها. نوارهای دایره‌ای دور مقاومت‌ها رمزینه‌های رنگی‌ای هستند که مقدار مقاومت را مشخص می‌کنند.



(الف)



(ب)

شکل ۲۷-۸ نمایش دو روش مربوط به اعمال اختلاف پتانسیل به دو سر یک میلهٔ رسانا. فرض می‌کنیم قطعات فلزی متصل به دو سر مقاومت دارای مقاومت ناچیزند. مقاومت اندازه‌گیری شده در آرایش شکل (الف) نسبت به آرایش شکل (ب)، بیشتر است.

$$R = \frac{V}{i} \qquad (\text{تعریف } R) \qquad (۲۷\text{-}۸) \; \blacksquare$$

یکای SI مقاومت الکتریکی، که از معادلهٔ ۲۷-۸ به دست می‌آید، **ولت بر آمپر** است. این ترکیب آن قدر کاربرد دارد که نام خاص اهم (با نماد Ω) به آن داده شده است. یعنی

⇐ یک ولت بر آمپر = ۱Ω = یک اهم

(۲۷-۹) یک اهم = ۱ V/A

رسانایی را که وجودش در یک مدار مقاومت مشخصی ایجاد می‌کند، رسانای **مقاومت‌دار** (یا همان **مقاومت**) می‌نامند (شکل ۲۷-۷ را ببینید). در نمودارهای مداری مقاومت را به شکل ─WWW─ نمایش می‌دهند. اگر معادلهٔ ۲۷-۸ را به صورت زیر بنویسیم

$$i = \frac{V}{R}$$

مشاهده می‌کنیم که نام «مقاومت» به‌جا انتخاب شده است، چون به ازای یک اختلاف پتانسیل معین، هر چه مقاومت (در مقابل جریان) بیشتر باشد، جریان کمتر است.

مقاومت یک رسانا به چگونگی اعمال کردن اختلاف پتانسیل بستگی دارد. مثلاً، شکل ۲۷-۸ نشان می‌دهد که یک اختلاف پتانسیل معین به دو طریق به رسانا اعمال شده است. همان طور که خط جریان‌های چگالی جریان نشان می‌دهند، در این دو حالت جریان‌ها ـ و در نتیجه مقاومت‌های اندازه‌گیری شده ـ متفاوت‌اند. به جز مواردی که مشخص می‌شود، فرض خواهیم کرد که اختلاف پتانسیل به صورت شکل ۲۷-۸ ب به دو سر مقاومت اعمال می‌شود.

همان طور که بارها در موارد دیگر هم دیده‌ایم، اغلب میل بر این است که با دیدی کلی به جای توجه به خود اشیای خاص، به جنس مادهٔ اشیا توجه کنیم. در اینجا به جای توجه به اختلاف پتانسیل دو سر یک مقاومت خاص V، میدان الکتریکی $\vec{E}$ را در نقطه‌ای از مادهٔ مقاومت‌دار در نظر می‌گیریم. هم‌چنین، به جای پرداختن به جریان i در مقاومت، به چگالی جریان $\vec{J}$، در نقطهٔ مورد نظر توجه می‌کنیم. سرانجام، به جای مقاومت یک شیء R، **مقاومت ویژهٔ** مربوط به مادهٔ مقاومت‌دار ρ، را معرفی می‌کنیم:

$$\rho = \frac{E}{J} \qquad (\text{تعریف } \rho) \qquad (۲۷\text{-}۱۰) \; \blacksquare$$

(این معادله را با معادلهٔ ۲۷-۸ مقایسه کنید).

اگر یکاهای SI مربوط به کمیت‌های E و J را طبق معادلهٔ ۲۷-۱۰ با هم ترکیب کنیم، برای ρ یکای **اهم ـ متر** (با نماد Ω.m) به دست می‌آید:

$$\frac{\text{یکای } E}{\text{یکای } J} = \frac{V/m}{A/m^۲} = \frac{V}{A}m = \Omega\,.\,m$$

(اهم ـ متر، یکای مقاومت ویژه را با اهم‌سنج، که وسیله‌ای برای اندازه‌گیری مقاومت الکتریکی است، اشتباه

نکنید). جدول ۲۷ـ۱ مقاومت ویژهٔ برخی مواد را نشان می‌دهد.

معادلهٔ ۲۷ـ۱۰ را می‌توان به شکل برداری نوشت:

$$\vec{E} = \rho\vec{J} \qquad (۱۱ـ۲۷)$$

معادله‌های ۲۷ـ۱۰ و ۲۷ـ۱۱ فقط در مورد مواد همسانگرد ـ موادی که خاصیت‌های الکتریکی آنها در تمام جهت‌ها یکسان‌اند ـ صدق می‌کنند.

در این مبحث اغلب از **رسانندگی ویژهٔ** یک ماده σ، استفاده می‌شود. این کمیت عکس مقاومت ویژه است:

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \qquad (\text{تعریف } \sigma) \qquad (۱۲ـ۲۷)$$

یکای SI رسانندگی ویژه عکس اهم ـ متر $(\Omega.m)^{-1}$ است. این یکا **مهوبرمتر** هم نامیده می‌شود (mho، همان ohm است که از راست به چپ خوانده می‌شود). با توجه به تعریف σ معادلهٔ ۲۷ـ۱۱ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} \qquad (۱۳ـ۲۷)$$

محاسبهٔ مقاومت با استفاده از مقاومت ویژه

به تفاوت مهم بین مقاومت و مقاومت ویژه توجه کنید:

◀ مقاومت الکتریکی خاصیتی از یک شیء است، اما مقاومت ویژه خاصیتی از یک ماده است.

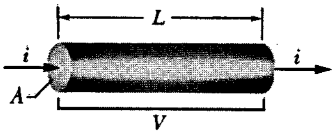
جدول ۲۷ـ۱ مقاومت ویژهٔ برخی مواد در دمای اتاق (۲۰°C)

ماده	مقاومت ویژه، ρ $(\Omega.m)$	ضریب دمایی مقاومت ویژه، α (K^{-1})
	فلزات نوعی	
نقره	$۱٫۶۲ \times ۱۰^{-۸}$	$۴٫۱ \times ۱۰^{-۳}$
مس	$۱٫۶۹ \times ۱۰^{-۸}$	$۴٫۳ \times ۱۰^{-۳}$
آلومینیوم	$۲٫۷۵ \times ۱۰^{-۸}$	$۴٫۴ \times ۱۰^{-۳}$
تنگستن	$۵٫۲۵ \times ۱۰^{-۸}$	$۴٫۵ \times ۱۰^{-۳}$
آهن	$۹٫۶۸ \times ۱۰^{-۸}$	$۶٫۵ \times ۱۰^{-۳}$
پلاتین	$۱۰٫۶ \times ۱۰^{-۸}$	$۳٫۹ \times ۱۰^{-۳}$
منگانین [1]	$۴٫۸۲ \times ۱۰^{-۸}$	$۰٫۰۰۲ \times ۱۰^{-۳}$
	نیمرساناهای نوعی	
سیلیسیوم، خالص (ذاتی)	$۲٫۵ \times ۱۰^{۳}$	-۷۰×۱۰^{-۳}
سیلیسیوم، نوع n [2]	$۸٫۷ \times ۱۰^{-۴}$	
سیلیسیوم، نوع p [3]	$۲٫۸ \times ۱۰^{-۳}$	
	عایق‌های نوعی	
شیشه	$۱۰^{۱۰} - ۱۰^{۱۴}$	
کوارتز مذاب	$\sim ۱۰^{۱۶}$	

۱. آلیاژی خاص است که به منظور داشتن مقدار کوچک α ساخته شده است.

۲. سیلیسیوم خالص آلاییده شده با ناخالصی فسفر، دارای چگالی حامل‌های بار $۱۰^{۲۳}m^{-۳}$.

۳. سیلیسیوم خالص آلاییده شده با ناخالصی آلومینیوم، دارای چگالی حامل‌های بار $۱۰^{۲۳}m^{-۳}$.



شکل ۲۷-۹ با اعمال کردن اختلاف پتانسیل V به دو سر سیمی به طول L و مساحت مقطع A، در سیم جریان i برقرار می‌شود.

اگر مقاومت ویژهٔ ماده‌ای مانند مس معلوم باشد مقاومت یک سیم ساخته شده از آن ماده را می‌توان حساب کرد. فرض می‌کنیم A مساحت مقطع، L طول و V اختلاف پتانسیل دو سر آن سیم باشد (شکل ۲۷-۹). اگر خط جریان‌های نمایش دهندهٔ چگالی جریان گذرنده از سیم یکنواخت باشند، میدان الکتریکی و چگالی جریان در تمام نقاط درون سیم ثابت خواهد بود و مقادیر آنها با توجه به معادله‌های ۲۵-۴۲ و ۲۷-۵، عبارت‌اند از:

$$J = i/A \quad \text{و} \quad E = V/L \qquad (۱۴\text{-}۲۷)$$

در این صورت، از ترکیب معادله‌های ۲۷-۱۰ و ۲۷-۱۴ می‌توان نوشت

$$\rho = \frac{E}{J} = \frac{V/L}{i/A} \qquad (۱۵\text{-}۲۷)$$

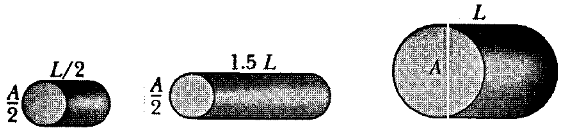
چون V/i برابر با مقاومت R است، معادلهٔ ۲۷-۱۵ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$R = \rho\frac{L}{A} \qquad (۱۶\text{-}۲۷)$$ ■

معادلهٔ ۲۷-۱۶ را فقط در مورد یک رسانای همگن و همسانگرد با سطح مقطع یکنواخت، که به دو سر آن اختلاف پتانسیل مطابق شکل ۲۷-۸ ب اعمال شده است، می‌توان به کار برد.

کمیت‌های ماکروسکوپی V، i و R هنگامی قابل توجه‌اند که بخواهیم در مورد رساناهای خاصی به اندازه‌گیری الکتریکی بپردازیم. این کمیت‌ها را می‌توانیم مستقیماً از روی اسباب‌های اندازه‌گیری بخوانیم. اما وقتی به خاصیت‌های الکتریکی بنیادی ماده توجه داریم کمیت‌های میکروسکوپی E، J و ρ را در نظر می‌گیریم.

خودآزمایی ۳: شکل زیر، سه رسانای مسی استوانه‌ای با طول و مساحت مقطع معلوم را نشان می‌دهد. اگر به دو سر هر یک از آنها اختلاف پتانسیل یکسان V اعمال شود، این رساناها را با توجه به جریان گذرنده از آنها، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



تغییر مقاومت ویژه برحسب دما

مقدار اغلب خاصیت‌های فیزیکی مواد برحسب دما تغییر می‌کند، که مقاومت ویژه هم از آن جمله است. به‌عنوان مثال، شکل ۲۷-۱۰ منحنی تغییرات این کمیت را برای مس در گستره‌ای از دما نشان می‌دهد. رابطهٔ میان دما و مقاومت ویژهٔ مس ـ و به طور کلی برای فلزات ـ در گسترهٔ وسیعی از دما تقریباً خطی است. در این مورد می‌توان از یک تقریب آروینی استفاده کرد و رابطهٔ خطی زیر را که برای اغلب مقاصد مهندسی مناسب است، نوشت:

$$\rho - \rho_{\circ} = \rho_{\circ}\alpha(T - T_{\circ}) \qquad (۱۷\text{-}۲۷)$$ ■

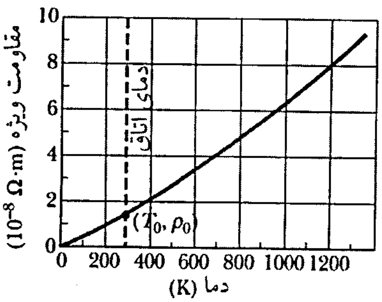
در اینجا $T_{\circ}$ دمای مرجع انتخاب شده و $\rho_{\circ}$ مقاومت ویژه در آن دماست. معمولاً $T_{\circ}=۲۹۳\text{K}$ (دمای اتاق) انتخاب می‌شود که در این دما برای مس، داریم $\rho_{\circ} = ۱٫۶۹\times۱۰^{-۸}\,\Omega.\text{m}$

در معادلهٔ ۲۷-۱۷، چون دما به صورت اختلاف وارد می‌شود، استفاده از مقیاس‌های دمایی سلسیوس یا کلوین در این معادله تفاوتی ندارد، زیرا اندازهٔ درجه‌های این مقیاس‌ها با هم یکی است. کمیت α در معادلهٔ ۲۷-۱۷ ضریب دمایی مقاومت ویژه نام دارد و طوری انتخاب می‌شود که در گسترهٔ دماهای انتخاب شده معادله با تجربه کاملاً سازگار باشد. در جدول ۲۷-۱ مقدار α برای برخی فلزات درج شده است.

کشتی هوایی هیندن بورگ

هنگامی که کشتی هوایی (زیپلین)[1] هیندن بورگ[2] برای فرود آمدن آماده می‌شد، طناب‌های متصل به آن به سوی خدمهٔ زمینی رها شدند. بر اثر بارش باران، طناب‌ها خیس شدند (و در نتیجه قابلیت رسانایی جریان الکتریکی را پیدا کردند). در این شرایط، طناب‌های متصل به چارچوب فلزی کشتی هوایی آن را بـه «زمین» وصل کردند؛ یعنی، طناب‌های خیس یک مسیر رسانا در بین چارچوب و زمین تشکیل دادنـد و پتانسیل الکتریکی چارچوب را با پتانسیل زمین یکسان کردند. این امر سبب شد بدنهٔ بیرونی کشتی هوایی بـه زمین وصل شود. اما هیندن بورگ نخستین کشتی هوایی‌ای بود که بدنهٔ بیرونی آن با مادهٔ درزگیری با مقاومت ویژهٔ الکتریکی زیاد رنگ شده بود. بنابراین، پتانسیل این ساختار با پتانسیل الکتریکی جوّ واقع در محل کشتی به ارتفاع تقریبی ۴۳ متر، برابر می‌شد. در این رگبار پتانسیل جوّ نسبت به پتانسیل سطح زمین زیاد بود.

کشیدن طناب‌ها ظاهراً به یکی از مخزن‌های هیدروژن آسیب وارد می‌کند و هیدروژن در بین مخزن و بدنهٔ بیرونی کشتی هوایی رها می‌شود و لرزش‌هایی در بدنهٔ بیرونی کشتی ایجاد می‌کند. در این حالت، وضعیت خطرناکی پیش آمده بود: بدنهٔ کشتی با آب باران رسانا خیس شده بود و پتانسیل آن با پتانسیل چارچوب کشتی تفاوت زیادی داشت. ظاهراً بار الکتریکی در طول بدنهٔ خیس کشتی جاری می‌شود و سپس جرقه‌ای از درون هیدروژن رها شده به چارچوب فلزی کشتی هوایی می‌رسد و هیدروژن را شعله‌ور می‌کند. این شعله‌ور شدن به سرعت باعث آتش گرفتن مخازن هیدروژن در کشتی می‌شود و کشتی سقوط می‌کند. اگر مادهٔ درزگیر در روی بدنهٔ بیرونی هیندن بورگ مقاومت ویژهٔ کمتری می‌داشت (مانند کشتی‌های هـوایی قبلی و بـعدی) احتمالاً این فاجعه برای هیندن بورگ رخ نمی‌داد.



شکل ۲۷ـ۱۰ منحنی تغییرات مقاومت ویژهٔ مس برحسب دما. خال روی منحنی، نقطهٔ مرجع مناسب در دمای اتاق $T_0 = 293\,K$ و مقاومت ویژهٔ $\rho_0 = 1.69\times10^{-8}\,\Omega.m$ را نشان می‌دهد.

مسألهٔ نمونهٔ ۲۷ـ۴

ابعاد یک قطعه آهن مستطیل شکل $1.2cm\times1.2cm\times15cm$ است. بین هر دو وجه موازی این قطعه یک اختلاف پتانسیل اعمال می‌کنیم. هر یک از وجه‌ها یک سطح هم پتانسیل هستند (چنانکه در شکل ۲۷ـ۸ ب دیده می‌شود). مطلوب است تعیین مقاومت الکتریکی این قطعه، وقتی کـه دو وجه موازی سطح‌های، (۱) مربع شکل (با ابعاد $1.2cm\times1.2cm$) و (۲) مستطیل شکل (با ابعاد $1.2cm\times15cm$) باشند.

حل: در اینجا **نکتهٔ کلیدی** این است که مقاومت یک شیء R، به چگونگی اعمال پتانسیل الکتریکی به آن بستگی دارد. این مقاومت طبق معادلهٔ ۲۷ـ۱۶ $(R=\rho L/A)$ به نسبت L/A بستگی دارد، که در آن A مساحت سطح‌هایی است که به آنها پتانسیل اعمال می‌شود و L فاصلهٔ میان این سطح‌هاست. در آرایش ۱، داریم

$$A = (1.2cm)^2 = 1.44\times10^{-4}m^2 \quad و \quad L = 15cm = 0.15m$$

با جانشانی این مقادیر و مقدار ρ از جدول ۲۷ـ۱ در معادلهٔ ۲۷ـ۱۶، برای آرایش ۱، داریم

$$R = \rho\frac{L}{A} = \frac{(9.68\times10^{-8}\Omega.m)(0.15m)}{1.44\times10^{-4}m^2} \Rightarrow$$

$$R = 1.0\times10^{-4}\Omega = 100\mu\Omega \qquad \text{(پاسخ)}$$

به همین ترتیب، برای آرایش ۲، داریم

$$A = (1.2cm)(15cm) = 1.80\times10^{-3}m^2 \quad و \quad L = 1.2cm$$

با جانشانی این مقادیر، خواهیم داشت

$$R = \rho\frac{L}{A} = \frac{(9.68\times10^{-8}\Omega.m)(1.2\times10^{-2}m)}{1.80\times10^{-3}m^2} \Rightarrow$$

$$R = 6.5\times10^{-7}\Omega = 0.65\mu\Omega \qquad \text{(پاسخ)}$$

۲۷ـ۵ قانون اهم

همان طور که در بخش ۲۷ـ۴ دیدیم، مقاومت الکتریکی، یک رسانای با مقاومت ویژهٔ معین است. مقدار مقاومت به بزرگی و جهت (قطبیت) اختلاف پتانسیل اعمال شده بستگی ندارد. اما وسایل رسانایی وجـود دارند که مقاومت آنها برحسب اختلاف پتانسیل اعمال شده تغییر می‌کند.

شکل ۲۷ـ۱۱ الف، چگونگی تفاوت میان چنین وسایلی را نشان می‌دهد. در این مدار اختلاف پتانسیل V

---

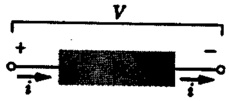
1. Zeppelin
2. Hindenburg

به دو سر وسیلهٔ الکتریکی مورد آزمایش اعمال و جریان گذرنده از این وسیله i، در حین تغییر کردن بزرگی و قطبیت V اندازه‌گیری می‌شود. علامت قطبیت V به طور اختیاری هنگامی مثبت در نظر گرفته می‌شود که پتانسیل پایانهٔ چپ وسیله بالاتر از پتانسیل پایانهٔ راست باشد. جهت جریان حاصل (از چپ به راست) به اختیار با علامت مثبت نشان داده می‌شود. پس، علامت قطبیت معکوس V (وقتی پتانسیل پایانهٔ راست بالاتر است)، منفی است و جریان حاصل از آن با علامت منفی مشخص می‌شود.

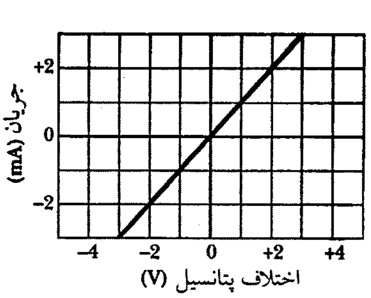
شکل ۲۷-۱۱ ب، نمودار تغییرات i برحسب V را برای یک وسیلهٔ الکتریکی نشان می‌دهد. این نمودار خط راستی است که از مبداء مختصات می‌گذرد. در نتیجه، نسبت i/V (که شیب خط راست است) برای تمام مقادیر V ثابت است. منظور این است که مقاومت $R=V/i$ وسیله الکتریکی از بزرگی و قطبیت اختلاف پتانسیل اعمال شدهٔ V، مستقل است.

شکل ۲۷-۱۱ پ، نمودار تغییرات رسانای دیگری را نشان می‌دهد. در این وسیله جریان فقط موقعی برقرار می‌شود که قطبیت V مثبت و اختلاف پتانسیل اعمال شده از حدود ۱٫۵V بیشتر باشد. هنگامی که جریان برقرار است، رابطهٔ میان i و V خطی نیست و به مقدار اختلاف پتانسیل اعمال شدهٔ V، بستگی دارد.

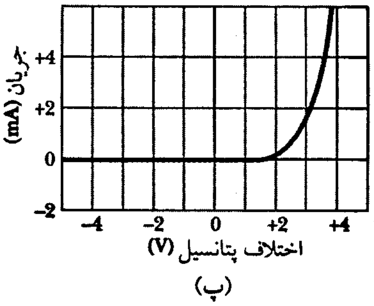
تفاوت میان دو نوع وسیله در این است که یکی از قانون اهم[1] پیروی می‌کند اما دیگری پیروی نمی‌کند.



(الف)



(ب)



(پ)

شکل ۲۷-۱۱ (الف) با اعمال کردن اختلاف پتانسیل V به دو سر یک وسیلهٔ الکتریکی در آن جریان i برقرار می‌شود. (ب) نمودار تغییرات جریان i برحسب اختلاف پتانسیل اعمال شدهٔ V به دو سر وسیله‌ای با مقاومت ۱۰۰۰Ω. (پ) همان نمودار وقتی که وسیلهٔ الکتریکی یک دیود پیوندی pn نیمرساناست.

◄ قانون اهم تأکیدی است بر اینکه جریان گذرنده از یک وسیلهٔ الکتریکی همیشه با اختلاف پتانسیل اعمال شده به دو سر آن نسبت مستقیم دارد.

(این تأکید فقط در موارد معینی درست است؛ هر چه باشد باز هم به دلایل تاریخی، اصطلاح «قانون» دربارهٔ آن به کار می‌رود). وسیلهٔ شکل ۲۷-۱۱ ب ـ، که یک مقاومت ۱۰۰۰ اهمی است ـ از قانون اهم پیروی می‌کند، اما وسیلهٔ شکل ۲۷-۱۱ پ ـ، که یک، دیود پیوندی pn است ـ از قانون اهم پیروی نمی‌کند.

◄ یک رسانا هنگامی از قانون اهم پیروی می‌کند که مقاومت آن از بزرگی و قطبیت اختلاف پتانسیل اعمال شده مستقل باشد.

میکروالکترونیک جدید ـ و در نتیجه بسیاری از جنبه‌های تمدن صنعتی عصر حاضر ـ تقریباً وابسته به تمام وسایلی است که از قانون اهم پیروی نمی‌کنند. مثلاً، ماشین حساب پر از انواع این وسایل است.

گفتن این موضوع که معادلهٔ $V=iR$ بیان کنندهٔ قانون اهم است اشتباه است و چنین نیست! این معادله، معادلهٔ تعریف کنندهٔ مقاومت است و برای تمام وسایل رسانا به کار می‌رود، خواه از قانون اهم پیروی بکنند یا پیروی نکنند. هرگاه اختلاف پتانسیل دو سر یک وسیلهٔ الکتریکی V، و جریان گذرنده از آن i، را اندازه بگیریم مقاومت آن وسیله، حتی اگر یک دیود پیوندی pn هم باشد، به ازای آن مقدار V، برابر با $R=V/i$ است. اما اساس قانون اهم این است که نمودار تغییرات i برحسب V به صورت یک خط است؛ یعنی، R از V مستقل است.

قانون اهم را وقتی به شکلی کلی‌تر می‌توان بیان کرد که به جای وسایل رسانا مواد رسانا را در نظر بگیریم. در این صورت، رابطهٔ مناسب برای این کار معادلهٔ ۲۷-۱۱ ($\vec{E} = \rho\vec{J}$) است، که مانند معادلهٔ $V=iR$ است.

◄ یک مادهٔ رسانا وقتی از قانون اهم پیروی می‌کند که مقاومت ویژهٔ آن از بزرگی و جهت میدان الکتریکی اعمال شده مستقل باشد.

1. Ohm

تمام مواد همگن، چه رسانا باشند، مانند مس، و چه نیمرسانا باشند، مانند سیلیسیوم خالص یا سیلیسیوم آلاییده با ناخالصی‌های خاص، در گستره‌ای از مقادیر میدان الکتریکی از قانون اهم پیروی می‌کنند. اما اگر میدان بسیار قوی باشد، در تمام حالت‌ها نسبت به قانون اهم انحراف به وجود می‌آید.

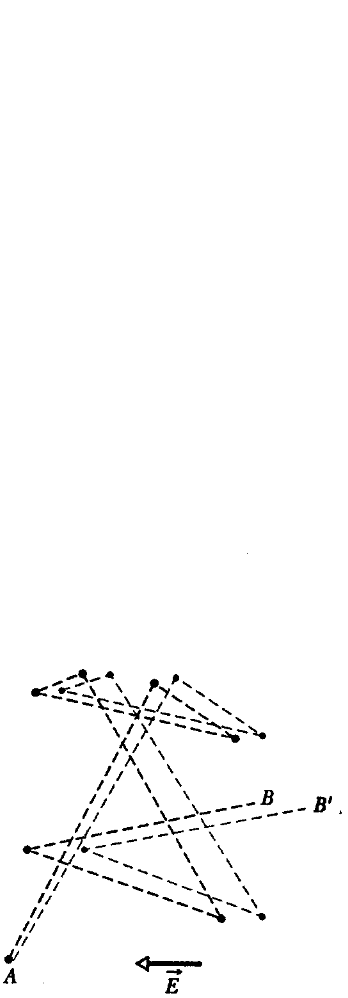
خودآزمایی ۴: در جدول زیر، جریان i (برحسب آمپر) گذرنده از دو وسیلهٔ الکتریکی به ازای چند اختلاف پتانسیل V (برحسب ولت) درج شده است. با استفاده از این داده‌ها، معین کنید کدام وسیله از قانون اهم پیروی نمی‌کند.

وسیلهٔ ۱		وسیلهٔ ۲	
V	i	V	i
۲٫۰۰	۴٫۵۰	۲٫۰۰	۱٫۵۰
۳٫۰۰	۶٫۷۵	۳٫۰۰	۲٫۲۰
۴٫۰۰	۹٫۰۰	۴٫۰۰	۲٫۸۰

۲۷ـ۶ دیدگاه میکروسکوپیک قانون اهم

برای درک این نکته که چرا برخی مواد خاص از قانون اهم پیروی می‌کنند، باید فرایند رسانش را در سطح اتمی به دقت مطالعه کرد. در اینجا فقط رسانش در فلزاتی مانند مس را در نظر می‌گیریم و توجه خود را به تحلیل مدل الکترون آزاد معطوف می‌کنیم. طبق این مدل فرض می‌شود که الکترون‌های رسانش در فلز، مانند مولکول‌های گاز موجود در یک مخزن بسته، در سرتاسر حجم فلز آزادانه حرکت می‌کنند. در ضمن، فرض می‌کنیم الکترون‌ها نه با هم، بلکه فقط با اتم‌های فلز برخورد می‌کنند.

بر پایهٔ فیزیک کلاسیک، الکترون‌ها باید دارای یک توزیع تندی ماکسولی شبیه توزیع تندی مولکول‌ها در یک گاز باشند. در این نوع توزیع تندی متوسط الکترون‌ها با جذر دمای مطلق متناسب است (بخش ۲۰ـ۷، مبانی فیزیک جلد دوم). اما حرکت الکترون‌ها تابع قانون‌های فیزیک کلاسیک نیست بلکه از قانون‌های فیزیک کوانتومی پیروی می‌کند. چنانکه معلوم شده است، فرض بسیار نزدیک به واقعیت کوانتومی این است که الکترون‌های رسانش در فلز با یک تندی مؤثر v_{eff} حرکت می‌کنند و این تندی از دما مستقل است. برای مس، $v_{\text{eff}}\approx ۱٫۶\times۱۰^{۶}\,\text{m/s}$.



شکل ۲۷ـ۱۲ خط‌های پررنگ مسیر الکترونی را نشان می‌دهند که در حین حرکت از A تا B، شش برخورد انجام داده است. خط‌های کم‌رنگ نشان می‌دهند که مسیر الکترون با حضور میدان الکتریکی $\vec{E}$ ممکن است چگونه باشد. به حرکت سوقی پایای الکترون در جهت $-\vec{E}$ توجه کنید. (در واقع، خط‌های کم‌رنگ باید اندکی خمیده باشند تا در فاصلهٔ میان برخوردها مسیرهای سهموی الکترون‌ها تحت اثر میدان الکتریکی را نشان دهند.)

هرگاه به یک نمونهٔ فلزی میدان الکتریکی اعمال شود، الکترون‌ها حرکت کاتوره‌ای خود را به تدریج اصلاح می‌کنند و به آرامی ـ در خلاف جهت میدان ـ با تندی متوسط v_d پیش می‌روند. همان طور که در مسألهٔ نمونهٔ ۲۷ـ۳ دیدیم، در یک رسانای فلزی نوعی تندی سوق در حدود $۵\times۱۰^{-۷}\,\text{m/s}$ است، که از تندی مؤثر ($۱٫۶\times۱۰^{۶}\,\text{m/s}$) به مراتب کمتر است. شکل ۲۷ـ۱۲، رابطهٔ میان این دو تندی را نشان می‌دهد. در این شکل خط‌های پررنگ مسیر حرکت کتره‌ای ممکن پیموده شده توسط الکترون در غیاب میدان الکتریکی اعمال شده را نشان می‌دهند؛ الکترون در حال حرکت از A تا B در مسیر خود شش برخورد انجام می‌دهد. خط‌های کم‌رنگ نشان می‌دهند که در صورت اعمال شدن میدان الکتریکی $\vec{E}$ همین مسیرها ممکن است چگونه باشند. چنانکه در شکل می‌بینیم، الکترون‌ها پیوسته به‌سمت راست سوق پیدا می‌کنند و حرکت خود را به‌جای B، در نقطهٔ B' پایان می‌دهند. در ترسیم شکل ۲۷ـ۱۲ فرض شده است که تندی سوق برابر است با $v_d\approx ۰٫۰۲v_{\text{eff}}$، اما در واقع این تندی $v_d\approx ۱۰^{-۱۳}v_{\text{eff}}$ است و حرکت سوقی نمایش داده شده در شکل بسیار اغراق‌آمیز است.

بنابراین، حرکت الکترون‌های رسانش در میدان الکتریکی $\vec{E}$، ترکیبی از حرکت ناشی از برخوردهای کتره‌ای و حرکت ناشی از $\vec{E}$ است. هرگاه تمام الکترون‌های آزاد را در نظر بگیریم، حاصل متوسط حرکت کتره‌ای آنها صفر است و هیچ سهمی در تندی سوق ندارد. پس، تندی سوق فقط از اثر میدان الکتریکی روی

الکترون‌ها ناشی می‌شود.

هرگاه الکترونی به جرم m در یک میدان الکتریکی به بزرگی E قرار گیرد، شتابی پیدا می‌کند که از قانون دوم نیوتون به دست می‌آید:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{eE}{m} \quad (۲۷\text{-}۱۸)$$

ماهیت برخوردهای الکترون‌های رسانش به گونه‌ای است که پس از هر برخورد گویی الکترون تندی سوق پیشی خود را کاملاً از یاد می‌برد. آنگاه، هر الکترون پس از برخورد با تندی سوق تازه و در جهتی کتره‌ای حرکت را آغاز می‌کند. در بازهٔ زمانی متوسط میان برخوردها، τ، الکترون به طور متوسط تندی سوق $v_d=a\tau$ را به دست می‌آورد. علاوه بر این، اگر تندی‌های سوق تمام الکترون‌ها را در هر لحظه اندازه‌گیری کنیم، متوجه خواهیم شد که تندی سوق متوسط آنها نیز $a\tau$ است. بنابراین، در هر لحظه، به طور متوسط، الکترون‌ها دارای تندی سوق $v_d = a\tau$ خواهند بود. در نتیجه، با استفاده از معادلهٔ ۲۷ـ۱۸، داریم

$$v_d = a\tau = \frac{eE\tau}{m} \quad (۲۷\text{-}۱۹)$$

از ترکیب این معادله با معادلهٔ ۲۷ـ۷ ($\vec{J}=ne\vec{v}_d$) در شکل بزرگی کمیت‌ها، خواهیم داشت

$$v_d = \frac{J}{ne} = \frac{eE\tau}{m}$$

این نتیجه را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$E = \left(\frac{m}{e^۲n\tau}\right)J$$

از مقایسهٔ این معادله با معادلهٔ ۲۷ـ۱۱ ($\vec{E} = \rho\vec{J}$) در شکل بزرگی کمیت‌ها، داریم

$$\rho = \frac{m}{e^۲n\tau} \quad (۲۷\text{-}۲۰)$$

معادلهٔ ۲۷ـ۲۰ می‌تواند شکل گویایی از پیروی فلزات از قانون اهم باشد، به شرط آنکه بتوانیم نشان دهیم که مقاومت ویژهٔ ρ ثابت و مستقل از شدت میدان الکتریکی اعمال شدهٔ $\vec{E}$ است. چون n، m و e ثابت‌اند، کافی است متقاعد شویم که τ، زمان متوسط (یا زمان آزاد میانگین) میان برخوردها، ثابت است و به شدت میدان الکتریکی اعمال شده بستگی ندارد. در واقع، τ را می‌توان ثابت در نظر گرفت، زیرا v_d، تندی سوق ناشی از میدان از تندی مؤثر v_{eff} آن قدر کوچکتر است که تندی الکترون‌ها ـ و در نتیجه τ ـ به سختی تحت تأثیر میدان قرار می‌گیرد.

مسألهٔ نمونهٔ ۲۷ـ۵

(الف) زمان آزاد میانگین بین برخوردها τ، برای الکترون‌های رسانش در مس چقدر است؟

حل: در اینجا **نکتهٔ کلیدی** این است که زمان آزاد میانگین τ در مس، تقریباً ثابت است و به ویژه، به میدان الکتریکی که ممکن است به نمونهٔ مسی اعمال شود، بستگی ندارد. بنابراین، لازم نیست برای میدان الکتریکی اعمال شده مقدار خاصی در نظر گرفته شود. اما چون مقاومت ویژهٔ مس ρ، تحت اثر یک میدان الکتریکی به τ بستگی دارد، زمان آزاد میانگین را می‌توان با استفاده از معادلهٔ ۲۷ـ۲۰ ($\rho=m/e^۲n\tau$) به دست آورد. از این معادله نتیجه می‌گیریم که:

$$\tau = \frac{m}{ne^۲\rho}$$

مقدار n، تعداد الکترون‌های رسانش در یکای حجم مس را از مسألهٔ نمونهٔ ۲۷ـ۳ و مقدار ρ را از جدول ۲۷ـ۱ می‌گیریم. بنابراین، مخرج رابطهٔ بالا برابر است با:

$$(۸٫۴۹\times۱۰^{۲۸}\text{m}^{-۳})(۱٫۶\times۱۰^{-۱۹}\text{C})^۲(۱٫۶۹\times۱۰^{-۸}\Omega.\text{m})$$
$$= ۳٫۶۷\times۱۰^{-۱۷}\text{C}^۲.\Omega/\text{m}^۲ = ۳٫۶۷\times۱۰^{-۱۷}\text{kg/s}$$

در اینجا یکاها به صورت زیر به هم تبدیل شده‌اند

$$\frac{\text{C}^۲.\Omega}{\text{m}^۲} = \frac{\text{C}^۲.\text{V}}{\text{m}^۲.\text{A}} = \frac{\text{C}^۲.\text{J/C}}{\text{m}^۲.\text{C/s}} = \frac{\text{kg.m}^۲/\text{s}^۲}{\text{m}^۲/\text{s}} = \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

با استفاده از این نتیجه‌ها و جانشانی جرم الکترون m، داریم

$$\tau = \frac{۹٫۱\times۱۰^{-۳۱}\text{kg}}{۳٫۶۷\times۱۰^{-۱۷}\text{kg/s}} \Rightarrow$$

(پاسخ) $\tau = ۲٫۵ \times ۱۰^{-۱۴}\mathrm{s}$

(ب) در یک رسانا مسیر آزاد میانگین الکترون‌های رسانش λ، مسافت متوسطی است که به وسیلهٔ یک الکترون در بین برخوردها پیموده می‌شود. (این تعریف شبیه تعریف مسیر آزاد میانگین مولکول‌ها در یک گاز، در بخش ۲۰ـ۶ است). مقدار λ برای الکترون‌های رسانش در مس، با این فرض که تندی مؤثر آنها برابر است با $v_{\mathrm{eff}}=۱٫۶\times۱۰^{۶}\mathrm{m/s}$، چقدر است؟

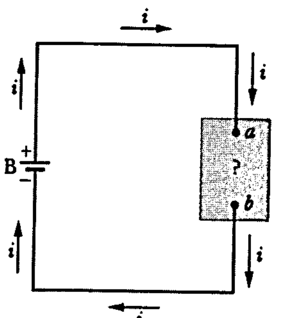
حل: در اینجا **نکتهٔ کلیدی** این است که d، مسافت پیموده شده توسط یک ذره در مدت زمان معین t و با تندی v برابر است با $d=vt$. برای الکترون‌ها در مس، داریم

$$\lambda = v_{\mathrm{eff}}\tau = (۱٫۶\times۱۰^{۶}\mathrm{m/s})(۲٫۵\times۱۰^{-۱۴}\mathrm{s}) \Rightarrow$$

(پاسخ) $\lambda = ۴۰\mathrm{nm}$

این مسافت در حدود ۱۵۰ برابر فاصلهٔ میان نزدیک‌ترین اتم‌های مجاور در شبکهٔ بلوری مس است. بنابراین، هر الکترون رسانش پیش از برخورد نهایی با یک اتم مس، به طور متوسط، از کنار چندین اتم دیگر می‌گذرد.

۷ـ۲۷ توان در مدارهای الکتریکی



شکل ۲۷ـ۱۳ باتری B در مداری شامل یک وسیلهٔ رسانای نامعلوم جریان i را برقرار می‌کند.

شکل ۲۷ـ۱۳، مداری شامل باتری B را نشان می‌دهد که توسط سیم‌هایی با مقاومت ناچیز به یک وسیلهٔ رسانای نامعلوم وصل شده است. این وسیله می‌تواند یک مقاومت، یک باتری انبارشی (یک باتری باردار شدنی)، یک موتور، یا هر وسیلهٔ الکتریکی دیگر، باشد. باتری اختلاف پتانسیل V را بین دو پایانهٔ خود، و در نتیجه بین دو پایانهٔ وسیلهٔ نامعلوم (از طریق سیم‌های رابط) که در آن پتانسیل در پایانهٔ a بالاتر از پتانسیل در پایانهٔ b است، نگه می‌دارد.

چون در بین پایانه‌های باتری یک مسیر رسانای بیرونی وجود دارد و باتری هم یک اختلاف پتانسیل ایجاد می‌کند، در مدار، در جهت پایانهٔ a به طرف پایانهٔ b، جریان پایای i برقرار می‌شود. مقدار بار dq که در بازهٔ زمانی dt در بین پایانه‌ها جاری می‌شود، برابر است با idt. این بار dq تحت اثر افت پتانسیل V حرکت می‌کند و در نتیجه، انرژی پتانسیل الکتریکی آن به مقدار زیر کاهش می‌یابد:

$$dU = dq\, V = i\, dt\, V$$

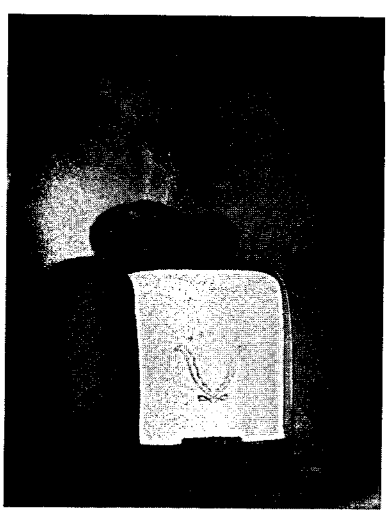
بنابه اصل پایستگی انرژی، کاهش انرژی پتانسیل الکتریکی از a تا b با تبدیل شدن انرژی به صورتی دیگر همراه است. توان الکتریکی مربوط به انتقال انرژی P، همان آهنگ انتقال انرژی dU/dt است، که برابر است با:

$$P = iV \quad \text{(آهنگ انتقال انرژی الکتریکی)} \qquad (۲۷\text{ـ}۲۱)$$

علاوه بر این، توان P، آهنگ انرژی منتقل شده از باتری به وسیلهٔ نامعلوم مدار نیز هست. اگر این وسیله یک موتور متصل به یک بار مکانیکی باشد، انرژی به صورت کار انجام شده روی بار منتقل می‌شود. اگر وسیله انباره‌ای باشد که باید باردار شود، این انرژی به انرژی شیمیایی ذخیره شده در باتری انبارشی تبدیل می‌شود. اگر وسیله یک مقاومت باشد، انرژی به انرژی گرمایی درونی تبدیل می‌شود، که دمای مقاومت را بالا می‌برد.

یکای توان با استفاده از معادلهٔ ۲۷ـ۲۱، **ولت ـ آمپر** (با نماد V.A) است. می‌توان نشان داد که این یکا برابر با **وات** (با نماد W) است:

$$۱\mathrm{V.A} = (۱\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}})(۱\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}}) = ۱\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = ۱\mathrm{W}$$



سیم پیچه‌های درون یک دستگاه نان برشته کن، مقاومت قابل ملاحظه‌ای دارد. وقتی از این پیچه‌ها جریانی عبور می‌کند انرژی الکتریکی به انرژی گرمایی تبدیل می‌شود و دمای آنها را افزایش می‌دهد. در نتیجه، پیچه‌ها با گسیل داشتن پرتوهای فروسرخ و نورمرئی نان را برشته می‌کنند (یا می‌سوزانند).

موضوع حرکت الکترون با تندی سوق ثابت در درون یک مقاومت، شباهت زیادی با سقوط یک سنگ با تندی حد ثابت در درون آب دارد. در حین حرکت، انرژی جنبشی متوسط الکترون ثابت می‌ماند و کاهش انرژی پتانسیل الکتریکی به صورت انرژی گرمایی در مقاومت و محیط پیرامون ظاهر می‌شود. در مقیاس میکروسکوپی، این تبدیل انرژی ناشی از برخوردهای میان الکترون و مولکول‌های مادهٔ مقاومت است، که به افزایش دمای شبکهٔ مقاومت منجر می‌شود. بنابراین، انرژی مکانیکی تبدیل شده به انرژی گرمایی تلف می‌شود، زیرا این تبدیل انرژی نمی‌تواند در جهت عکس صورت گیرد.

برای یک مقاومت یا وسیلهٔ دیگری که دارای مقاومت R است، معادله‌های ۲۷ـ۸ ($R=V/i$) و ۲۷ـ۲۱ را می‌توان با هم ترکیب کرد تا آهنگ اتلاف انرژی الکتریکی ناشی از وجود مقاومت به دست آید:

$$P = i^{2}R \quad \text{(اتلاف مقاومتی توان)} \qquad (۲۷\text{ـ}۲۲)$$

یا

$$P = \frac{V^2}{R} \qquad \text{(اتلاف مقاومتی توان)} \qquad (۲۷\text{-}۲۳)$$ ■

یادآوری: باید به تفاوت این معادله‌ها با معادلهٔ ۲۷-۲۱ توجه کرد: معادلهٔ $P=iV$ در مورد انرژی الکتریکی تبدیل شده به انواع انرژی‌ها به کار می‌رود، در حالی که معادله‌های $P=i^2R$ و $P=V^2/R$ فقط در مورد تبدیل انرژی پتانسیل الکتریکی به انرژی گرمایی در یک وسیلهٔ مقاومت‌دار به کار می‌روند.

خودآزمایی ۵: با اعمال کردن اختلاف پتانسیل V به دو سر وسیله‌ای با مقاومت R، در آن وسیله جریان i برقرار می‌شود. تغییرات زیر را با توجه به تغییر آهنگ تبدیل انرژی الکتریکی به انرژی گرمایی در مقاومت، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید: (الف) بدون تغییر R، V دو برابر می‌شود، (ب) بدون تغییر R، i دو برابر می‌شود، (پ) بدون تغییر V، R دو برابر می‌شود، (ت) بدون تغییر i، R دو برابر می‌شود.

مسألهٔ نمونهٔ ۲۷-۶

سیم گرمکنی از آلیاژ نیکل-کروم-آهن به نام نیکروم، با مقاومت $R=۷۲\Omega$، در دست است. در هر یک از حالت‌های زیر انرژی با چه آهنگی تلف می‌شود؟ (۱) اختلاف پتانسیل ۱۲۰V به دو سر طول کامل سیم اعمال می‌شود. (۲) سیم را دو نیم می‌کنیم و به دو سر هر یک از نیمه‌ها اختلاف پتانسیل ۱۲۰V را اعمال می‌کنیم.

حل: نکتهٔ کلیدی این است که جریان الکتریکی در یک سیم مقاومت‌دار باعث تبدیل انرژی الکتریکی به انرژی گرمایی می‌شود؛ آهنگ تبدیل (اتلاف) انرژی از معادله‌های ۲۷-۲۱ تا ۲۷-۲۳ به دست می‌آید. چون پتانسیل V و مقاومت R در دست است، با استفاده از معادلهٔ ۲۷-۲۳ برای حالت ۱، داریم

$$P = \frac{V^2}{R} = \frac{(۱۲۰\text{V})^2}{۷۲\Omega} \Rightarrow$$

$$P = ۲۰۰\text{W} \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

در حالت ۲، مقاومت هر نیمهٔ سیم برابر است با $(۷۲\Omega)/۲=۳۶\Omega$. پس، آهنگ اتلاف انرژی برای هر نیمهٔ سیم برابر است با:

$$P' = \frac{(۱۲۰\text{V})^2}{۳۶\Omega} = ۴۰۰\text{W}$$

و برای دو نیمهٔ سیم، داریم

$$P = ۲P' = ۸۰۰\text{W} \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

این مقدار چهار برابر آهنگ اتلاف انرژی در طول کامل سیم است. بنابراین، ممکن است نتیجه بگیرید که با خریدن یک پیچهٔ گرمکن، نصف کردن آن و وصل کردن دو نیمهٔ سیم به برق می‌توانید گرمای حاصل را چهار برابر کنید. چرا این کار نامعقول است؟ (در این صورت، جریان الکتریکی در پیچه چقدر خواهد شد؟)

۲۷-۸ نیمرساناها

وسایل نیمرسانا هستهٔ اصلی انقلاب میکروالکترونیک را در عصر اطلاعات تشکیل می‌دهند. در جدول ۲۷-۲ خواص سیلیسیوم، نیمرسانای نوعی، با خواص مس، رسانای فلزی نوعی، مقایسه شده است. چنانکه می‌بینیم، سیلیسیوم در مقایسه با مس، حامل‌های بار کمتری دارد، مقاومت ویژه‌اش بیشتر است، و دارای ضریب دمایی مقاومت ویژهٔ بزرگ و منفی است. بنابراین، در حالی که با بالا رفتن دما مقاومت ویژهٔ مس افزایش پیدا می‌کند، مقاومت ویژهٔ سیلیسیوم خالص کاهش می‌یابد.

مقاومت ویژهٔ سیلیسیوم خالص آن‌قدر زیاد است که سیلیسیوم در عمل یک عایق است و از این رو، در مدارهای میکروالکترونیک مستقیماً مورد استفاده قرار نمی‌گیرد. اما با افزودن مقدار کمی از اتم‌های «ناخالصی» خاص به طریق کنترل شده، می‌توان مقاومت ویژهٔ آن را در فرایندی به نام آلایش تا حد زیادی کاهش داد. جدول ۲۷-۱ مقادیر نوعی مقاومت ویژهٔ سیلیسیوم را پیش و پس از آلاییده شدن با دو ناخالصی متفاوت به‌دست می‌دهد.

تفاوت میان مقاومت ویژه (و در نتیجه میان رسانندگی ویژه) در نیمرساناها، عایق‌ها و رساناهای فلزی را می‌توان به طور تخمینی براساس انرژی‌های الکترون‌های آنها توضیح داد (برای تشریح دقیق‌تر این موضوع باید از فیزیک کوانتومی استفاده کنیم). در یک رسانای فلزی مانند سیم مسی اغلب الکترون‌ها در میان

مولکول‌ها در جای خود به سختی مقیدند؛ برای آزاد کردن این الکترون‌ها، به گونه‌ای که بتوانند با حرکت کردن در یک جریان الکتریکی شرکت کنند، انرژی زیادی لازم است. با وجود این، بعضی الکترون‌ها، در حالت کلی، با یک پیوند شُل در جای خود قرار دارند و برای آزاد شدن به مقدار اندکی انرژی نیازمندند. انرژی گرمایی می‌تواند این انرژی را تأمین کند، همان‌طور که میدان الکتریکی اعمال شده به دو سر رسانا هم می‌تواند چنین کند. میدان الکتریکی نه تنها این الکترون‌های با پیوند شُل را آزاد می‌کند، بلکه آنها را در طول سیم به جلو می‌راند؛ بنابراین، میدان الکتریکی می‌تواند در رسانا جریانی برقرار کند.

در عایق‌ها الکترون‌ها برای آزاد شدن به انرژی خیلی بیشتری نیاز دارند تا بتوانند در ماده حرکت کنند. انرژی گرمایی و نیز هیچ میدان الکتریکی اعمال شده به عایق‌ها، نمی‌تواند این انرژی را به قدر کافی تأمین کند. بنابراین، هیچ الکترونی وجود ندارد که بتواند در مادهٔ عایق حرکت کند. در نتیجه، حتی با اعمال کردن میدان الکتریکی هم هیچ جریانی برقرار نمی‌شود.

نیمرسانا مانند عایق است، با این تفاوت که انرژی لازم برای آزاد کردن الکترون‌ها چندان زیاد نیست. نکتهٔ مهمتر این است که فرایند آلایش می‌تواند باعث تولید بیشتر الکترون‌ها یا حامل‌های بار مثبت شود. چون این ذرات در درون ماده چندان مقید نیستند به آسانی به حرکت در می‌آیند. علاوه بر این، با کنترل کردن میزان آلایش در یک نیمرسانا می‌توان چگالی حامل‌های بار شرکت کننده در برقراری جریان، و در نتیجه، برخی خواص الکتریکی نیمرسانا را کنترل کرد. اغلب وسایل نیمرسانا، مانند ترانزیستورها و دیودهای پیوندی، با آلاییدن انتخابی ناحیه‌های مختلف سیلیسیوم با انواع اتم‌های ناخالصی، ساخته می‌شوند.

اکنون، به معادلهٔ ۲۷-۲۰ در مورد مقاومت ویژهٔ یک رسانا، بر می‌گردیم:

$$\rho = \frac{m}{e^{2} n \tau} \qquad (۲۴\text{-}۲۷)$$

که در آن n تعداد حامل‌های بار در یکای حجم و τ زمان میانگین بین برخوردهای حامل‌های بار است. (این معادله را برای رساناها به دست آوردیم، اما در مورد نیمرساناها هم صدق می‌کند). اکنون، می‌خواهیم ببینیم متغیرهای n و τ با افزایش یافتن دما چگونه تغییر می‌کنند.

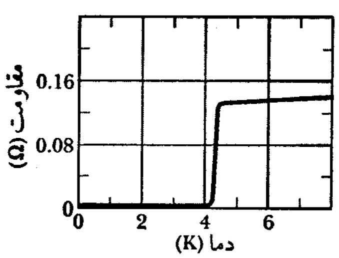
در رساناها، n بزرگ و مقدار آن با تغییر دما تقریباً ثابت است. دلیل افزایش یافتن مقاومت ویژهٔ فلزات برحسب دما (شکل ۲۷-۱۰) مربوط به افزایش یافتن آهنگ برخوردهای حامل‌های بار است، که بنا به معادلهٔ ۲۷-۲۴ باعث کاهش یافتن زمان میانگین بین برخوردها τ، می‌شود.

در نیمرساناها، n کوچک است اما به خاطر ازدیاد تعداد حامل‌های بار در اثر اغتشاش گرمایی، مقدار n با افزایش دما به سرعت زیاد می‌شود. این خاصیت، با افزایش یافتن دما مقاومت ویژه را کاهش می‌دهد، که این موضوع در جدول ۲۷-۲ با ضریب دمایی مقاومت ویژهٔ منفی برای سیلیسیوم نشان داده شده است. این افزایش یافتن آهنگ برخورد با بالا رفتن دما در فلزات، در نیمرساناها هم صورت می‌گیرد، اما این اثر با افزایش یافتن سریع تعداد حامل‌های بار نمود پیدا نمی‌کند.

جدول ۲۷-۲ برخی خواص الکتریکی مس و سیلیسیوم*

خاصیت	مس	سیلیسیوم
نوع ماده	فلز	نیمرسانا
چگالی حامل‌های بار، m^{-3}	۹×۱۰^{۲۸}	۱×۱۰^{۱۶}
مقاومت ویژه، $\Omega.m$	۲×۱۰^{-۸}	۳×۱۰^{۳}
ضریب دمایی مقاومت ویژه، K^{-1}	$+۴ \times ۱۰^{-۳}$	-۷۰×۱۰^{-۳}

* برای آسان شدن مقایسه، داده‌های جدول تا یک رقم با معنا گرد شده‌اند.



شکل ۲۷-۱۴ این نمودار نشان می‌دهد که مقاومت جیوه در دمای حدود ۴K به صفر می‌رسد.

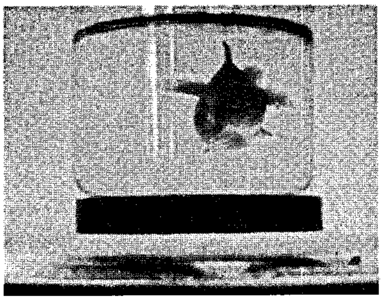
۲۷ـ۹ ابر رساناها

در سال ۱۹۱۱/۱۲۹۰، **کامرلینگ اونز**[1]، فیزیکدان هلندی، کشف کرد که مقاومت ویژهٔ جیوه در دماهای زیر ۴K به طور کامل از میان می‌رود (شکل ۲۷ـ۱۴). پدیدهٔ **ابر رسانایی**، در فنّاوری از توانایی گسترده‌ای برخوردار است، زیرا بر پایهٔ این پدیده بارهای الکتریکی می‌توانند بدون تلفات انرژی گرمایی از یک ابر رسانا عبور کنند. برای مثال، جریان تولید شده در یک حلقهٔ ابر رسانا، در غیاب باتری در مدار، به مدت چند سال بدون کاهش باقی مانده است. در واقع، الکترون‌های به وجود آورندهٔ جریان فقط در آغاز به یک نیرو و چشمهٔ انرژی نیاز دارند و پس از آن جریان هم‌چنان در مدار باقی می‌ماند.

پیش از سال ۱۹۸۶/۱۳۶۵ توسعهٔ فنّاورانه در زمینهٔ ابر رسانایی به خاطر هزینهٔ تولید دماهای بسیار پایین مورد نیاز برای دستیابی به خاصیت ابر رسانایی متوقف شده بود. در این سال مواد سرامیکی جدیدی کشف شدند که در دماهای بالاتر (و در نتیجه با هزینهٔ تولید کمتر) خاصیت ابر رسانایی پیدا کردند. کاربرد عملی وسایل ابر رسانا در دمای اتاق موضوعی است که در آیندهٔ نزدیک امکان‌پذیر است.

ابر رسانایی پدیده‌ای است که با رسانایی خیلی تفاوت دارد. در واقع، در حالی که بهترین رساناهای عادی، مانند نقره و مس، در هیچ دمایی ابر رسانا نمی‌شوند، ابر رساناهای سرامیکی جدید، هرگاه در دماهای نسبتاً پایین نباشند تا به حالت ابر رسانایی برسند، عایق‌های خوبی هم هستند.

دربارهٔ ابر رسانایی، یک توضیح این است که الکترون‌های تشکیل دهندهٔ جریان به صورت زوج‌های هماهنگ حرکت می‌کنند. یکی از الکترون‌های این زوج در حین حرکت ممکن است ساختار مولکولی مادهٔ ابر رسانا را از نظر الکتریکی واپیچد و در پیرامون خود چگالی بارهای مثبت کوتاه عمر را افزایش دهد. بنا به این نظریه، هماهنگی میان الکترون‌ها مانع برخورد آنها با مولکول‌های ماده و در نتیجه باعث حذف شدن مقاومت الکتریکی می‌شود. این نظریه توجیه خوبی برای ابر رساناهای دمای پایین تا سال ۱۹۸۶/۱۳۶۵، نیز هست، اما به نظر می‌رسد که برای ابر رساناهای جدیدتر با دمای بالا، به نظریه‌های جدیدتری نیاز است.



تصویر آهن‌ربایی قرص مانند، که در بالای یک مادهٔ ابر رسانای سرد شده توسط نیتروژن مایع شناور مانده است. ماهی حوض در صدد شناور شدن است.

مرور و خلاصهٔ مطالب فصل

جریان **جریان الکتریکی** i در یک رسانا به صورت زیر تعریف می‌شود

$$i = \frac{dq}{dt} \qquad (۲۷\text{ـ}۱)$$

در اینجا dq مقدار بار الکتریکی (مثبت) است که در زمان dt از هر سطح مقطع فرضی رسانا عبور می‌کند. بنا به قرارداد، جهت جریان الکتریکی همان جهت حرکت حامل‌های بار مثبت است. یکای SI جریان الکتریکی **آمپر** (با نماد A) است: $1A = 1C/s$.

چگالی جریان رابطهٔ جریان (نرده‌ای) و **چگالی جریان** $\vec{J}$ (بردار) به‌صورت زیر است

$$i = \int \vec{J} \cdot d\vec{A} \qquad (۲۷\text{ـ}۴)$$

که در آن $d\vec{A}$ بردار عمود بر عنصر سطحی به مساحت dA است و انتگرال در روی هر سطح قطع کنندهٔ رسانا گرفته می‌شود. در هر نقطه از رسانا $\vec{J}$ برای بارهای مثبت همان جهت سرعت حرکت بارها را دارد و برای بارهای منفی در خلاف جهت حرکت است.

تندی سوق و حامل‌های بار هرگاه در یک رسانا میدان الکتریکی $\vec{E}$ برقرار شود، حامل‌های بار (که مثبت فرض می‌شوند) یک **تندی سوق** v_d در جهت $\vec{E}$ به‌دست می‌آورند؛ رابطهٔ سرعت $\vec{v}_d$ با چگالی جریان چنین است:

$$\vec{J} = (ne)\vec{v}_d \qquad (۲۷\text{ـ}۷)$$

که در آن ne چگالی حجمی حامل‌های بار است.

مقاومت یک رسانا مقاومت الکتریکی یک رسانا R، به صورت زیر تعریف می‌شود

$$R = \frac{V}{i} \qquad (\text{تعریف } R) \qquad (۲۷\text{ـ}۸)$$

که در آن V اختلاف پتانسیل دو سر رسانا و i جریان است. یکای SI مقاومت اهم (با نماد Ω) است: $1\Omega = 1V/A$. معادله‌های مشابهی ρ، مقاومت ویژه و σ، رسانندگی ویژهٔ یک ماده را تعریف می‌کنند:

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{E}{J} \qquad (\text{تعریف‌های } \rho \text{ و } \sigma) \qquad (۲۷\text{ـ}۱۰، ۲۷\text{ـ}۱۲)$$

که در آن E بزرگی میدان الکتریکی اعمال شده است. یکای SI مقاومت ویژه **اهم ـ متر** (با نماد Ω.m) است. معادلهٔ ۲۷ـ۱۰ متناظر با معادلهٔ برداری زیر است

$$\vec{E} = \rho\vec{J} \qquad (۲۷\text{ـ}۱۱)$$

1. Kamerlingh Onnes

مقاومت الکتریکی یک سیم رسانا R، به طول L و سطح مقطع یکنواخت برابر است با:

$$R = \rho\frac{L}{A} \qquad (۱۶\text{-}۲۷)$$

که در آن A مساحت مقطع است.

تغییر ρ برحسب دما در اغلب مواد مقاومت ویژهٔ ρ برحسب دما تغییر می‌کند. در بسیاری از مواد، از جمله فلزات، رابطهٔ میان ρ و دمای T به طور تقریبی با معادلهٔ زیر بیان می‌شود

$$\rho - \rho_0 = \rho_0\alpha(T - T_0) \qquad (۱۷\text{-}۲۷)$$

در اینجا T_0 دمای مرجع، ρ_0 مقاومت ویژه در دمای T_0، و α ضریب دمایی مقاومت ویژهٔ ماده است.

قانون اهم یک وسیلهٔ معین (رسانا، مقاومت، یا هر وسیلهٔ الکتریکی دیگر) وقتی از قانون اهم پیروی می‌کند که R، مقاومت تعریف شدهٔ آن به صورت V/i، طبق معادلهٔ ۲۷-۸، از اختلاف پتانسیل اعمال شدهٔ V مستقل باشد. هم‌چنین یک مادهٔ معین وقتی از قانون اهم پیروی می‌کند که ρ، مقاومت ویژهٔ تعریف شدهٔ آن، طبق معادلهٔ ۲۷-۱۰، از بزرگی و جهت میدان الکتریکی اعمال شدهٔ $\vec{E}$ مستقل باشد.

مقاومت ویژهٔ یک فلز با این فرض که الکترون‌های رسانش یک فلز مانند مولکول‌های یک گاز می‌توانند آزادانه حرکت کنند، برای مقاومت ویژهٔ فلز می‌توان رابطهٔ زیر را به دست آورد:

$$\rho = \frac{m}{e^2 n\tau} \qquad (۲۰\text{-}۲۷)$$

در اینجا n تعداد الکترون‌های آزاد در یکای حجم و τ زمان میانگین بین برخوردهای یک الکترون با اتم‌های فلز است. با نشان دادن این نکته که τ اساساً از بزرگی E، میدان الکتریکی اعمال شده به یک فلز، مستقل است، می‌توان دلیل پیروی کردن فلزات از قانون اهم را توضیح داد.

توان توان P، یا آهنگ انتقال انرژی، در یک وسیلهٔ الکتریکی که به دو سر آن اختلاف پتانسیل V اعمال شده برابر است با:

$$P = iV \qquad \text{(آهنگ انتقال انرژی الکتریکی)} \qquad (۲۱\text{-}۲۷)$$

اتلاف مقاومتی توان اگر وسیلهٔ الکتریکی مورد نظر یک مقاومت باشد، معادلهٔ ۲۷-۲۱ را می‌توان چنین نوشت:

$$P = i^2R = \frac{V^2}{R} \qquad \text{(اتلاف مقاومتی توان)} \qquad (۲۲\text{-}۲۷، ۲۳\text{-}۲۷)$$

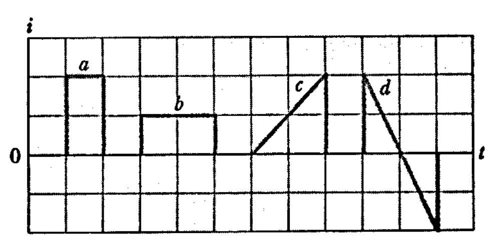
در یک مقاومت انرژی پتانسیل الکتریکی از طریق برخوردهای میان حامل‌های بار و اتم‌ها به انرژی گرمایی درونی تبدیل می‌شود.

نیمرساناها نیمرساناها موادی هستند با تعداد الکترون‌های رسانش کم، اما وقتی با اتم‌های دیگر به وجود آورندهٔ الکترون‌های آزاد آلاییده می‌شوند رسانا می‌شوند.

ابر رساناها ابر رساناها موادی هستند که مقاومت الکتریکی خود را در دماهای پایین به کلی از دست می‌دهند. در پژوهش‌های اخیر موادی کشف شده‌اند که با شگفتی در دماهای بالا ابر رسانا می‌شوند.

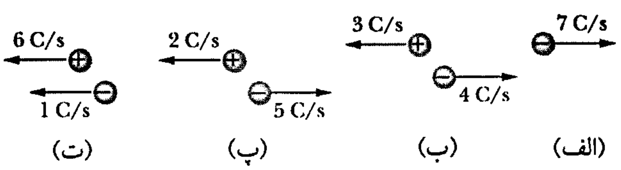
پرسش‌ها

۱. شکل ۲۷-۱۵، نمودارهای i، جریان گذرنده از سطح مقطع یک سیم را در چهار دورهٔ زمانی مختلف نشان می‌دهد. این دوره‌ها را با توجه به بار خالص گذرنده از سطح مقطع، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



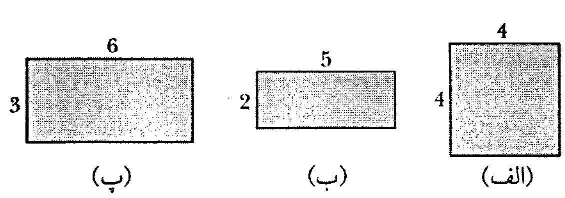
شکل ۲۷-۱۵ پرسش ۱.

۲. شکل ۲۷-۱۶، چهار حالت را نشان می‌دهد که در آنها بارهای مثبت و منفی به طور افقی از ناحیه‌ای می‌گذرند. آهنگ حرکت هر بار در روی شکل مشخص شده است. این حالت‌ها را با توجه به جریان مؤثر گذرنده از آن ناحیه، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



شکل ۲۷-۱۶ پرسش ۲.

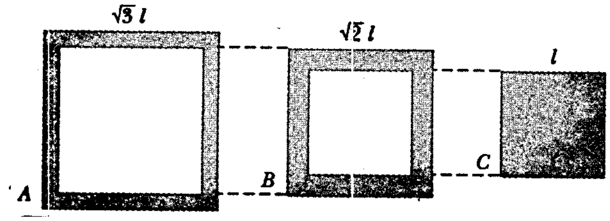
۳. شکل ۲۷-۱۷، سطح مقطع سه سیم هم جنس و با طول یکسان را نشان می‌دهد. در این شکل طول هر ضلع برحسب میلی‌متر داده شده است. این سیم‌ها را با توجه به مقاومت آنها (که در طول هر سیم اندازه‌گیری شده است)، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



شکل ۲۷-۱۷ پرسش ۳.

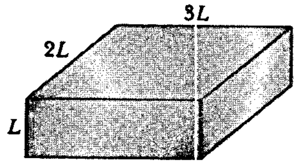
۴. اگر یک سیم استوانه‌ای را دراز کنید و باز هم به صورت استوانه بماند، آیا مقاومت سیم (که در سرتاسر سیم اندازه‌گیری می‌شود) افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد، یا ثابت می‌ماند؟

۵. شکل ۲۷-۱۸، سطح مقطع سه رسانای دراز هم جنس و با طول یکسان را نشان می‌دهد. طول ضلع هر مقطع در روی شکل داده شده است. فرض کنید رسانای B دقیقاً درون رسانای A و رسانای C دقیقاً درون رسانای B جا می‌گیرد. حالت‌های زیر را با توجه به مقاومت اندازه‌گیری شده در طول آنها، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید: تک تک رساناها و ترکیب‌های $A+B$، $B+C$، و $A+B+C$.



شکل ۲۷-۱۸ پرسش ۵.

۶. شکل ۲۷-۱۹، یک رسانای مکعب مستطیل شکل توپر به ضلع‌های L، $2L$ و $3L$ را نشان می‌دهد. بین هر دو وجه مقابل این رسانا: چپ - راست، بالا - پایین و جلو - عقب، مطابق شکل ۲۷-۸ ب، اختلاف پتانسیل V اعمال می‌شود. این زوج وجه‌ها را با توجه به، (الف) بزرگی میدان الکتریکی درون رسانا، (ب) چگالی جریان درون رسانا، (پ) جریان گذرنده از رسانا، و (ت) تندی سوق الکترون‌ها در رسانا، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



شکل ۲۷-۱۹ پرسش ۶.

۷. جدول زیر، طول‌های سه میلهٔ مسی، قطرهای آنها و اختلاف پتانسیل‌های دو سر آنها را نشان می‌دهد. این میله‌ها را با توجه به، (الف) بزرگی میدان الکتریکی درون آنها، (ب) چگالی جریان درون آنها و (پ) تندی سوق الکترون‌ها در میله‌ها، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.

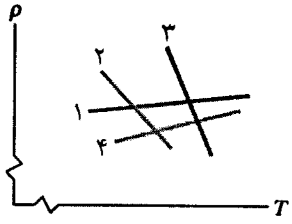
میله	طول	قطر	اختلاف پتانسیل
۱	L	$3d$	V
۲	$2L$	d	$2V$
۳	$3L$	$2d$	$2V$

۸. جدول زیر، رسانندگی ویژه و چگالی الکترون‌های رسانش مربوط به مواد A، B، C و D را نشان می‌دهد. این مواد را با توجه به زمان میانگین بین برخوردهای الکترون‌های رسانش در آنها، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.

موضوع	A	B	C	D
رسانندگی ویژه	σ	2σ	2σ	σ
الکترون / m^3	n	$2n$	n	$2n$

۹. سه سیم با قطر یکسان، به نوبت، در بین دو نقطه با اختلاف پتانسیل ثابت وصل می‌شوند. مقاومت‌های ویژه و طول آنها به‌ترتیب، ρ و L (سیم A)، $1{,}2\rho$ و $1{,}2L$ (سیم B) و $0{,}9\rho$ و L (سیم C)، است. این سیم‌ها را با توجه به آهنگ تبدیل انرژی به انرژی گرمایی در درون آنها، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.

۱۰. شکل ۲۷-۲۰، نمودار تغییرات مقاومت‌های ویژهٔ چهار ماده را به صورت تابعی از دما نشان می‌دهد. (الف) کدام مواد رسانا، و کدام مواد نیمرسانا هستند؟ در کدام مواد افزایش دما منجر به (ب) افزایش تعداد الکترون‌های رسانش در یکای حجم، و (پ) افزایش آهنگ برخورد الکترون‌های رسانش، می‌شود؟



شکل ۲۷-۲۰ پرسش ۱۰.

تمرین‌ها و مسأله‌ها

بخش ۲۷-۲ جریان الکتریکی

۱ ت. جریانی ۰٫۵ آمپری به مدت ۴٫۰ دقیقه از یک مقاومت ۱۰ اهمی می‌گذرد. در این مدت از هر مقطع، (الف) چند کولن بار الکتریکی و (ب) چند الکترون، می‌گذرد؟

۲ م. تسمهٔ بارداری به پهنای ۵۰cm، با تندی ۳۰m/s در بین یک مولد بار الکتریکی و یک کره حرکت می‌کند. این تسمه بار را با آهنگ ۱۰۰μA به کره می‌رساند. چگالی سطحی بار روی تسمه را حساب کنید.

۳ م. کره‌ای رسانا و منزوی دارای شعاع ۱۰cm است. سیمی یک جریان ۱٫۰۰۰۰۲ آمپری را به کره می‌رساند و سیم دیگری یک جریان ۱٫۰۰۰۰۰۰ آمپری را از کره خارج می‌کند. چه مدت طول می‌کشد تا پتانسیل این کره به اندازهٔ ۱۰۰۰V افزایش یابد؟

بخش ۲۷ـ۳ چگالی جریان

۴ ت. جریان ضعیف، اما قابل اندازه‌گیری $۱٫۲\times۱۰^{-۱۰}$A، در یک سیم مسی به قطر ۲٫۵mm برقرار است. با فرض یکنواخت بودن جریان، مطلوب است محاسبهٔ (الف) چگالی جریان و (ب) تندی سوق الکترون‌ها. (به مسألهٔ نمونهٔ ۲۷ـ۳ رجوع کنید).

۵ ت. باریکه‌ای شامل $۲٫۰\times۱۰^{۸}$ یون مثبت دو بار یونیده در هر سانتی‌متر مکعب است و تمام یون‌ها با تندی $۱٫۰\times۱۰^{۵}$m/s به سوی شمال حرکت می‌کنند. (الف) بزرگی و جهت چگالی جریان $\vec{J}$، چیست؟ (ب) آیا می‌توانید جریان کل i مربوط به این باریکهٔ یونی را حساب کنید؟ اگر پاسخ منفی است، چه داده‌های دیگری لازم است؟

۶ ت. کُد ملی برق (ایالات متحد) که بیشینهٔ جریان مجاز مربوط به سیم‌های مسی روپوش‌دار با قطرهای مختلف را مشخص می‌کند، در جدول زیر (تا حدی) درج شده است. نمودار تغییرات چگالی جریان مجاز این سیم‌ها را برحسب قطر آنها رسم کنید. چگالی جریان مجاز کدام نمرهٔ سیم بیشینه است؟ (اصطلاح «نمرهٔ سیم» روشی برای مشخص کردن قطر سیم است و $(\text{mil}=۱۰^{-۳}\text{in})$.)

نمرهٔ سیم	۴	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸
قطر سیم، mil	۲۰۴	۱۶۲	۱۲۹	۱۰۲	۸۱	۶۴	۵۱	۴۰
جریان مجاز، A	۷۰	۵۰	۳۵	۲۵	۲۰	۱۵	۶	۳

۷ ت. در یک مدار الکتریکی فیوز سیمی است که در صورت تجاوز کردن جریان مدار از یک مقدار از پیش معین شده، ذوب می‌شود و مدار را باز می‌کند. فرض کنید مادهٔ به کار رفته در فیوز وقتی ذوب می‌شود که چگالی جریان تا $۴۴۰\text{A/cm}^۲$ افزایش پیدا کند. قطر یک سیم استوانه‌ای مورد استفاده در ساختن فیوز چقدر باید باشد تا بتواند جریان را به ۰٫۵۰A محدود کند؟

۸ م. در نزدیکی سطح زمین چگالی پروتون‌ها در باد خورشیدی (جریانی از ذره‌های گسیل شده از خورشید) $۸٫۷\text{cm}^{-۳}$ و تندی پروتون‌ها ۴۷۰km/s است. (الف) چگالی جریان این پروتون‌ها را پیدا کنید. (ب) اگر پروتون‌ها توسط میدان مغناطیسی زمین منحرف نشوند به زمین برخورد می‌کنند. کل جریانی که زمین از این طریق دریافت می‌کند چقدر است؟

۹ م. باریکهٔ پایایی از ذره‌های آلفا $(q=+۲e)$، که با انرژی جنبشی ثابت ۲۰MeV حرکت می‌کنند، حامل جریان ۰٫۲۵μA است. (الف) اگر این باریکه به طور عمود به یک سطح تخت بتابد، در مدت ۳٫۰ ثانیه چند ذرهٔ آلفا به سطح برخورد می‌کند؟ (ب) در هر لحظه چند ذرهٔ آلفا در بخشی از این باریکه به طول ۲۰cm وجود دارد؟ (پ) اختلاف پتانسیل لازم برای شتاب دادن به هر ذرهٔ آلفا از حالت سکون تا انرژی ۲۰MeV، چقدر است؟

۱۰ م. (الف) در یک رسانای استوانه‌ای به شعاع مقطع R، بزرگی چگالی جریان طبق معادلهٔ زیر تغییر می‌کند:

$$J = J_\circ \left(۱ - \frac{r}{R}\right)$$

که در آن r فاصلهٔ شعاعی از محور استوانه است. بنابراین، چگالی جریان در روی محور $(r=\circ)$ بیشینه و برابر با $J_\circ$ است و در نقاط دیگر به طور خطی کاهش می‌یابد تا در روی سطح $(r=R)$، به صفر می‌رسد. جریان گذرنده از استوانه را برحسب $J_\circ$ و مساحت مقطع رسانا، $A=\pi R^۲$، حساب کنید. (ب) اکنون، فرض کنید چگالی جریان در سطح استوانه بیشینه و برابر با $J_\circ$ است و در نقاط دیگر به طور خطی کاهش می‌یابد تا در روی محور به صفر برسد: $J=J_\circ r/R$. جریان را حساب کنید. چرا این نتیجه با نتیجهٔ قسمت (الف) متفاوت است؟

۱۱ م. در یک اتومبیل چه مدت طول می‌کشد تا الکترون‌ها از باتری به استارت راه‌انداز اتومبیل برسند؟ فرض کنید جریان ۳۰۰A است و الکترون‌ها از یک سیم مسی با مساحت مقطع $۰٫۲۱\text{cm}^۲$ و طول ۰٫۸۵m عبور می‌کنند. (به مسألهٔ نمونهٔ ۲۷ـ۳ رجوع کنید).

بخش ۲۷ـ۴ مقاومت و مقاومت ویژهٔ الکتریکی

۱۲ ت. سیمی از نیکروم (آلیاژ نیکل ـ کروم ـ آهن، که معمولاً در سیم‌های گرم کننده به کار می‌رود) دارای طول ۱٫۰m و مساحت مقطع $۱٫۰\text{mm}^۲$ است. هرگاه به دو سر سیم اختلاف پتانسیل ۲٫۰V اعمال شود، جریان گذرنده از آن ۴٫۰A می‌شود. رسانندگی ویژهٔ نیکروم σ، را حساب کنید.

۱۳ ت. سیمی دارای قطر ۱٫۰mm، طول ۲٫۰m و مقاومت الکتریکی ۵۰mΩ است. مقاومت ویژهٔ مادهٔ سیم چقدر است؟

۱۴ ت. مساحت مقطع یک ریل فولادی $۵۶٫۰\text{cm}^۲$ است. مقاومت ۱۰٫۰km از این ریل چقدر است؟ مقاومت ویژهٔ فولاد $۳٫۰۰\times۱۰^{-۷}\Omega.\text{m}$ است.

۱۵ ت. انسان در اثر عبور یک جریان ضعیف ۵۰ میلی آمپری از مجاورت قلبش دچار برق گرفتگی می‌شود. برقکاری در حال کار با دست‌های خیس دو سیم برق را به طور کامل در هر یک از دو دست خود نگه داشته است. اگر در این حال مقاومت بدن برقکار ۲۰۰۰Ω باشد، ولتاژ لازم برای برق گرفتگی چقدر خواهد بود؟

۱۶ ت. سیمی به طول ۴٫۰۰m و قطر ۶٫۰۰mm دارای مقاومت ۱۵٫۰mΩ است. بین دو سر سیم اختلاف پتانسیل ۲۳٫۰V اعمال می‌شود. (الف) جریان در سیم چقدر است؟ (ب) چگالی جریان در سیم چقدر است؟

(پ) مقاومت ویژهٔ مادهٔ سیم را حساب کنید. جنس مادهٔ سیم را مشخص کنید. (از جدول ۲۷-۱ استفاده کنید).

۱۷ ت. پیچه‌ای با پیچیدن ۲۵۰ دور سیم مسی روپوش‌دار نمره ۱۶ (به قطر ۱٫۳mm) در یک لایه به شکل استوانه‌ای به شعاع ۱۲cm ساخته شده است. مقاومت این پیچه چقدر است؟ از ضخامت روپوش عایق چشم‌پوشی کنید، (از جدول ۲۷-۱ استفاده کنید).

۱۸ ت. (الف) در چه دمایی مقاومت یک سیم مسی دو برابر مقاومت آن در دمای ۲۰٫۰°C می‌شود؟ (در معادلهٔ ۲۷-۱۷ از دمای ۲۰٫۰°C به عنوان دمای مرجع استفاده کنید؛ پاسخ خود را با شکل ۲۷-۱۰ مقایسه کنید). (ب) آیا این «دمای دو برابر شدن مقاومت» در مورد تمام سیم‌های مسی، با هر شکل و اندازه‌ای، صادق است؟

۱۹ ت. سیمی به مقاومت ۶٫۰Ω از لای یک حدیده کشیده می‌شود تا طولش به سه برابر طول اولی برسد. مقاومت سیم دراز شده را با این فرض که مقاومت ویژه و چگالی مادهٔ سیم در حین کشیده شدن بدون تغییر می‌ماند، پیدا کنید.

۲۰ ت. سیمی دارای مقاومت R است. مقاومت سیم ساخته شده از همان جنس، در حالی که طولش نصف، و قطرش نصف شده باشد، چقدر است؟

۲۱ م. دو رسانا از یک ماده ساخته شده و دارای طول مساوی‌اند. رسانای A سیمی به قطر ۱٫۰mm، و رسانای B لوله‌ای توخالی به قطر بیرونی ۲٫۰mm و قطر درونی ۱٫۰mm است. نسبت مقاومت‌های الکتریکی این دو رسانا، R_A/R_B، چقدر است؟

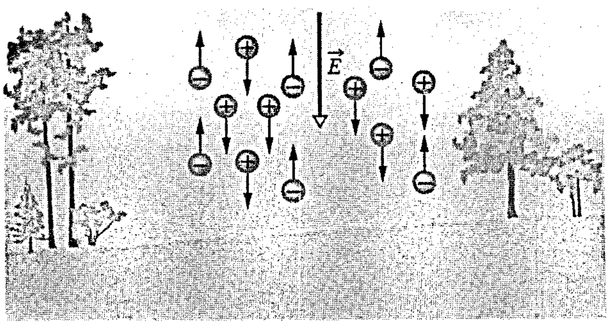
۲۲ م. یک کابل برق شامل ۱۲۵ رشته سیم است، که مقاومت هر کدام ۲٫۶۵μΩ است. با اعمال کردن یک اختلاف پتانسیل یکسان به دو سر تمام رشته‌های سیم جریان کل ۰٫۷۵۰A در سیم‌ها برقرار می‌شود. (الف) جریان هر رشته سیم چقدر است؟ (ب) اختلاف پتانسیل اعمال شده چقدر است؟ (پ) مقاومت کابل چقدر است؟

۲۳ م. با اعمال کردن اختلاف پتانسیل ۱۱۵V به دو سر سیمی به طول ۱۰m و شعاع مقطع ۰٫۳۰mm، چگالی جریان در سیم $۱٫۴\times۱۰^{۴}$A/m² می‌شود. مقاومت ویژهٔ سیم را پیدا کنید.

۲۴ م. جسمی به شکل مکعب مستطیل توپر، دارای مساحت مقطع ۳٫۵۰cm²، طول جلو تا عقب ۱۵٫۸cm و مقاومت ۹۳۵Ω است. چگالی الکترون‌های رسانش مادهٔ تشکیل‌دهندهٔ جسم، $۵٫۳۳\times۱۰^{۲۲}$ الکترون/m³ است. بین وجه‌های جلو و عقب جسم اختلاف پتانسیل ۳۵٫۸V اعمال می‌شود. (الف) چه جریانی در جسم برقرار می‌شود؟ (ب) اگر چگالی جریان یکنواخت باشد، مقدار آن چقدر است؟ (پ) سرعت سوق الکترون‌های رسانش چیست؟ (ت) بزرگی میدان الکتریکی در جسم چقدر است؟

۲۵ م. یک لامپ درخشش معمولی، با جریان ۰٫۳۰A و ولتاژ ۲٫۹V کار می‌کند (مقادیر جریان و ولتاژ مربوط به شرایط لامپ در حال کار هستند). اگر مقاومت رشتهٔ لامپ در دمای اتاق (۲۰°C)، ۱٫۱Ω باشد، دمای رشته در هنگام روشن بودن لامپ چقدر است؟ رشته از تنگستن ساخته شده است.

۲۶ م. جوّ پایین زمین شامل یون‌های منفی و مثبتی است که از عنصرهای پرتوزای موجود در خاک و پرتوهای کیهانی فضا ناشی می‌شوند. در ناحیهٔ معینی از جوّ شدت میدان الکتریکی ۱۲۰V/m و میدان در راستای قائم و به سمت پایین است. در اثر این میدان، یون‌های یک بار مثبت با چگالی ۶۲۰/cm³ به سمت پایین و یون‌های یک بار منفی با چگالی ۵۵۰/cm³ به‌سمت بالا سوق پیدا می‌کنند (شکل ۲۷-۲۱ را ببینید). رسانندگی ویژهٔ اندازه‌گیری شدهٔ هوا در این ناحیه $۲٫۷\times۱۰^{-۱۴}$/Ω.m است. مطلوب است محاسبهٔ (الف) تندی سوق یون‌ها، که برای یون‌های مثبت و منفی یکسان فرض می‌شود، و (ب) چگالی جریان.

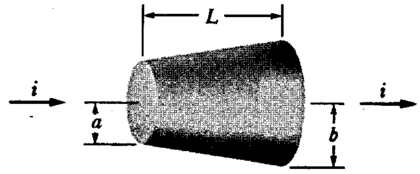


شکل ۲۷-۲۱ مسألهٔ ۲۶.

۲۷ م. در موقع گرم شدن یک میلهٔ فلزی، نه تنها مقاومت، بلکه طول و مساحت مقطع میله نیز تغییر می‌کند. رابطهٔ $R=\rho L/A$ نشان می‌دهد که در اندازه‌گیری ρ در دماهای مختلف، این هر سه عامل را باید در نظر گرفت. (الف) اگر دمای میله به اندازهٔ ۱٫۰C° تغییر کند، درصد تغییرات نسبی R، L و A در یک رسانای مسی چند است؟ (ب) ضریب انبساط خطی مس $۱٫۷\times۱۰^{-۵}$/K است. برای درصد تغییر نسبی مقاومت ویژه چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۲۸ م. هرگاه نمرهٔ یک سیم به اندازهٔ ۶ واحد افزایش یابد، قطر سیم نصف می‌شود و اگر نمرهٔ سیم به اندازهٔ ۱ واحد افزایش یابد، قطر سیم به نسبت $(۲)^{\frac{1}{6}}$ کاهش می‌یابد. (جدول تمرین ۶ را ببینید). با این داده‌ها و با دانستن اینکه مقاومت تقریبی ۱۰۰۰ft از سیم مسی نمره ۱۰ برابر با ۱٫۰۰Ω است، مقاومت ۲۵ft سیم مسی نمره ۲۲ را براورد کنید.

۲۹ م. مقاومتی به شکل مخروط ناقص است (شکل ۲۷-۲۲ را ببینید). شعاع‌های دو قاعدهٔ مخروط a و b، و ارتفاع آن L است. اگر شیب مخروط (نسبت به محور) کم باشد، می‌توان فرض کرد که چگالی جریان در تمام مقطع‌ها یکنواخت است. (الف) مقاومت الکتریکی این مخروط را حساب کنید. (ب) نشان دهید در حالت خاصی که شیب مخروط صفر است (یعنی $a=b$)، پاسخ حاصل به صورت سادهٔ $\rho(L/A)$ در می‌آید.



شکل ۲۷-۲۲ مسألهٔ ۲۹.

بخش ۲۷-۶ دیدگاه میکروسکوپیک قانون اهم

۳۰ م. نشان دهید که با توجه به مدل الکترون آزاد رسانش الکتریکی در فلزات و بر پایهٔ فیزیک کلاسیک، مقاومت ویژهٔ فلزات با $\sqrt{T}$ متناسب است، که در آن T دما برحسب کلوین است. (به معادلهٔ ۲۰-۳۱ رجوع کنید).

بخش ۲۷-۷ توان در مدارهای الکتریکی

۳۱ ت. در یک لامپ پرتو x، جریان ۰٫۷mA و اختلاف پتانسیل ۸۰kV است. توان این لامپ چند وات است؟

۳۲ ت. دانشجویی رادیو ۹٫۰V و ۷٫۰W خود را از ساعت ۹:۰۰ بعد از ظهر تا ساعت ۲:۰۰ بامداد، با بلندترین صدا روشن نگه می‌دارد. در این مدت چه مقدار بار الکتریکی به این رادیو وارد می‌شود؟

۳۳ ت. مقاومت یک بخاری برقی، که با ولتاژ ۱۲۰V کار می‌کند، در حال کار ۱۴Ω است. (الف) آهنگ تبدیل انرژی الکتریکی به گرما چقدر است؟ (ب) اگر بهای هر کیلووات ساعت برق ۵۰ ریال باشد، هزینهٔ برق مصرفی ۵٫۰ ساعت کار این وسیله چقدر است؟

۳۴ ت. آهنگ انرژی گرمایی تولید شده در یک مقاومت با شدت جریان ۳٫۰۰ آمپری، ۱۰۰W است. مقدار مقاومت چقدر است؟

۳۵ ت. مقاومت نامعلومی را به دو سر یک باتری ۳٫۰۰ ولتی وصل می‌کنیم. آهنگ انرژی تلف شده در این مقاومت ۰٫۵۴۰W است. حال این مقاومت را به دو سر یک باتری ۱٫۵ ولتی وصل می‌کنیم. در این حالت، آهنگ اتلاف انرژی چقدر است؟

۳۶ ت. اختلاف پتانسیل ۱۲۰ ولتی به دو سر یک بخاری برقی با توان تلف شدهٔ ۵۰۰W در حال کار، اعمال می‌شود. (الف) مقاومت الکتریکی بخاری در حال کار چقدر است؟ (ب) الکترون‌ها با چه آهنگی از سطح مقطع رشتهٔ داغ بخاری عبور می‌کنند؟

۳۷ م. یک پیچهٔ گرم کنندهٔ ۱۲۵۰ واتی برای کار با ولتاژ ۱۱۵V ساخته شده است. (الف) جریان گرم کننده چقدر است؟ (ب) مقاومت پیچهٔ گرم کننده چقدر است؟ (پ) در مدت یک ساعت چه مقدار انرژی گرمایی توسط این گرم کننده تولید می‌شود؟

۳۸ م. یک سیم گرمکن از جنس نیکروم با مساحت مقطع $2.60\times10^{-6}\,m^2$ برای کار با اختلاف پتانسیل ۷۵٫۰V ساخته شده است. مقاومت ویژهٔ نیکروم $5.00\times10^{-7}\,\Omega.m$ است. (الف) اگر توان تلف شده در این سیم ۵۰۰۰W باشد، طول سیم چقدر است؟ (ب) هرگاه بخواهیم با اعمال کردن اختلاف پتانسیل ۱۰۰V توان تلف شده همین مقدار باشد، طول سیم چقدر باید باشد؟

۳۹ م. هنگامی که اختلاف پتانسیل اعمال شده به دو سر یک سیم گرم کننده از جنس نیکروم ۱۱۰V و دمای سیم ۸۰۰°C است، توان تلف شده در سیم ۵۰۰W است. اگر بر اثر فرو بردن سیم در یک روغن سرد کننده دمای آن در ۲۰۰°C ثابت نگه داشته شود، توان تلف شده چقدر است؟ اختلاف پتانسیل اعمال شده ثابت می‌ماند، و α برای نیکروم در دمای ۸۰۰°C، $4\times10^{-4}/K$ است.

۴۰ م. یک لامپ روشنایی ۱۰۰ واتی به برق استاندارد ۱۲۰V وصل شده است. (الف) اگر لامپ در مدت یک ماه به طور دایم روشن بماند هزینهٔ برق مصرفی آن با نرخ هر کیلووات ساعت ۵۰ ریال چقدر است؟ (ب) مقاومت لامپ چقدر است؟ (پ) جریان لامپ چقدر است؟ (ت) آیا مقاومت به‌دست آمده با مقاومت لامپ به‌هنگام خاموش بودن، متفاوت است؟

۴۱ م. یک شتاب دهندهٔ خطی باریکهٔ تپیده‌ای از الکترون‌ها تولید می‌کند. جریان تپ ۰٫۵۰A و مدت زمان آن ۰٫۱۰μs است. (الف) در هر تپ چند الکترون شتاب پیدا می‌کند؟ (ب) جریان متوسط برای شتاب دهنده‌ای که با آهنگ ۵۰۰ تپ بر ثانیه کار می‌کند، چقدر است؟ (پ) اگر الکترون‌ها تا انرژی ۵۰MeV شتاب پیدا کنند، توان خروجی متوسط و توان قلهٔ خروجی شتاب دهنده چقدر است؟

۴۲ م. یک مقاومت استوانه‌ای به شعاع ۰٫۵mm و طول ۲٫۰cm، از ماده‌ای با مقاومت ویژهٔ $3.5\times10^{-5}\,\Omega.m$ ساخته شده است. مطلوب است تعیین (الف) چگالی جریان، (ب) اختلاف پتانسیل، هنگامی که آهنگ اتلاف انرژی ۱٫۰W است.

۴۳ م. در سراسر مقطع یک سیم مسی با مساحت مقطع $2.0\times10^{-6}\,m^2$ و طول ۴٫۰m یک جریان یکنواخت ۲٫۰ آمپری توزیع شده است. (الف) بزرگی میدان الکتریکی در طول سیم چقدر است؟ (ب) در مدت ۳۰ دقیقه چقدر انرژی الکتریکی به انرژی گرمایی تبدیل می‌شود؟

مسأله‌های تکمیلی

۴۴. رمز و راز خرده‌های شکلات. این موضوع با مسألهٔ ۴۸ در فصل ۲۴ آغاز شده و در فصل‌های ۲۵ و ۲۶ ادامه یافته است. پودر خرده‌های شکلات با تندی یکنواخت v از طریق لوله‌ای به شعاع R و چگالی بار یکنواخت ρ، به مخزن منتقل می‌شود. (الف) رابطهٔ مربوط به جریان i گذرنده (آهنگ حرکت بار الکتریکی حمل شده توسط پودر) از مقطع عمود بر لوله را به دست آورید. (ب) مقدار i را برای شرایط کار در کارخانه براورد کنید: شعاع لوله $R=5.0\,cm$، تندی $v=2.0\,m/s$ و چگالی بار $\rho=1.1\times10^{-3}\,C/m^3$ است.

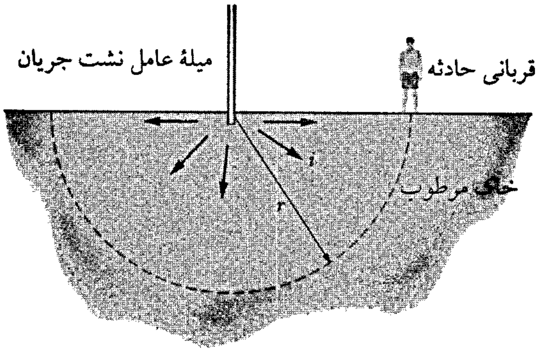
اگر پودر بر اثر تغییر پتانسیل الکتریکی V حرکت می‌کرد، انرژی آن باید با آهنگ $P=iV$ به جرقه تبدیل می‌شد. (پ) آیا چنین تبدیلی بر اثر اختلاف پتانسیل شعاعی مورد بحث در مسألهٔ ۵۷ فصل ۲۵، می‌تواند در لوله صورت گیرد؟

هنگامی که پودر از طریق لوله به مخزن منتقل می‌شد، پتانسیل الکتریکی آن تغییر می‌کرد. بزرگی این تغییر دست کم برابر با اختلاف پتانسیل شعاعی درون لوله است (همان طور که در مسألهٔ ۵۷ فصل ۲۵ براورد شده است). (ت) با در نظر گرفتن این مقدار برای اختلاف پتانسیل و استفاده از جریان به دست آمده در قسمت (ب)، آهنگ انتقال انرژی از پودر به جرقه را در هنگامی که پودر لوله را برانگیخته می‌کند، معین کنید. (ث) اگر جرقه در محل خروج پودر تولید می‌شد و به مدت ۲۰ر۰ ثانیه دوام می‌یافت (که مقداری مورد انتظار و پذیرفتنی است)، چه مقدار انرژی به جرقه داده می‌شد؟

با توجه به مسألهٔ ۴۸ در فصل ۲۴، یادآوری می‌شود که برای ایجاد انفجار کمینهٔ انرژی لازم ۱۵۰mJ است. (ج) انفجار به احتمال زیاد در کجا رخ می‌داد: در غبار پودر در پاتیل (که در مسألهٔ ۴۸ فصل ۲۶ در نظر گرفته شد)، در درون لوله، یا در خروجی لوله در درون مخزن؟

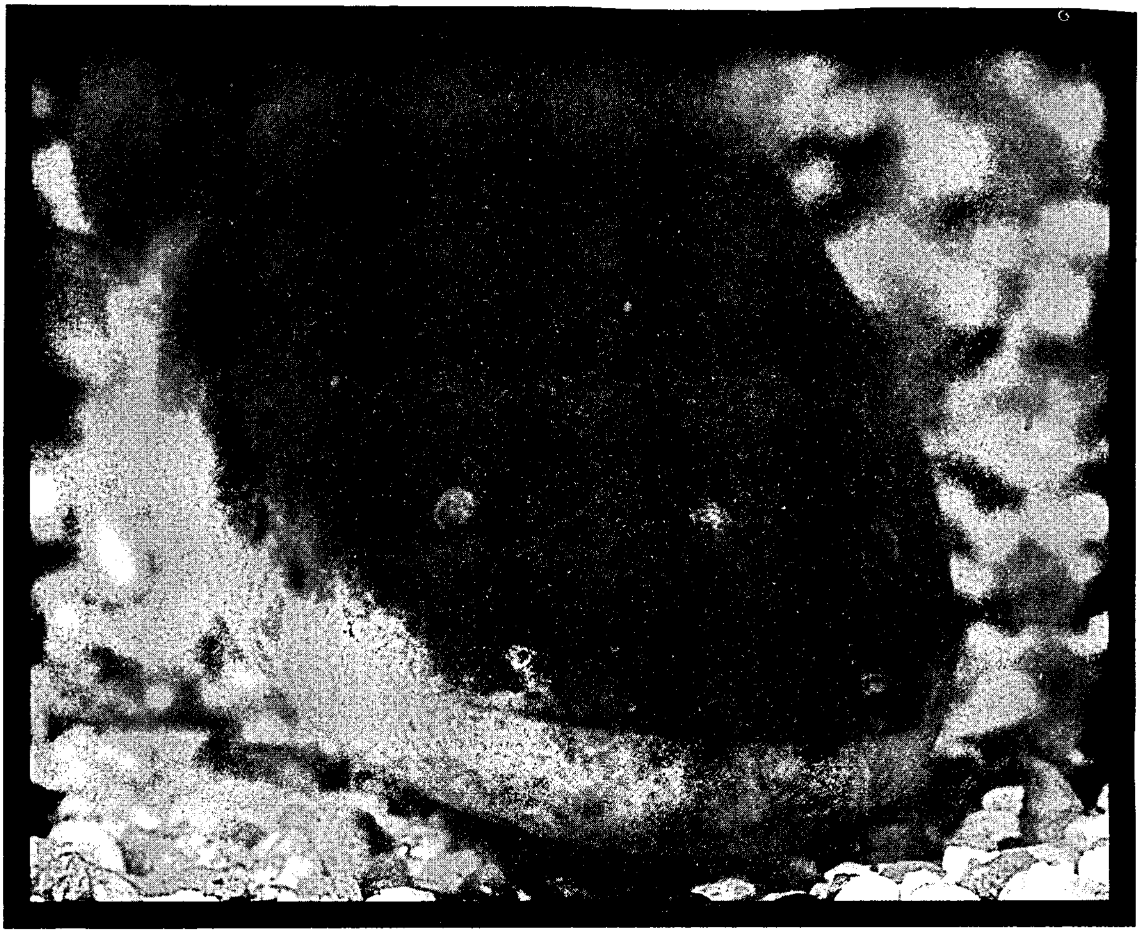
۴۵. حملهٔ قلبی یا مرگ ناشی از برق گرفتگی؟ یک روز صبح مردی در حالی که با پای برهنه از محل استقرار خانوادهٔ خود در یک پیک نیک دور می‌شد در نزدیکی یک دکل نگهدارندهٔ خط‌های انتقال برق به خاک مرطوبی می‌رسد و ناگهان بر زمین می‌افتد. اعضای خانواده که به دور میز پیک نیک نشسته بودند، افتادن مرد را می‌بینند و به سمت او می‌روند. پس از چند ثانیه به مرد می‌رسند وَ می‌بینند که او دچار انقباض رشته‌های عضلانی بطنی شده است. مرد پیش از رسیدن گروه فوریت‌های پزشکی همراه با تجهیزات رفع کنندهٔ انقباض عضلانی، فوت می‌کند. پس از آن، خانوادهٔ مرد بر علیه شرکت برق شکایت می‌کند و مدعی می‌شود که آن مرد بر اثر نشت تصادفی جریان برق از دکل دچار برق گرفتگی منجر به مرگ شده است. شما به عنوان عضوی از گروه پزشکی قانونی مأمور تحقیق دربارهٔ علت مرگ این مرد انتخاب شده‌اید ـ آیا مرگ او را ناشی از حملهٔ قلبی می‌دانید یا ناشی از برق گرفتگی؟

تحقیق در پرونده‌های شرکت برق نشان می‌دهد که در آن روز صبح حقیقتاً یک نقص الکتریکی در دکل به وجود آمده و به مدتی در حدود ۰ر۱ ثانیه جریان برق از طریق یک میله به زمین نشت کرده است. فرض کنید جریان به طور یکنواخت (در حجمی به صورت نیمکره) در زمین توزیع می‌شود (شکل ۲۷ـ۲۳). اگر ρ مقاومت ویژهٔ زمین و r فاصله از میله باشد، مطلوب است تعیین رابطه‌های مربوط به، (الف) چگالی جریان و (ب) بزرگی میدان الکتریکی، هر دو برحسب r. انتهای پایینی میله کروی و شعاع آن b است. (پ) با استفاده از رابطهٔ مربوط به بزرگی میدان الکتریکی به دست آمده، رابطهٔ مربوط به اختلاف پتانسیل ΔV، بین انتهای پایینی میله و نقطه‌ای به فاصلهٔ r را پیدا کنید. تحقیق نشان می‌دهد که $I=$۱۰۰A، $\rho=$۱۰۰Ω.m و $b=$۰ر۱cm و قربانی حادثه در فاصلهٔ $r=$۱۰m قرار داشته است. در محل قرار گرفتن قربانی حادثه، مطلوب است تعیین (ت) چگالی جریان، (ث) بزرگی میدان الکتریکی، و (ج) اختلاف پتانسیل ΔV. (این موضوع در مسألهٔ ۵۶ فصل ۲۸ ادامه خواهد یافت).



شکل ۲۷ـ۲۳ مسألهٔ ۴۵.

۲۸
مدارهای الکتریکی



در رودخانه‌های امریکای جنوبی مارماهی الکتریکی (ماهی الکتریسیته ساز) با کمین کردن و ارسال تپ‌های جریان ماهی‌ها را شکار می‌کند و آنها را می‌کشد. مارماهی با تولید کردن اختلاف پتانسیلی در حدود چند صد ولت در بدن خود این کار را انجام می‌دهد؛ جریان حاصل در آبهای پیرامون از نزدیکی سر مارماهی تا ناحیهٔ دُم آن می‌تواند به حد یک آمپر برسد. هرگاه شما در حین شنا کردن با مارماهی تماس پیدا کنید ممکن است شگفت‌زده شوید (البته پس از بهبودی و رفع اثر گیج شدگی بسیار دردناکی که دچار آن خواهید شد).

مارماهی چگونه می‌تواند جریان زیادی را تولید کند، بی‌آنکه به خودش شوک وارد شود؟

در این فصل به این پرسش پاسخ داده خواهد شد.

۲۸ـ۱ «پمپ کردن» بارهای الکتریکی

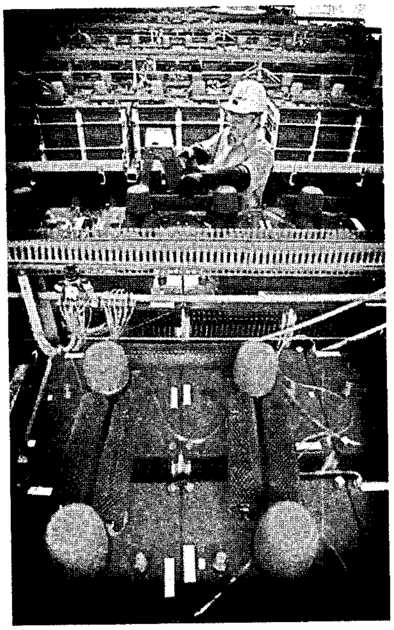
هرگاه بخواهیم از یک مقاومت الکتریکی حامل‌های بار را عبور دهیم، باید بین دو سر مقاومت یک اختلاف پتانسیل برقرار کنیم. یکی از راه‌های انجام دادن این کار وصل کردن هر سر مقاومت به یک صفحهٔ خازن باردار است. عیب این روش آن است که شارش بارها باعث بی‌بار شدن خازن می‌شود و در مدتی کوتاه صفحه‌های خازن را هم پتانسیل می‌کند. وقتی چنین اتفاقی می‌افتد، دیگر در مقاومت میدان الکتریکی وجود ندارد و در نتیجه شارش بار متوقف می‌شود.

برای ایجاد شارش پایایی از بارهای الکتریکی، به یک «پمپ بار» نیاز داریم، یعنی به وسیله‌ای که ـ با انجام دادن کار بر روی حامل‌های بار ـ در بین دو پایانهٔ خود یک اختلاف پتانسیل به وجود آورد. چنین وسیله‌ای **منبع نیروی محرک الکتریکی** (emf) نام دارد و گفته می‌شود که این وسیله **نیروی محرک الکتریکی** $\mathscr{E}$ را به‌وجود می‌آورد، یعنی روی حامل‌های بار کار انجام می‌دهد. وسیلهٔ نیروی محرک الکتریکی را گاهی جایگاه **نیروی محرک الکتریکی** هم می‌نامند. اصطلاح *emf*، از عبارت نامرسوم *electromotive force* (نیروی محرک الکتریکی) گرفته شده است، که پیش از آنکه دانشمندان چگونگی کار یک وسیلهٔ نیروی محرک الکتریکی را به‌وضوح بفهمند، به کار رفته بود.

در فصل ۲۷ در مورد حرکت حامل‌های بار الکتریکی در یک مدار، تحت اثر میدان الکتریکی تولید شده در آن مدار، بحث کردیم. این میدان نیروی لازم برای حرکت دادن حامل‌های بار را تأمین می‌کند. در این فصل به رهیافت متفاوتی توجه می‌کنیم. در اینجا حرکت حامل‌های بار را با توجه به انرژی مورد نیاز، یعنی، منبع نیروی محرک الکتریکی، که انرژی لازم برای حرکت را با انجام‌دادن کار تأمین می‌کند، موردبحث قرار می‌دهیم.

منبع متداول برای ایجاد نیروی محرک الکتریکی **باتری** است، که برای راه‌اندازی وسایل گوناگونی، مانند ساعت مچی تا زیردریایی، به کار می‌رود. اما منبعی که در زندگی روزانه بیشترین اثر را دارد، **مولد الکتریکی** است، که از طریق رابطه‌های الکتریکی (سیم‌ها) متصل به نیروگاه برق اختلاف پتانسیل مورد نیاز خانه‌ها و کارگاه‌ها را تأمین می‌کند. منبع نیروی محرک الکتریکی به نام **سلول خورشیدی**، که سال‌ها به صورت صفحه‌های بال مانند در فضاپیماها مورد استفاده قرار گرفته است، امروزه در همه جا، حتی در روستاها، به‌مصرف کارهای خانگی می‌رسد. منبع‌های نیروی محرک الکتریکی که با آنها کمتر سر و کار داریم، عبارت‌اند از **پیل‌های سوختی**، که توان مورد نیاز شاتل‌های فضایی را تأمین می‌کنند، و **ترموپیل‌ها**، که توان الکتریکی لازم برای برخی فضاپیماها و ایستگاه‌های دور واقع در جنوبگان، و جاهای دیگر را تولید می‌کنند. منبع‌های دیگر نیروی محرک الکتریکی که شکل یک ابزار را ندارند، سیستم‌های زنده‌اند، که از مارماهی‌های الکتریکی و انسان گرفته تا گیاهان را تشکیل می‌دهند و دارای منبع‌های نیروی محرک الکتریکی فیزیولوژیکی هستند.

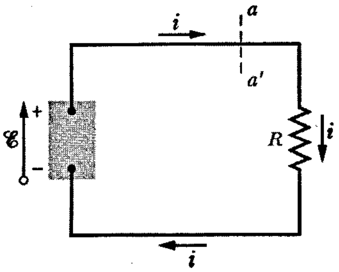
اگرچه نحوهٔ کار وسایل نام برده شده بسیار متفاوت است، عملکرد اصلی در تمام منبع‌های نیروی محرک الکتریکی یکسان است، یعنی، آنها می‌توانند با انجام دادن کار روی حامل‌های بار الکتریکی اختلاف پتانسیل را در بین پایانه‌های خود نگه دارند.



بزرگترین باتری دنیا، که در چینو[1] کالیفرنیا قرار دارد، دارای قدرت تولید توان ۱۰MW است. این باتری هنگامی به کار می‌رود که مصرف توان الکتریکی مورد تقاضا از سیستم الکتریکی شرکت ادیسون کالیفرنیای جنوبی[2] به حداکثر برسد. چون این باتری روی حامل‌های بار کار انجام می‌دهد، یک منبع نیروی محرک الکتریکی است.

۲۸ـ۲ کار، انرژی، و نیروی محرک الکتریکی

شکل ۲۸ـ۱، یک منبع نیروی محرک الکتریکی را (که می‌تواند یک باتری باشد) به صورت بخشی از یک مدار سادهٔ شامل تک مقاومت R نشان می‌دهد (نماد مداری مقاومت و سیم مقاومت‌دار به شکل ـــ∿∿∿ـــ است). یکی از پایانه‌های منبع نیروی محرک الکتریکی (به نام پایانهٔ مثبت، که اغلب با علامت + نشان داده می‌شود) نسبت به پایانهٔ دیگر (به نام پایانهٔ منفی، که با علامت − نشان داده می‌شود) در پتانسیل الکتریکی بالاتری قرار دارد. نیروی محرک الکتریکی منبع را می‌توان، مطابق شکل ۲۸ـ۱، با پیکانی که جهتش از پایانهٔ منفی به سوی پایانهٔ مثبت است، نمایش داد. برای آنکه پیکان نیروی محرک از پیکان نمایش دهندهٔ جریان الکتریکی متمایز باشد، روی دُم آن دایرهٔ کوچکی رسم شده است.



شکل ۲۸ـ۱ نمودار یک مدار الکتریکی ساده، که در آن منبع نیروی محرک $\mathscr{E}$ روی حامل‌های بار کار انجام می‌دهد و جریان پایای i را در مقاومت R برقرار می‌کند.

1. Chino
2. Southern California Edison

وقتی یک منبع نیروی محرک الکتریکی به مدار وصل نشده است، واکنش‌های شیمیایی درونی در منبع هیچ جریان خالصی از حامل‌های بار به‌وجود نمی‌آورند. اما هنگامی که منبع نیروی محرک، مطابق شکل ۲۸-۱، به مداری وصل می‌شود، واکنش‌های شیمیایی درونی سبب می‌شوند جریان خالصی از حامل‌های بار مثبت، در جهت پیکان نیروی محرک، از پایانهٔ منفی به سوی پایانهٔ مثبت، عبور کند. این جریان در همان جهت جریان برقرار شده در مدار است. (جهت ساعتگرد در شکل ۲۸-۱).

در درون منبع نیروی محرک، حامل‌های بار مثبت از ناحیهٔ با پتانسیل الکتریکی پایین، و در نتیجه با انرژی پتانسیل الکتریکی پایین (در پایانهٔ منفی) به سوی ناحیهٔ با پتانسیل الکتریکی بالا و انرژی پتانسیل الکتریکی بالا (در پایانهٔ مثبت)، حرکت می‌کنند. این حرکت عیناً در خلاف جهت میدان الکتریکی بین پایانه‌ها (از پایانهٔ مثبت به سوی پایانهٔ منفی) است، که باعث حرکت حامل‌های بار می‌شود.

بنابراین، نتیجه می‌گیریم که در درون منبع باید چشمه‌ای از انرژی وجود داشته باشد تا با به حرکت درآوردن بارهای الکتریکی قادر به انجام دادن کار بر روی آنها باشد. انرژی این چشمه ممکن است منشاء شیمیایی داشته باشد، که در باتری یا پیل سوختی چنین است، و ممکن است مانند مولدهای الکتریکی، نیروهای مکانیکی در این امر دخالت داشته باشند. انرژی تأمین شده ممکن است مانند ترموپیل، ناشی از اختلاف دما یا مانند سلول خورشیدی، ناشی از انرژی خورشیدی باشد.

اکنون، مدار شکل ۲۸-۱ را از دیدگاه تبدیل کار و انرژی مورد تحلیل قرار می‌دهیم. در بازهٔ زمانی dt از هر مقطع مدار، مانند aa'، بار الکتریکی dq عبور می‌کند. این مقدار بار باید از قطب با پتانسیل پایین به منبع نیروی محرک الکتریکی وارد و از قطب با پتانسیل بالا از منبع خارج شود. منبع باید مقدار کار dW را روی بار dq انجام دهد تا آن را به این طریق به حرکت وادارد. نیروی محرک الکتریکی منبع برحسب کار چنین تعریف می‌شود:

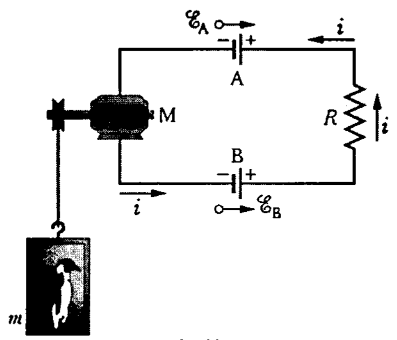
$$\mathscr{E} = \frac{dW}{dq} \qquad (\text{تعریف } \mathscr{E}) \qquad (۲۸\text{-}۱)$$ ■

به بیان دیگر، نیروی محرک الکتریکی یک منبع مقدار کار انجام شده روی یکای بار الکتریکی در حین حرکت کردن از پایانهٔ با پتانسیل پایین منبع تا پایانهٔ با پتانسیل بالاست. یکای SI نیروی محرک الکتریکی، **ژول بر کولن** (با نماد J/C) است؛ در فصل ۲۵ این یکا به نام **ولت** تعریف شد.

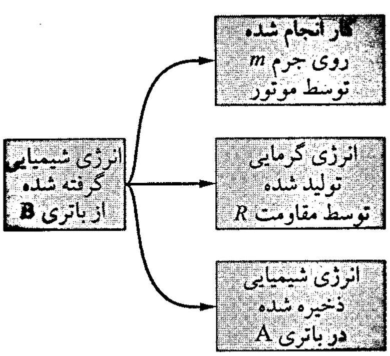
منبع نیروی محرک الکتریکی آرمانی، منبعی است که در آن در مقابل حرکت درونی بارهای الکتریکی از یک پایانه به پایانهٔ دیگر مقاومت درونی وجود ندارد. اختلاف پتانسیل میان پایانه‌های یک منبع نیروی محرک الکتریکی آرمانی برابر با نیروی محرک منبع است. برای مثال، در یک باتری آرمانی با نیروی محرک ۱۲٫۰V، اختلاف پتانسیل میان پایانه‌ها همیشه ۱۲٫۰V است.

منبع نیروی محرک الکتریکی واقعی، منبعی مانند هر باتری واقعی است که در مقابل حرکت درونی بارها دارای مقاومت درونی است. وقتی منبع نیروی محرک الکتریکی به مداری وصل نشده است، و در نتیجه جریانی از آن نمی‌گذرد، اختلاف پتانسیل میان پایانه‌ها با نیروی محرک الکتریکی برابر می‌شود. اما در موقع عبور کردن جریان، اختلاف پتانسیل میان پایانه‌ها با نیروی محرک الکتریکی تفاوت پیدا می‌کند. در مورد این نوع باتری‌های واقعی در بخش ۲۸-۴ بحث خواهد شد.

وقتی یک منبع نیروی محرک الکتریکی به مداری وصل می‌شود، منبع به حامل‌های بارگذرنده از آن انرژی می‌دهد. آنگاه، این انرژی می‌تواند از حامل‌های بار به وسایل موجود در مدار، مثلاً، به یک لامپ روشنایی، منتقل می‌شود. شکل ۲۸-۲ الف، مداری را نشان می‌دهد که شامل دو باتری بار شدنی آرمانی (انباره) A و B، مقاومت R، و موتور الکتریکی M است. موتور الکتریکی با کسب انرژی از حامل‌های بار در مدار می‌تواند یک شیء را بلند کند. توجه کنید که باتری‌ها طوری به مدار وصل شده‌اند که قرار است بارهای الکتریکی را در جهت‌های مخالف به مدار بفرستند. جهت واقعی جریان در مدار از روی باتری با نیروی محرک الکتریکی بیشتر، یعنی باتری B، معین می‌شود. بنابراین، انرژی شیمیایی درون باتری B در حین انتقال انرژی به



(الف)



(ب)

شکل ۲۸-۲ (الف) در این مدار، داریم $\mathscr{E}_B > \mathscr{E}_A$؛ بنابراین، باتری B جهت جریان را مشخص می‌کند. (ب) نمودار انتقال‌های انرژی در مدار، با این فرض که در موتور اتلاف انرژی وجود ندارد.

حامل‌های بار گذرنده از آن در حال کاهش یافتن است. اما در باتری A انرژی شیمیایی افزایش می‌یابد، زیرا جهت جریان گذرنده از آن از پایانهٔ مثبت به سوی پایانهٔ منفی است. بنابراین، باتری B باتری A را باردار می‌کند. هم‌چنین، باتری B انرژی مورد نیاز موتور M و انرژی تلف شده در مقاومت R را هم تأمین می‌کند. شکل ۲۸-۲ ب، نمودار هر سه انتقال انرژی از باتری B را نشان می‌دهد. این هر سه وسیله، انرژی شیمیایی باتری B را کاهش می‌دهند.

۲۸-۳ محاسبهٔ جریان الکتریکی در مدار تک حلقه‌ای

در اینجا برای محاسبهٔ جریان در مدار سادهٔ تک حلقه‌ای شکل ۲۸-۳ دو روش هم‌ارز را مورد بحث قرار می‌دهیم. یکی از روش‌ها مبتنی بر نکات مربوط به پایستگی انرژی و روش دیگر مبتنی بر مفهوم پتانسیل است. این مدار شامل باتری آرمانی B با نیروی محرک الکتریکی $\mathscr{E}$، مقاومت R، و دو سیم رابط است. (به‌جز در مواردی که اشاره می‌شود، فرض می‌کنیم مقاومت سیم‌های رابط در مدارها قابل چشم‌پوشی است. بنابراین، کار سیم‌ها صرفاً ایجاد مسیرهایی است که حامل‌های بار بتوانند در طول آنها حرکت کنند).

روش انرژی

معادلهٔ ۲۷-۲۲ ($P=i^2R$) نشان می‌دهد که در بازهٔ زمانی dt در مقاومت شکل ۲۸-۳، به اندازهٔ i^2Rdt انرژی گرمایی ظاهر می‌شود. (چون فرض کردیم که سیم‌های رابط مقاومت ناچیز دارند، در آنها انرژی گرمایی ظاهر نمی‌شود). در همین بازهٔ زمانی بار الکتریکی $dq=idt$ از باتری B می‌گذرد و کار انجام شده توسط باتری روی بارها، طبق معادلهٔ ۲۸-۱، برابر است با:

$$dW = \mathscr{E}dq = \mathscr{E}idt$$

با توجه به اصل پایستگی انرژی، کار انجام شده توسط باتری (آرمانی) باید با انرژی گرمایی ظاهر شده در مقاومت برابر باشد:

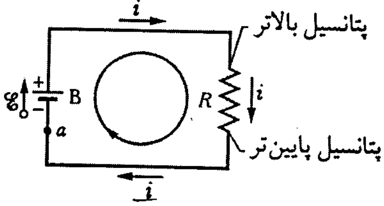
$$\mathscr{E}idt = i^2Rdt$$

که از آنجا، داریم

$$\mathscr{E} = iR$$

نیروی محرک الکتریکی $\mathscr{E}$ انرژی یکای بار است که توسط باتری به بارهای در حال حرکت داده می‌شود. کمیت iR انرژی یکای بار است که از سوی بارهای در حال حرکت به انرژی گرمایی درون مقاومت تبدیل می‌شود. بنابراین، این معادله نشان می‌دهد که انرژی یکای بار منتقل شده به بارهای در حال حرکت برابر با انرژی یکای بار گرفته شده از آنهاست. از حل کردن این معادله نسبت به i، داریم

$$i = \frac{\mathscr{E}}{R} \qquad (۲۸-۲)$$ ■



شکل ۲۸-۳ نمودار یک مدار تک حلقه‌ای که در آن مقاومت R به دو سر باتری آرمانی B با نیروی محرک الکتریکی $\mathscr{E}$ وصل شده است. جریان حاصل i، در سرتاسر مدار یکسان است.

روش پتانسیل

فرض کنید در مدار شکل ۲۸-۳، با آغاز کردن از یک نقطه در ذهن خود در جهتی دلخواه پیش می‌رویم و اختلاف پتانسیل‌های موجود در سر راه را به طور جبری با هم جمع می‌کنیم. هنگام برگشتن به نقطهٔ آغازی حرکت باید به همان پتانسیل آغازی برسیم. پیش از آنکه در واقع به چنین کاری دست بزنیم، این موضوع را به نحوی فرمول‌بندی می‌کنیم که نه تنها در مورد مدارهای تک حلقه‌ای، نظیر مدار شکل ۲۸-۳، بلکه در مورد هر حلقهٔ کاملی از یک مدار چند حلقه‌ای نیز، که در بخش ۲۸-۶ مورد بحث قرار خواهد گرفت، صادق باشد.

◄ قاعدهٔ حلقه: مجموع جبری تغییرات پتانسیل موجود در هنگام پیمودن کامل هر حلقه از یک مدار، صفر است.

این قاعده اغلب قاعدهٔ حلقهٔ کیرشهوف (یا قانون ولتاژ کیرشهوف) نامیده می‌شود، که از نام فیزیکدان آلمانی **گوستاورو برت کیرشهوف**[1] گرفته شده است. این قاعده هم‌ارز است با اینکه گفته شود هر نقطهٔ روی کوه فقط یک ارتفاع نسبت به سطح دریا دارد. اگر از هر نقطه‌ای از کوه شروع به حرکت بکنیم و پس از دور زدن کوه به همان نقطه برگردیم، مجموع جبری تغییرات ارتفاعی که پیموده‌ایم باید صفر باشد.

در شکل ۲۸-۳، از نقطهٔ a با پتانسیل V_a، در ذهن خود حرکت را آغاز می‌کنیم و در حالی که حساب تغییرات پتانسیل را در حین حرکت کردن نگه می‌داریم مدار را در جهت ساعتگرد می‌پیماییم تا به نقطهٔ a برگردیم. نقطهٔ آغاز حرکت در پایانهٔ با پتانسیل پایین باتری قرار دارد. چون باتری آرمانی است اختلاف پتانسیل میان پایانه‌های آن مساوی با $\mathscr{E}$ است. در حین عبور از باتری تا پایانهٔ با پتانسیل بالا تغییر پتانسیل $+\mathscr{E}$ است.

هنگامی که در طول سیم بالایی به سوی انتهای بالایی مقاومت حرکت می‌کنیم پتانسیل هیچ تغییری نمی‌کند، زیرا مقاومت سیم قابل چشم‌پوشی است؛ در واقع پتانسیل سیم همان پتانسیل پایانهٔ با پتانسیل بالای باتری است. پتانسیل انتهای بالایی مقاومت نیز همین مقدار است. اما وقتی از مقاومت عبور می‌کنیم پتانسیل طبق معادلهٔ ۲۷-۸ (که می‌توان آن را به صورت $V=iR$ نوشت) تغییر می‌کند. علاوه بر این، پتانسیل در طول مقاومت کاهش می‌یابد، چون، از انتهای با پتانسیل بالاتر مقاومت دور می‌شویم. بنابراین، در طول مقاومت تغییر پتانسیل $-iR$، است.

اکنون، با حرکت کردن در طول سیم پایینی، به نقطهٔ a بر می‌گردیم. چون مقاومت این سیم هم قابل چشم‌پوشی است، در طول آن پتانسیل هیچ تغییری نمی‌کند. در برگشت به نقطهٔ a باز هم پتانسیل مساوی با V_a است. چون حلقه را به طور کامل پیموده‌ایم پتانسیل آغازی همراه با تغییرات پتانسیل در طول مسیر باید با پتانسیل پایانی برابر باشد؛ یعنی

$$V_a + \mathscr{E} - iR = V_a$$

با حذف کردن V_a از دو طرف این معادله، داریم

$$\mathscr{E} - iR = 0$$

پس از حل کردن این معادله نسبت به i همان نتیجهٔ $i=\mathscr{E}/R$ حاصل می‌شود که با استفاده از روش انرژی هم (معادلهٔ ۲۸-۲) به دست آمده است.

اگر قاعدهٔ حلقه را برای دور زدن کامل مدار در جهت پادساعتگرد به کار ببریم، خواهیم داشت

$$-\mathscr{E} + iR = 0$$

و باز هم نتیجه می‌گیریم که $i=\mathscr{E}/R$. بنابراین، برای به کار بردن قاعدهٔ حلقه، می‌توان حلقه را به طور ذهنی در هر جهتی پیمود.

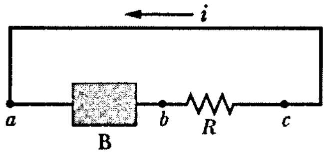
در مطالعهٔ مدارهای پیچیده‌تر از مدار شکل ۲۸-۳، برای تعیین اختلاف پتانسیل‌ها در حین پیمودن یک حلقه، دو قاعدهٔ زیر را ارائه می‌دهیم:

◄ **قاعدهٔ مقاومت**: در حین حرکت کردن در طول مقاومت، تغییر پتانسیل در جهت جریان $-iR$، و در خلاف جهت جریان $+iR$، است.

◄ **قاعدهٔ نیروی محرک الکتریکی**: در حین حرکت کردن در درون منبع نیروی محرک الکتریکی آرمانی، تغییر پتانسیل در جهت پیکان نیروی محرک الکتریکی $+\mathscr{E}$، و در خلاف جهت پیکان $-\mathscr{E}$، است.

1. Gustav Robert Kirchhoff

خودآزمایی ۱: شکل زیر، در یک مدار تک حلقه‌ای جریان i را همراه با باتری B و مقاومت R (سیم‌های با مقاومت ناچیز) نشان می‌دهد. (الف) آیا پیکان نیروی محرک الکتریکی در باتری B را باید به سمت چپ رسم کنیم، یا به سمت راست؟ در نقطه‌های a، b و c، (ب) بزرگی جریان، (پ) پتانسیل الکتریکی، و (ت) انرژی پتانسیل الکتریکی حامل‌های بار را، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



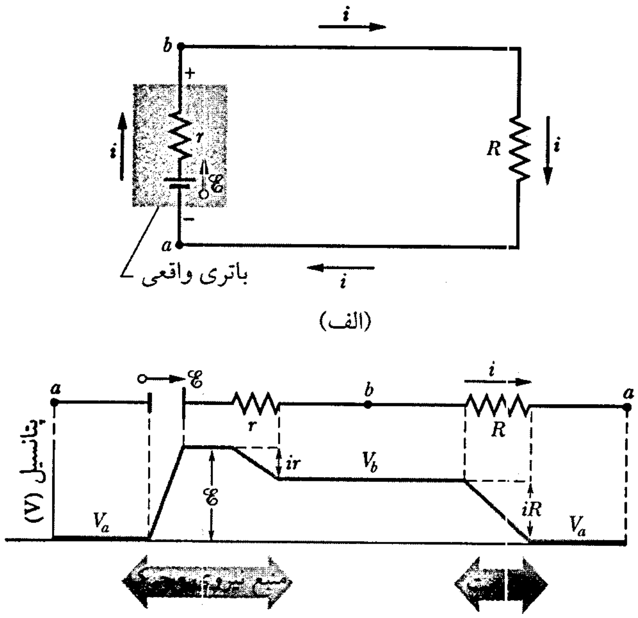
۴-۲۸ مدارهای تک حلقه‌ای دیگر

در این بخش مدار سادهٔ شکل ۲۸-۳ را در دو مورد بسط می‌دهیم.

مقاومت درونی

شکل ۲۸-۴ الف، یک باتری واقعی با مقاومت درونی r را نشان می‌دهد که به مقاومت خارجی R وصل شده است. مقاومت درونی باتری مقاومت مواد رسانای تشکیل دهندهٔ باتری است و بدین جهت نمی‌توان آن را از باتری حذف کرد. اما در شکل ۲۸-۴ الف، باتری به گونه‌ای رسم شده است که می‌تواند به صورت یک باتری آرمانی با نیروی محرک الکتریکی $\mathscr{E}$ و یک مقاومت r، جدا از هم نشان داده شود. ترتیب ترسیم نمادهای مربوط به این بخش‌های جدا شده اهمیتی ندارد.

هرگاه با آغاز کردن از نقطهٔ a و پیمودن مدار در جهت ساعتگرد قانون حلقه را به کار ببریم، برای تغییرات



(ب)

شکل ۲۸-۴ (الف) نمودار مدار تک حلقه‌ای شامل یک باتری واقعی با مقاومت درونی r و نیروی محرک الکتریکی $\mathscr{E}$. (ب) نمودار همان مدار که به صورت گسترده شده در یک خط نشان داده شده است. نمودار پتانسیل‌های موجود در مدار به هنگام پیمودن مدار در جهت ساعتگرد از نقطهٔ a نیز نشان داده شده است. مقدار پتانسیل V_a به اختیار صفر انتخاب شده است و پتانسیل‌های دیگر مدار نسبت به V_a ترسیم شده‌اند.

پتانسیل، داریم

$$\mathscr{E} - ir - iR = ۰ \qquad (۳\text{-}۲۸)$$

با حل کردن این معادله نسبت به جریان i، داریم

$$i = \frac{\mathscr{E}}{R + r} \qquad (۴\text{-}۲۸)$$

توجه کنید که اگر باتری آرمانی باشد، یعنی، به ازای $r=۰$، این معادله به شکل سادهٔ معادلهٔ ۲۸-۲ در می‌آید.

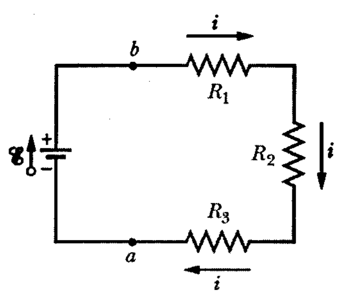
شکل ۲۸-۴ ب، نمودار ترسیمی تغییرات پتانسیل الکتریکی را در کل مدار نشان می‌دهد. (برای بهتر نشان دادن ارتباط شکل ۲۸-۴ ب با مدار بسته در شکل ۲۸-۴ الف، تصور کنید این تصویر را بر روی استوانه‌ای طوری می‌پیچیم که نقطهٔ a در سمت چپ بر روی نقطهٔ a در سمت راست منطبق شود). توجه کنید که پیمودن مدار مانند پیمودن یک کوه (پتانسیل) و برگشتن به نقطهٔ آغاز، یعنی، به همان ارتفاع آغازی است.

در این کتاب، هرگاه به واقعی بودن یا واقعی نبودن باتری اشاره‌ای نشود، یا مقاومت درونی باتری مشخص نباشد، به طور کلی، می‌توان فرض کرد که باتری آرمانی است ـ البته، در شرایط عملی باتری‌ها همیشه واقعی‌اند و مقاومت درونی دارند.

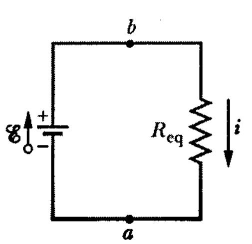
ترکیب سری مقاومت‌ها

شکل ۲۸-۵ الف، سه مقاومت را نشان می‌دهد که **به طور سری** به یک باتری آرمانی با نیروی محرک الکتریکی $\mathscr{E}$ وصل شده‌اند. این روش ارتباطی به ترتیب ترسیم مقاومت‌ها ندارد. واژهٔ «ترکیب سری» به این معنی است که مقاومت‌ها یکی پس از دیگری به هم وصل می‌شوند و اختلاف پتانسیل V به دو سر ترکیب سری مقاومت‌ها اعمال می‌شود. در شکل ۲۸-۵ الف، مقاومت‌ها در بین دو نقطهٔ a و b یکی از پس دیگری به‌هم وصل شده‌اند و اختلاف پتانسیل توسط باتری بین دو نقطهٔ a و b اعمال شده است. بنابراین، اختلاف پتانسیل‌های دو سر مقاومت‌ها در حالت سری جریان‌های یکسان i را به وجود می‌آورند. به طور کلی،

◄ هرگاه اختلاف پتانسیل V به دو سر ترکیب سری مقاومت‌ها اعمال شود، مقاومت‌ها دارای جریان یکسان i خواهند شد. مجموع اختلاف پتانسیل‌های دو سر مقاومت‌ها برابر با اختلاف پتانسیل اعمال شدهٔ V، است.



(الف)



(ب)

شکل ۲۸-۵ (الف) سه مقاومت به طور سری بین نقطه‌های a و b به هم وصل شده‌اند. (ب) نمودار مدار معادل، که در آن به جای سه مقاومت، مقاومت معادل آنها R_{eq}، قرار گرفته است.

توجه کنید که بارهای الکتریکی گذرنده از ترکیب سری مقاومت‌ها فقط می‌توانند دارای یک مسیر عبور باشند. اگر برای عبور بارها مسیرهای دیگری هم وجود داشته باشند، جریان‌ها در مقاومت‌های مختلف متفاوت خواهند بود. در نتیجه، مقاومت‌ها به طور سری به هم وصل نشده‌اند.

◄ مقاومت‌های سری را می‌توان با یک مقاومت معادل R_{eq} جانشین کرد، به گونه‌ای که از آن همان جریان i بگذرد و همان اختلاف پتانسیل کل V، مربوط به مقاومت‌های واقعی، به دو سر آن اعمال شود.

به خاطر داشته باشید که R_{eq} و تمام مقاومت‌های سری واقعی دارای جریان یکسان i هستند. شکل ۲۸-۵ ب مقاومت معادل R_{eq} را نشان می‌دهد که می‌تواند به جای سه مقاومت شکل ۲۸-۵ الف، قرار گیرد.

برای پیدا کردن رابطهٔ مربوط به R_{eq} در شکل ۲۸-۵ ب، در مورد هر دو مدار از قاعدهٔ حلقه استفاده می‌کنیم. در شکل ۲۸-۵ الف، از پایانهٔ a آغاز می‌کنیم و مدار را در جهت ساعتگرد دور می‌زنیم. در نتیجه، داریم

$$\mathscr{E} - iR_۱ - iR_۲ - iR_۳ = ۰ \quad \Rightarrow$$

$$i = \frac{\mathscr{E}}{R_۱ + R_۲ + R_۳} \qquad (۵\text{-}۲۸)$$

در شکل ۲۸ـ۵ ب، که مقاومت معادل R_{eq} را به جای سه مقاومت واقعی قرار داده‌ایم، داریم

$$\mathscr{E} - iR_{eq} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$i = \frac{\mathscr{E}}{R_{eq}} \qquad (۲۸\text{-}۶)$$

مقایسهٔ معادله‌های ۲۸ـ۵ و ۲۸ـ۶ نشان می‌دهد که:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3$$

اگر معادلهٔ بالا را برای n مقاومت بسط دهیم، داریم

$$R_{eq} = \sum_{j=1}^{n} R_j \qquad (n \text{ مقاومت سری}) \qquad (۲۸\text{-}۷)$$

■

توجه کنید که در ترکیب سری مقاومت‌ها، مقاومت معادل از تک تک مقاومت‌های واقعی بزرگ‌تر است.

خودآزمایی ۲: در شکل ۲۸ـ۵ الف، به ازای $R_1>R_2>R_3$، مقاومت‌ها را با توجه به، (الف) جریان گذرنده از آنها و (ب) اختلاف پتانسیل دو سر هر یک از آنها، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.

۲۸ـ۵ تعیین اختلاف پتانسیل

تعیین اختلاف پتانسیل میان دو نقطه موضوعی است که اغلب مورد توجه است. مثلاً، در شکل ۲۸ـ۴ الف می‌خواهیم بدانیم اختلاف پتانسیل میان نقطه‌های b و a چقدر است. برای این کار با آغاز کردن از نقطهٔ b و عبور کردن از مقاومت R مدار را در جهت ساعتگرد تا نقطهٔ a می‌پیماییم. اگر V_a و V_b به ترتیب پتانسیل‌های نقطه‌های a و b باشند، داریم

$$V_b - iR = V_a$$

هنگام عبور کردن از مقاومت در جهت جریان، با کاهش پتانسیل (طبق قاعدهٔ مقاومت) مواجه می‌شویم. رابطهٔ بالا را به صورت زیر می‌نویسیم

$$V_b - V_a = +iR \qquad (۲۸\text{-}۸)$$

این معادله نشان می‌دهد که پتانسیل نقطهٔ b بالاتر از پتانسیل نقطهٔ a است. از ترکیب معادلهٔ ۲۸ـ۸ با معادلهٔ ۲۸ـ۴، داریم

$$V_b - V_a = \mathscr{E}\frac{R}{R + r} \qquad (۲۸\text{-}۹)$$

که در آن r مقاومت درونی منبع نیروی محرک الکتریکی است.

◄ برای تعیین اختلاف پتانسیل میان دو نقطه، مدار را از یک نقطه آغاز و در حین پیمودن مسیری تا نقطهٔ دیگر، تغییرات پتانسیل موجود را به طور جبری با هم جمع می‌کنیم.

اکنون، $V_b - V_a$ را با آغاز کردن از نقطهٔ b و عبور کردن از باتری در جهت پادساعتگرد حساب می‌کنیم. در نتیجه، داریم

$$V_b + ir - \mathscr{E} = V_a \quad \Rightarrow$$

$$V_b - V_a = \mathscr{E} - ir \qquad (۲۸\text{-}۱۰)$$

از ترکیب این معادله با معادلهٔ ۲۸ـ۴، باز هم همان معادلهٔ ۲۸ـ۹ به دست می‌آید.

کمیت $V_b - V_a$ در شکل ۲۸ـ۴ اختلاف پتانسیلی است که باتری بین پایانه‌ها برقرار می‌کند. چنانکه پیشتر نشان داده شد، $V_b - V_a$ برابر با نیروی محرک الکتریکی باتری $\mathscr{E}$، است وقتی که باتری مقاومت درونی نداشته باشد (در معادلهٔ ۲۸ـ۹، $r=0$) یا مدار باز باشد (در معادلهٔ ۲۸ـ۱۰، $i=0$).

در شکل ۲۸-۴، فرض کنید $\mathscr{E}=12V$، $R=10\Omega$ و $r=2.0\Omega$. پس، معادلهٔ ۲۸-۹ نشان می‌دهد که اختلاف پتانسیل میان پایانه‌های باتری برابر است با:

$$V_b - V_a = (12V)\frac{10\Omega}{10\Omega+2.0\Omega} = 10V$$

باتری در هنگام «عبور کردن» بارهای الکتریکی از خودش، به مقدار $\mathscr{E}=12J/C$ یا $12V$ روی یکای بار کار انجام می‌دهد. اما به خاطر مقاومت درونی باتری اختلاف پتانسیل به وجود آمده میان پایانه‌ها فقط $10J/C$ یا $10V$ است.

توان، پتانسیل و نیروی محرک الکتریکی

وقتی یک باتری، یا هر نوع منبع نیروی محرک الکتریکی دیگر، روی حامل‌های بار کار انجام می‌دهد تا جریان i را برقرار کند، انرژی را از چشمهٔ خود (مانند چشمهٔ شیمیایی در یک باتری) به حامل‌های بار انتقال می‌دهد. چون یک منبع نیروی محرک الکتریکی واقعی دارای مقاومت درونی r است، انرژی را از طریق اتلاف مقاومتی مورد بحث در بخش ۲۷-۷، به انرژی گرمایی درونی تبدیل می‌کند. اکنون این دو نوع انتقال انرژی را به‌هم ربط می‌دهیم.

آهنگ خالص انتقال انرژی از منبع نیروی محرک الکتریکی به حامل‌های بار P، از معادلهٔ ۲۷-۲۱ به دست می‌آید:

$$P = iV \qquad (۲۸-۱۱)$$

که در آن V اختلاف پتانسیل دو سر منبع نیروی محرک الکتریکی است. با استفاده از معادلهٔ ۲۸-۱۰ می‌توان $V=\mathscr{E}-ir$ را در معادلهٔ ۲۸-۱۱ جانشانی کرد. در نتیجه، خواهیم داشت

$$P = i(\mathscr{E} - ir) = i\mathscr{E} - i^2r \qquad (۲۸-۱۲)$$

جملهٔ i^2r در معادلهٔ ۲۸-۱۲ برابر با P_r، آهنگ تبدیل انرژی به انرژی گرمایی در درون منبع نیروی محرک الکتریکی است:

$$P_r = i^2r \quad \text{(آهنگ اتلاف درونی)} \qquad (۲۸-۱۳)$$

بنابراین، جملهٔ $i\mathscr{E}$ در معادلهٔ ۲۸-۱۲ باید برابر با P_{emf}، آهنگ انتقال انرژی از منبع نیروی محرک الکتریکی به حامل‌های بار و آهنگ تبدیل انرژی به انرژی گرمایی درونی، هر دو، باشد. بنابراین، داریم

$$P_{emf} = i\mathscr{E} \quad \text{(توان منبع نیروی محرک الکتریکی)} \qquad (۲۸-۱۴)$$ ■

اگر باتری را با گذراندن جریان از آن «در خلاف جهت»، دوباره باردار کنیم، در آن صورت، انتقال انرژی از حامل‌های بار به سوی باتری، هم به شکل انرژی شیمیایی باتری و هم به شکل انرژی تلف شده در مقاومت درونی r، خواهد بود. آهنگ تغییر انرژی شیمیایی از معادلهٔ ۲۸-۱۴، آهنگ اتلاف انرژی از معادلهٔ ۲۸-۱۳، و آهنگ تأمین انرژی توسط حامل‌های بار از معادلهٔ ۲۸-۱۱، به دست می‌آید.

مسألهٔ نمونهٔ ۲۸-۱

مقادیر نیروی محرک الکتریکی و مقاومت‌ها در مدار شکل ۲۸-۶ الف عبارت‌اند از:

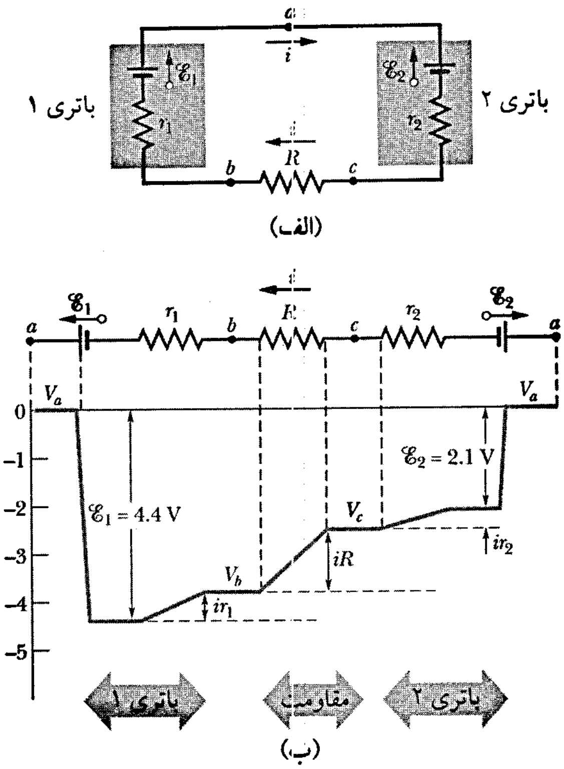
$$\mathscr{E}_1 = 4.4V,\ \mathscr{E}_2 = 2.1V$$
$$r_1 = 2.3\Omega,\ r_2 = 1.8\Omega,\ R = 5.5\Omega$$

(الف) جریان مدار i، چقدر است؟

حل: در اینجا **نکتهٔ کلیدی** این است که در این مدار تک حلقه‌ای، می‌توان با استفاده از قاعدهٔ حلقه رابطهٔ مربوط به جریان i را به دست آورد. اگرچه دانستن جهت جریان i ضروری نیست، اما به آسانی می‌توان آن را با توجه به نیروی محرک الکتریکی دو باتری مشخص کرد. چون $\mathscr{E}_1$ از $\mathscr{E}_2$ بزرگتر است، جهت i از روی باتری ۱ معین می‌شود که در جهت ساعتگرد است. اکنون، با استفاده از قاعدهٔ حلقه و با پیش رفتن در مدار در جهت پادساعتگرد، یعنی مخالف جریان، و آغاز کردن از نقطهٔ a، داریم

$$-\mathscr{E}_1 + ir_1 + iR + ir_2 + \mathscr{E}_2 = 0$$

تحقیق کنید که با به‌کار بردن قاعدهٔ حلقه در جهت ساعتگرد، یا با آغاز کردن از



شکل ۲۸ـ۶ مسألهٔ نمونهٔ ۲۸ـ۱. (الف) یک مدار تک حلقه‌ای شامل دو باتری واقعی و یک مقاومت است. باتری‌ها به صورت متقابل قرار دارند؛ یعنی، می‌خواهند جریان را در جهت‌های مخالف از مقاومت عبور دهند. (ب) نمودار پتانسیل‌ها هنگام پیش رفتن در مدار از نقطهٔ a در جهت پادساعتگرد، با صفر اختیار کردن پتانسیل در نقطهٔ a. (برای تطابق بهتر مدار با نمودار، در ذهن خود مدار را در نقطهٔ a قطع کنید و سپس طرف چپ مدار را به چپ و طرف راست مدار را به راست بپیچانید).

هر نقطهٔ دیگری به جز a، باز هم همین نتیجه به‌دست می‌آید. هم‌چنین، معادلهٔ بالا را جمله به جمله با شکل ۲۸ـ۶ ب، که نمودار ترسیمی تغییرات پتانسیل را نشان می‌دهد، مقایسه کنید. (در نقطهٔ a پتانسیل به اختیار صفر گرفته شده است).

پس از حل کردن معادلهٔ بالا نسبت به جریان i، داریم

$$i = \frac{\mathscr{E}_۱ - \mathscr{E}_۲}{R + r_۱ + r_۲} = \frac{۴٫۴\text{V} - ۲٫۱\text{V}}{۵٫۵\Omega + ۲٫۳\Omega + ۱٫۸\Omega} \Rightarrow$$

$$i = ۰٫۲۳۹۶\text{A} \approx ۲۴۰\text{mA}$$ **(پاسخ)**

(ب) اختلاف پتانسیل میان پایانه‌های باتری ۱ در شکل ۲۸ـ۶ الف، چقدر است؟

حل: نکتهٔ کلیدی جمع کردن اختلاف پتانسیل‌های میان نقطه‌های a و b است. اکنون، از نقطهٔ b (در واقع پایانهٔ منفی باتری ۱) آغاز می‌کنیم و باتری ۱ را در جهت ساعتگرد ضمن منظور کردن اختلاف پتانسیل‌ها تا نقطهٔ a (در واقع پایانهٔ مثبت باتری ۱) می‌پیماییم. در نتیجه، داریم

$$V_b - ir_۱ + \mathscr{E}_۱ = V_a$$

که از آنجا، خواهیم داشت

$$V_a - V_b = -ir_۱ + \mathscr{E}_۱$$

$$V_a - V_b = -(۰٫۲۳۹۶\text{A})(۲٫۳\Omega) + ۴٫۴\text{V} \Rightarrow$$

$$V_a - V_b = +۳٫۸۴\text{V} \approx ۳٫۸\text{V}$$ **(پاسخ)**

این مقدار از نیروی محرک الکتریکی باتری کمتر است. می‌توانید تحقیق کنید که با آغاز کردن از نقطهٔ b در شکل ۲۸ـ۶ الف و پیمودن مدار در جهت پادساعتگرد تا نقطهٔ a، همین نتیجه به دست می‌آید.

خودآزمایی ۳: نیروی محرک الکتریکی یک باتری ۱۲V و مقاومت درونی آن ۲Ω است. وقتی که جریان در باتری، (الف) از پایانهٔ منفی به پایانهٔ مثبت، (ب) از پایانهٔ مثبت به پایانهٔ منفی، و (پ) صفر، است، آیا اختلاف پتانسیل میان پایانه‌های باتری نسبت به ۱۲V، بزرگ‌تر است، کوچک‌تر است، یا مساوی است؟

روشهای مسأله حل کردن

روش ۱: فرض کردن جهت جریان

هنگام حل کردن مسأله‌های مدار، به دانستن جهت جریان از پیش نیازی نیست. اما برای آن می‌توان جهتی فرض کرد، گرچه این کار ممکن است تا حدی با جرأت همراه باشد. برای نشان دادن این موضوع، فرض کنید در شکل ۲۸ـ۶ الف، جریان در جهت پادساعتگرد است؛ یعنی، جهت پیکان نشان داده شده عوض می‌شود. اکنون، با استفاده از قاعدهٔ حلقه در جهت پادساعتگرد و آغاز کردن از نقطهٔ a، داریم

$$-\mathscr{E}_۱ - ir_۱ - iR - ir_۲ + \mathscr{E}_۲ = ۰ \Rightarrow$$

$$i = -\frac{\mathscr{E}_۱ - \mathscr{E}_۲}{R + r_۱ + r_۲}$$

با جانشانی مقادیر عددی داده شده در مسأله نمونهٔ ۲۸ـ۱ برای جریان، داریم $i = -۲۴۰\text{mA}$. علامت منها نشان می‌دهد که جهت واقعی جریان برخلاف جهت از پیش فرض شده است.

۲۸ـ۶ مدارهای چند حلقه‌ای

شکل ۲۸ـ۷، مداری را نشان می‌دهد که بیش از یک حلقه دارد. به خاطر سادگی، باتری‌ها آرمانی فرض شده‌اند. در این مدار دو پیوندگاه در نقطه‌های b و d، و سه شاخه، که این پیوندگاه‌ها را به هم وصل می‌کنند، وجود دارد. سه شاخه عبارت‌اند از: شاخهٔ سمت چپ (bad)، شاخهٔ سمت راست (bcd)، و شاخهٔ میانی (bd). جریان در هر کدام از این سه شاخه چیست؟

جریان‌ها را با استفاده از شاخص‌های پایین مختلف برای هر شاخه، به اختیار نشانه‌گذاری می‌کنیم. جریان i_1 در همه جای شاخهٔ bad، جریان i_2 در همه جای شاخهٔ bcd، و جریان i_3 در شاخهٔ bd، مقدار ثابتی دارد. جهت جریان‌ها به اختیار انتخاب شده است.

اکنون، پیوندگاه d را در نظر می‌گیریم: بارهای الکتریکی از طریق جریان‌های i_1 و i_3 به این پیوندگاه وارد و از طریق جریان i_2 از آن خارج می‌شوند. چون در پیوندگاه بار الکتریکی هیچ تغییری نمی‌کند، باید مجموع جریان‌های ورودی با مجموع جریان‌های خروجی برابر باشد:

$$i_1 + i_3 = i_2 \qquad (۲۸\text{ـ}۱۵)$$

به آسانی می‌توان دریافت که با به کار بردن این شرط در مورد پیوندگاه b هم عیناً همین معادله به دست می‌آید. بنابراین، با استفاده از معادلهٔ ۲۸ـ۱۵ اصل کلی زیر را نتیجه می‌گیریم:

◀ قاعدهٔ پیوندگاه: در هر پیوندگاه مدار، مجموع جریان‌های وارد شده برابر با مجموع جریان‌های خارج شده است.

این قاعده را اغلب قاعدهٔ پیوندگاه کیرشهوف (یا قانون جریان کیرشهوف) می‌نامند. این قاعده بیانی ساده از اصل پایستگی بار الکتریکی در حالت شارش پایاست؛ یعنی، در یک پیوندگاه بار الکتریکی نه افزوده می‌شود و نه کاسته می‌شود. بنابراین، ابزار اساسی، در حل مدارهای الکتریکی پیچیده، قاعدهٔ حلقه (مبتنی بر اصل پایستگی انرژی) و قاعدهٔ پیوندگاه (مبتنی بر اصل پایستگی بار الکتریکی) است.

معادلهٔ ۲۸ـ۱۵ تنها معادلهٔ شامل سه جریان نامعلوم است. برای حل کردن کامل مدار (یعنی، پیدا کردن هر سه جریان)، به دو معادلهٔ دیگر که شامل همان جریان‌های نامعلوم باشند، نیاز داریم. این معادله‌ها را با دو بار استفاده کردن از قاعدهٔ حلقه به دست می‌آوریم. در مدار شکل ۲۸ـ۷، سه حلقه وجود دارد که عبارت‌اند از: حلقهٔ سمت چپ $(badb)$، حلقهٔ سمت راست $(bcdb)$، و حلقهٔ بزرگ بیرونی $(badcb)$. اینکه کدام دو حلقه از این سه حلقه را انتخاب بکنیم، اهمیتی ندارد. در اینجا حلقهٔ سمت چپ و حلقهٔ سمت راست را انتخاب می‌کنیم.

اگر حلقهٔ سمت چپ را با آغاز کردن از نقطهٔ b در جهت پادساعتگرد بپیماییم، با استفاده از قاعدهٔ حلقه، داریم

$$\mathscr{E}_1 - i_1R_1 + i_3R_3 = 0 \qquad (۲۸\text{ـ}۱۶)$$

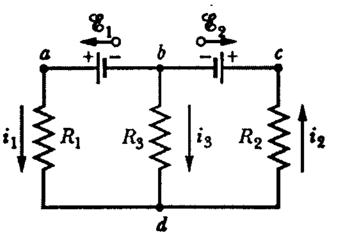
از سوی دیگر، اگر حلقهٔ سمت راست را با آغاز کردن از نقطهٔ b در جهت پادساعتگرد بپیماییم، با استفاده از قاعدهٔ حلقه، داریم

$$-i_3R_3 - i_2R_2 - \mathscr{E}_2 = 0 \qquad (۲۸\text{ـ}۱۷)$$

اکنون، سه معادله برای سه جریان نامعلوم (معادله‌های ۲۸ـ۱۵، ۲۸ـ۱۶ و ۲۸ـ۱۷) در اختیار داریم که می‌توانیم آنها را با روش‌های گوناگون حل کنیم.

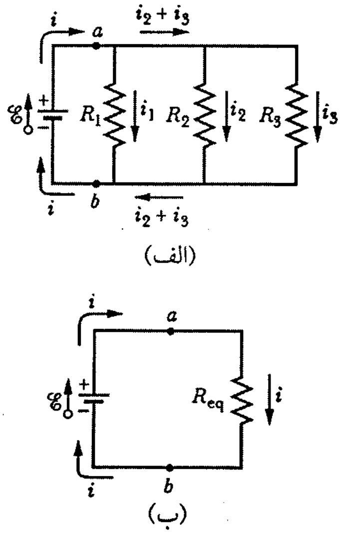
اگر قاعدهٔ حلقه را برای حلقهٔ بزرگ به کار می‌بردیم، معادلهٔ زیر را (با آغاز کردن از نقطهٔ b و حرکت کردن در جهت پادساعتگرد) به دست می‌آوریم

$$\mathscr{E}_1 - i_1R_1 - i_2R_2 - \mathscr{E}_2 = 0$$



شکل ۲۸ـ۷ نمودار یک مدار چند حلقه‌ای شامل سه شاخه: شاخهٔ سمت چپ bad، شاخهٔ سمت راست bcd، و شاخهٔ میانی bd. هم‌چنین، این مدار شامل سه حلقه است: حلقهٔ سمت چپ $badb$، حلقهٔ سمت راست $bcdb$، و حلقهٔ بزرگ بیرونی $badcb$.

ممکن است به نظر برسد که این معادله اطلاعات تازه‌ای به دست می‌دهد، اما در واقع معادله‌ای است که از مجموع معادله‌های ۲۸ـ۱۶ و ۲۸ـ۱۷ حاصل می‌شود. (البته اگر این معادله با معادلهٔ ۲۸ـ۱۵ و یکی از معادله‌های ۲۸ـ۱۶ یا ۲۸ـ۱۷ هم به کار رود نتیجه‌های مناسبی به دست می‌دهد).



شکل ۲۸ـ۸ (الف) سه مقاومت بین نقاط a و b به طور موازی وصل شده‌اند. (ب) نمودار مدار معادل، که در آن به جای سه مقاومت، مقاومت معادل آنها R_{eq}، قرار گرفته است.

ترکیب موازی مقاومت‌ها

شکل ۲۸ـ۸ الف، سه مقاومت را نشان می‌دهد که به طور موازی به یک باتری آرمانی با نیروی محرک الکتریکی $\mathscr{E}$ وصل شده‌اند. واژهٔ «ترکیب موازی» به این معنی است که یک سر مقاومت‌ها مستقیماً به هم و سر دیگر آنها هم مستقیماً به هم وصل و اختلاف پتانسیل V به این دو سر اعمال می‌شود. بنابراین، اختلاف پتانسیل دو سر هر سه مقاومت V است و از هر مقاومت جریانی عبور می‌کند. به طور کلی می‌توان گفت که:

◀ هرگاه اختلاف پتانسیل V به دو سر مقاومت‌های موازی اعمال شود مقاومت‌ها همه دارای اختلاف پتانسیل یکسان V می‌شوند.

در شکل ۲۸ـ۸ الف، اختلاف پتانسیل اعمال شدهٔ V توسط باتری تأمین می‌شود. در شکل ۲۸ـ۲ ب، سه مقاومت موازی با مقاومت معادل، R_{eq} ، جانشین شده‌اند.

◀ مقاومت‌های موازی را می‌توان با یک مقاومت معادل R_{eq} جانشین کرد، به گونه‌ای که اختلاف پتانسیل دو سر آن همان V باشد و از آن جریان کل i مربوط به مقاومت‌های واقعی بگذرد.

به خاطر داشته باشید که R_{eq} و تمام مقاومت‌های موازی واقعی دارای اختلاف پتانسیل یکسان V هستند.

برای پیدا کردن رابطهٔ مربوط به R_{eq} در شکل ۲۸ـ۸ ب، نخست جریان‌های هر یک از مقاومت‌های واقعی شکل ۲۸ـ۸ الف را به صورت زیر می‌نویسیم

$$i_1 = \frac{V}{R_1} \quad ، \quad i_2 = \frac{V}{R_2} \quad و \quad i_3 = \frac{V}{R_3}$$

در اینجا V اختلاف پتانسیل میان نقاط a و b است. اگر در نقطهٔ a در شکل ۲۸ـ۸ الف، از قاعدهٔ پیوندگاه استفاده کنیم و سپس این مقادیر را جانشین کنیم، خواهیم داشت

$$i = i_1 + i_2 + i_3 = V\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) \qquad (۲۸ـ۱۸)$$

هرگاه ترکیب موازی مقاومت‌ها را با مقاومت معادل R_{eq} جانشین کنیم (شکل ۲۸ـ۸ ب)، داریم

$$i = \frac{V}{R_{eq}} \qquad (۲۸ـ۱۹)$$

مقایسهٔ معادله‌های ۲۸ـ۱۸ و ۲۸ـ۱۹ نشان می‌دهد که:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \qquad (۲۸ـ۲۰)$$

اگر معادلهٔ بالا را برای n مقاومت، بسط دهیم، داریم

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{R_j} \qquad (\text{مقاومت موازی } n) \qquad (۲۸ـ۲۱)$$ ■

در مورد دو مقاومت، مقاومت معادل برابر با حاصل‌ضرب مقاومت‌ها تقسیم بر مجموع آنهاست؛ یعنی

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \qquad (۲۸ـ۲۲)$$

جدول ۲۸ـ۱ رابطه‌های مربوط به مقاومت‌ها و خازن‌های سری و موازی

سری	موازی	سری	موازی
مقاومت‌ها		خازن‌ها	
$R_{eq}=\sum_{j=1}^{n} R_j$ (معادلهٔ ۲۸ـ۷)	$\frac{1}{R_{eq}}=\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{R_j}$ (معادلهٔ ۲۸ـ۲۱)	$\frac{1}{C_{eq}}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{C_j}$ (معادلهٔ ۲۶ـ۲۰)	$C_{eq}=\sum_{j=1}^{n} C_j$ (معادلهٔ ۲۶ـ۱۹)
جریان در تمام مقاومت‌هایکسان است.	اختلاف پتانسیل دو سر تمام مقاومت‌ها یکسان است.	بار الکتریکی در تمام خازن‌ها یکسان است.	اختلاف پتانسیل دو سر تمام خازن‌ها یکسان است.

اگر به طور اتفاقی مقاومت معادل را از تقسیم مجموع به حاصل‌ضرب مقاومت‌ها به دست آوردید، متوجه خواهید شد که این نتیجه از نظر ابعادی نادرست است.

توجه کنید که وقتی دو یا چند مقاومت به طور موازی به هم وصل می‌شوند، مقاومت معادل از همهٔ مقاومت‌های موجود در ترکیب کوچکتر است. در جدول ۲۸ـ۱ رابطه‌های معادل مربوط به مقاومت‌ها و خازن‌های سری و موازی درج شده‌اند.

خودآزمایی ۴: یک باتری با اختلاف پتانسیل V به ترکیب دو مقاومت مشابه وصل شده است و از آن جریان i عبور می‌کند. اختلاف پتانسیل دو سر هر مقاومت و جریان گذرنده از هر یک در حالتی که مقاومت‌ها (الف) به طور سری و (ب) به طور موازی وصل شده باشند، چقدر است؟

مسألهٔ نمونهٔ ۲۸ـ۲

شکل ۲۸ـ۹ الف، مداری چند حلقه‌ای را که شامل یک باتری آرمانی و چهار مقاومت با مقادیر زیر است، نشان می‌دهد:

$$R_1 = ۲۰\Omega\,,\ R_2 = ۲۰\Omega\,,\ \mathscr{E} = ۱۲V$$
$$R_3 = ۳۰\Omega\,,\ R_4 = ۸{,}۰\Omega$$

(الف) چه جریانی از باتری می‌گذرد؟

حل: نخست توجه کنید که جریان گذرنده از باتری از R_1 هم می‌گذرد. بنابراین، یک **نکتهٔ کلیدی** این است که با به کار بردن قاعدهٔ حلقه در مورد حلقهٔ شامل R_1، می‌توان این جریان موجود در اختلاف پتانسیل دو سر R_1 را به دست آورد. این کار می‌تواند با استفاده از حلقهٔ سمت چپ یا حلقهٔ بزرگ انجام شود. توجه کنید که پیکان نیروی محرک الکتریکی به سمت بالاست. پس، جریان حاصل از باتری در جهت ساعتگرد است و ما می‌توانیم با آغازکردن از نقطهٔ a در جهت ساعتگرد قاعدهٔ حلقه را در مورد حلقهٔ سمت چپ به کار ببریم. اگر جریان گذرنده از باتری i باشد، می‌توان نوشت

$$+\mathscr{E} - iR_1 - iR_2 - iR_4 = 0 \quad \text{(معادلهٔ نادرست)}$$

این معادله نادرست است، زیرا فرض شده است که R_1، R_2 و R_4، هر سه، دارای جریان یکسان i هستند. مقاومت‌های R_1 و R_4 جریان یکسان دارند، چون جریان گذرنده از R_4 باید بدون تغییر از باتری و سپس از R_1 بگذرد. اما این جریان در پیوندگاه b تقسیم می‌شود و بخشی از آن از R_2 و بقیه از R_3 عبور می‌کند.

برای متمایز کردن جریان‌های مختلف مدار باید آنها را یکی یکی، مطابق شکل ۲۸ـ۹ ب، نامگذاری کنیم. سپس، با دور زدن حلقه از نقطهٔ a در جهت ساعتگرد، قاعدهٔ حلقه را در مورد حلقهٔ سمت چپ به کار می‌بریم:

$$+\mathscr{E} - i_1R_1 - i_2R_2 - i_1R_4 = 0$$

این معادله شامل دو مجهول، i_1 و i_2 است و برای پیدا کردن آنها دست کم به یک معادلهٔ دیگر نیاز داریم.

نکتهٔ کلیدی دوم این است که اگر مدار شکل ۲۸ـ۹ ب را با به دست آوردن مقاومت‌های معادل ساده کنیم. کار محاسبه آسان‌تر می‌شود. دقت کنید که R_1 و R_2 به صورت سری نیستند و نمی‌توان یک مقاومت معادل به جای آنها قرار داد. اما R_2 و R_3 به صورت موازی‌اند. بنابراین، با استفاده از معادلهٔ ۲۸ـ۲۱ یا معادلهٔ ۲۸ـ۲۲ می‌توان مقاومت معادل R_{23} را پیدا کرد:

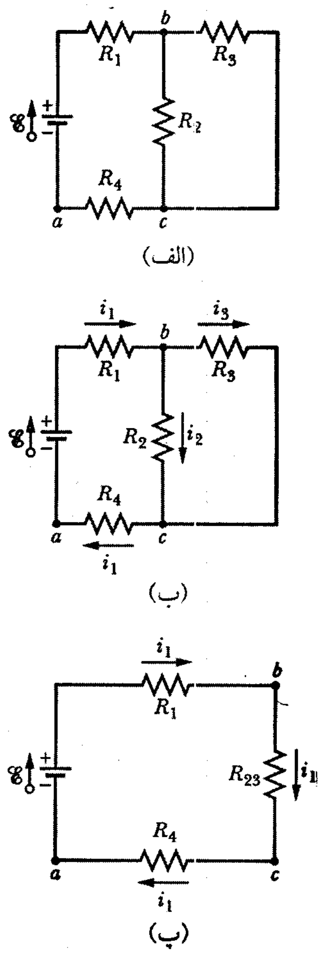
$$R_{23} = \frac{R_2R_3}{R_2 + R_3} = \frac{(۲۰\Omega)(۳۰\Omega)}{(۲۰+۳۰)\Omega} = ۱۲\Omega$$

اکنون، مدار را می‌توان دوباره به صورت شکل ۲۸ـ۹ پ رسم کرد؛ توجه کنید که جریان گذرنده از R_{23} باید i_1 باشد، چون بار الکتریکی گذرنده از R_1 و از R_4 باید از R_{23} هم عبور کند. با به کار بردن قاعدهٔ حلقه (با آغازکردن از نقطهٔ a و حرکت کردن در جهت ساعتگرد) در مورد این مدار سادهٔ تک حلقه‌ای، داریم

$$+\mathscr{E} - i_1R_1 - i_1R_{23} - i_1R_4 = 0$$

با جانشانی داده‌ها، داریم

$$۱۲V - i_1(۲۰\Omega) - i_1(۱۲\Omega) - i_1(۸{,}۰\Omega) = 0$$



شکل ۲۸ـ۹ مسألهٔ نمونهٔ ۲۸ـ۲. (الف) نمودار مداری چند حلقه‌ای شامل یک باتری آرمانی با نیروی محرک الکتریکی و چهار مقاومت. (ب) نمایش جریان‌های مفروض در مقاومت‌ها. (پ) نمودار مدار ساده شده، که در آن مقاومت معادل $R_{۲۳}$ به جای مقاومت‌های $R_۲$ و $R_۳$ قرار گرفته است. جریان گذرنده از $R_{۲۳}$ برابر با جریان گذرنده از $R_۱$ و $R_۴$ است.

و از آنجا، خواهیم داشت

$$i_۱ = \frac{۱۲V}{۴۰Ω} \quad \Rightarrow$$

$$i_۱ = ۰٫۳۰A \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

(ب) جریان $i_۲$، گذرنده از مقاومت $R_۲$ چقدر است؟

حل: در اینجا یک **نکتهٔ کلیدی** این است که روی مقاومت معادل در شکل ۲۸ـ۹ پ، یعنی $R_{۲۳}$ جانشین مقاومت‌های موازی $R_۲$ و $R_۳$، کار کنیم. **نکتهٔ کلیدی** دوم این است که چون $R_۲$ و $R_۳$ با هم موازی‌اند، اختلاف پتانسیل دو سر آنها با اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت معادل $R_{۲۳}$ برابر است. جریان گذرنده از $R_{۲۳}$، یعنی $i_۱=۰٫۳۰A$، در دست است. بنابراین، با استفاده از معادلهٔ ۲۷ـ۸ $(R=V/i)$ می‌توان $V_{۲۳}$، اختلاف پتانسیل دو سر $R_{۲۳}$، را به‌دست آورد:

$$V_{۲۳} = i_۱R_{۲۳} = (۰٫۳۰A)(۱۲Ω) = ۳٫۶V$$

پس، اختلاف پتانسیل دو سر $R_۲$ برابر با ۳٫۶V است و طبق معادلهٔ ۲۷ـ۸، جریان $i_۲$ که از $R_۲$ می‌گذرد، برابر است با:

$$i_۲ = \frac{V_۲}{R_۲} = \frac{۳٫۶V}{۲۰Ω} \quad \Rightarrow$$

$$i_۲ = ۰٫۱۸A \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

(پ) جریان $i_۳$، گذرنده از مقاومت $R_۳$ چقدر است؟

حل: برای پاسخ دادن به این پرسش می‌توان از روش به کار رفته در قسمت (ب)، یا از این **نکتهٔ کلیدی** استفاده کرد که: طبق قاعدهٔ پیوندگاه در نقطهٔ b از شکل ۲۸ـ۹ ب، رابطهٔ میان جریان ورودی $i_۱$ و جریان‌های خروجی $i_۲$ و $i_۳$، چنین است:

$$i_۱ = i_۲ + i_۳$$

با استفاده از این رابطه، داریم

$$i_۳ = i_۱ - i_۲ = ۰٫۳۰A - ۰٫۱۸A \quad \Rightarrow$$

$$i_۳ = ۰٫۱۲A \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

مسألهٔ نمونهٔ ۲۸ـ۳

شکل ۲۸ـ۱۰، مداری را با عنصرهای مداری زیر نشان می‌دهد:

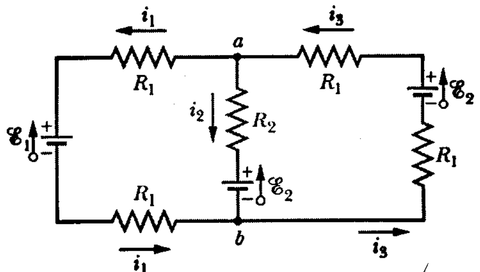
$$\mathscr{E}_۱ = ۳٫۰V\,,\ \mathscr{E}_۲ = ۶٫۰V$$

$$R_۱ = ۲٫۰Ω\,,\ R_۲ = ۴٫۰Ω$$

باتری‌ها، هر سه، آرمانی‌اند. بزرگی و جهت جریان هر یک از سه شاخه را پیدا کنید.

حل: ساده کردن این مدار فایده‌ای ندارد، چون در آن هیچ دو مقاومتی موازی نیستند، و مقاومت‌های سری (در شاخهٔ سمت راست یا در شاخهٔ سمت چپ) هم هیچ مشکلی ایجاد نمی‌کنند. بنابراین، **نکتهٔ کلیدی** استفاده از قاعده‌های پیوندگاه و حلقه است.

با توجه به جهت‌های اختیار شده برای جریان‌ها در شکل ۲۸ـ۱۰ و



شکل ۲۸ـ۱۰ مسألهٔ نمونهٔ ۲۸ـ۳. نمودار یک مدار چند حلقه‌ای شامل سه باتری آرمانی و پنج مقاومت.

کاربرد قاعدهٔ پیوندگاه در مورد نقطهٔ a می‌توان نوشت

$$i_۳ = i_۱ + i_۲ \qquad (۲۸ـ۲۳)$$

کاربرد قاعدهٔ پیوندگاه در مورد نقطهٔ b هم همین معادله را به دست می‌دهد. پس، برای دو حلقه از سه حلقهٔ مدار از قاعدهٔ حلقه استفاده می‌کنیم. نخست به اختیار حلقهٔ سمت چپ را انتخاب می‌کنیم. سپس، با آغاز کردن از نقطهٔ a، حلقه را به اختیار در جهت پادساعتگرد می‌پیماییم. در نتیجه، داریم

$$-i_1R_1 - \mathscr{E}_1 - i_1R_1 + \mathscr{E}_2 + i_2R_2 = 0$$

با جانشانی داده‌ها و ساده کردن معادلهٔ حاصل، خواهیم داشت

$$i_1(4.0\Omega) - i_2(4.0\Omega) = 3.0V \qquad (۲۸\text{-}۲۴)$$

در کاربرد دیگر قاعدهٔ حلقه، با آغاز کردن از نقطهٔ a، حلقهٔ سمت راست را در جهت ساعتگرد می‌پیماییم. در نتیجه، داریم

$$+i_3R_1 - \mathscr{E}_2 + i_3R_1 + \mathscr{E}_2 + i_2R_2 = 0$$

با جانشانی داده‌ها و ساده کردن معادلهٔ حاصل، خواهیم داشت

$$i_2(4.0\Omega) + i_3(4.0\Omega) = 0 \qquad (۲۸\text{-}۲۵)$$

با استفاده از معادلهٔ ۲۸-۲۳، جریان i_3 را از معادلهٔ ۲۸-۲۵ حذف می‌کنیم و پس از ساده کردن معادلهٔ حاصل، داریم

$$i_1(4.0\Omega) + i_2(8.0\Omega) = 0 \qquad (۲۸\text{-}۲۶)$$

اکنون، دستگاهی شامل دو معادله (معادله‌های ۲۸-۲۴ و ۲۸-۲۶) با دو مجهول (i_1 و i_2) داریم، که حل کردن آن آسان است. (یکی از روش‌های حل کردن این دستگاه معادله‌ها استفاده کردن از قاعدهٔ کرامر در پیوست ث کتاب است). در نتیجه، خواهیم داشت

$$i_2 = -0.25A$$

(علامت منها نشان می‌دهد که جهت اختیاری انتخاب شده برای i_2 در شکل ۲۸-۱۰، نادرست است؛ جهت i_2 در $\mathscr{E}_2$ و R_2 باید به سمت بالا باشد). با جانشانی $i_2 = -0.25A$ در معادلهٔ ۲۸-۲۶ و حل کردن معادلهٔ حاصل نسبت به i_1، داریم

$$i_1 = 0.50A \qquad \text{(پاسخ)}$$

پس، با استفاده از معادلهٔ ۲۸-۲۳، داریم

$$i_3 = i_1 + i_2 \quad \Rightarrow$$

$$i_3 = 0.25A \qquad \text{(پاسخ)}$$

پاسخ‌های مثبت به دست آمده برای i_1 و i_3 نشان می‌دهند که انتخاب جهت‌ها برای این جریان‌ها درست بوده است. اکنون، جهت i_2 را اصلاح می‌کنیم و بزرگی آن را به صورت زیر می‌نویسیم

$$i_2 = 0.25A \qquad \text{(پاسخ)}$$

مسألهٔ نمونهٔ ۲۸-۴

ماهی الکتریکی با سلول‌های زیست‌شناختی خود به نام **لوحهٔ الکتریکی**، که یک منبع نیروی محرک الکتریکی فیزیولوژیکی است، قادر به تولید جریان الکتریکی است. لوحه‌های الکتریکی در مارماهی امریکای جنوبی، که در تصویر سرآغاز این فصل دیده می‌شود، در ۱۴۰ ردیف مرتب شده‌اند و هر ردیف، که در طول بدن ماهی به طور افقی امتداد یافته شامل ۵۰۰۰ لوحهٔ الکتریکی است. این آرایش به صورت شکل ۲۸-۱۱ الف ارائه شده است؛ هر لوحهٔ الکتریکی دارای نیروی محرک الکتریکی $\mathscr{E}=0.15V$ و مقاومت درونی $r=0.25\Omega$ است. آب پیرامون مارماهی مدار بین دو انتهای آرایهٔ لوحه‌های الکتریکی را، که یک انتهای آن سر و انتهای دیگرش دُم ماهی است، کامل می‌کند.

(الف) اگر مقاومت آب پیرامون مارماهی $R_w=800\Omega$ باشد، مارماهی در آب چه جریانی می‌تواند تولید کند؟

حل: در اینجا **نکتهٔ کلیدی** این است که با جانشین کردن ترکیب منبع‌های نیروی محرک الکتریکی و ترکیب مقاومت‌های درونی با منبع‌های نیروی محرک و مقاومت‌های درونی معادل، می‌توان مدار شکل ۲۸-۱۱ الف را ساده کرد. نخست، یک ردیف تنها را در نظر می‌گیریم. نیروی محرک الکتریکی کل $\mathscr{E}_{row}$، در طول یک ردیف شامل ۵۰۰۰ لوحه، برابر با مجموع نیروهای محرک الکتریکی است:

$$\mathscr{E}_{row} = 5000\mathscr{E} = (5000)(0.15V) = 750V$$

مقاومت کل R_{row}، در طول یک ردیف برابر با مجموع مقاومت‌های درونی ۵۰۰۰ لوحهٔ الکتریکی است:

$$R_{row} = 5000r = (5000)(0.25\Omega) = 1250\Omega$$

اکنون، هر یک از ۱۴۰ ردیف مشابه را می‌توان با یک نیروی محرک الکتریکی $\mathscr{E}_{row}$ و تک مقاومت R_{row}، مطابق شکل ۲۸-۱۱ ب، نمایش داد.

در شکل ۲۸-۱۱ ب، نیروی محرک الکتریکی میان نقطهٔ a و نقطهٔ b در هر ردیف برابر است با $\mathscr{E}_{row}=750V$. چون ردیف‌ها مشابه‌اند، و نیز در سمت چپ شکل ۲۸-۱۱ ب همگی به هم وصل شده‌اند، تمام نقطه‌های b در آن شکل دارای پتانسیل الکتریکی یکسان‌اند. بنابراین، می‌توان فرض کرد که این نقطه‌ها طوری به هم وصل شده‌اند که گویی تنها یک نقطهٔ b وجود دارد. نیروی محرک الکتریکی میان نقطهٔ a و این تک نقطهٔ b برابر است با $\mathscr{E}_{row}=750V$. درنتیجه، مدار معادل را می‌توان به‌صورت شکل ۲۸-۱۱ پ رسم کرد.

در میان نقطه‌های b و c در شکل ۲۸-۱۱ پ، ۱۴۰ مقاومت $R_{row}=1250\Omega$ وجود دارد که همگی موازی‌اند. مقاومت معادل این ترکیب R_{eq}، با استفاده از معادلهٔ ۲۸-۲۱ به دست می‌آید:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{j=1}^{140} \frac{1}{R_j} = 140\frac{1}{R_{row}} \quad \Rightarrow$$

$$R_{eq} = \frac{R_{row}}{140} = \frac{1250\Omega}{140} = 8.93\Omega$$

با قرار دادن R_{eq} به جای ترکیب موازی مقاومت‌ها، مدار ساده شدهٔ شکل ۲۸-۱۱ ت، به دست می‌آید. با به کار بردن قاعدهٔ حلقه در مورد این مدار در جهت پادساعتگرد و آغاز کردن از نقطهٔ b، داریم

$$\mathscr{E}_{row} - iR_w - iR_{eq} = ۰$$

پس از حل کردن این معادله نسبت به i و جانشانی داده‌ها، داریم

$$i = \frac{\mathscr{E}_{row}}{R_w + R_{eq}} = \frac{۷۵۰V}{۸۰۰\Omega + ۸{,}۹۳\Omega} \Rightarrow$$

$$i = ۰{,}۹۲۷A \approx ۰{,}۹۳A \quad \text{(پاسخ)}$$

اگر سَر یا دُم مارماهی در حوالی یک ماهی قرار گیرد، بخشی از این جریان می‌تواند در مسیری باریک از بدن ماهی بگذرد و آن را بی‌حس کند یا بکشد.

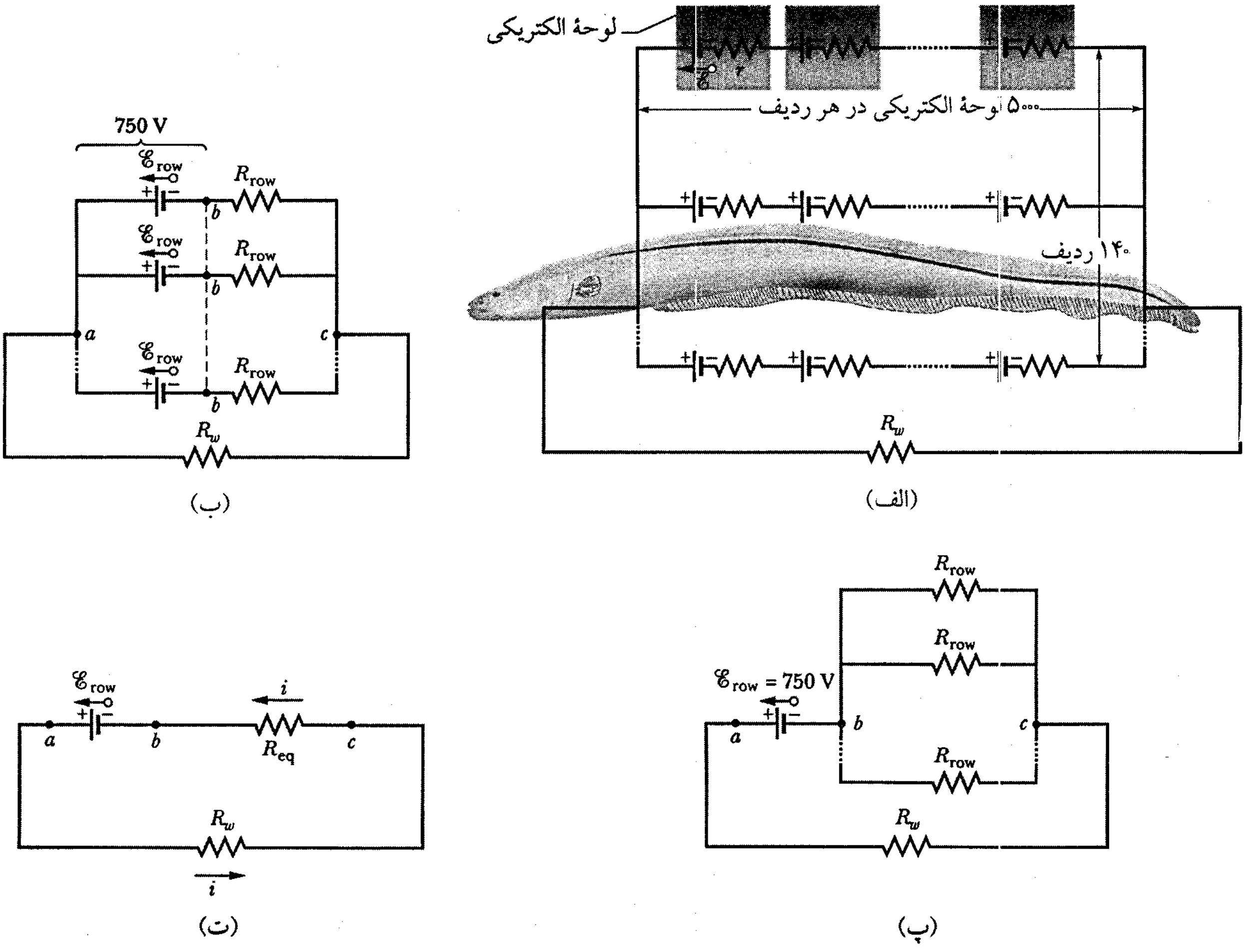
(ب) در شکل ۲۸-۱۱ الف، جریان گذرنده از هر ردیف i_{row}، چقدر است؟

حل: در اینجا **نکتهٔ کلیدی** این است که به خاطر مشابه بودن ردیف‌ها جریان وارد شده به مارماهی و خارج شده از آن، به تساوی بین ردیف‌ها تقسیم می‌شود:

$$i_{row} = \frac{i}{۱۴۰} = \frac{۰{,}۹۲۷A}{۱۴۰} \Rightarrow$$

$$i_{row} = ۶{,}۶ \times ۱۰^{-۳}A \quad \text{(پاسخ)}$$

بنابراین، جریان گذرنده از هر ردیف کم و مرتبه‌ی بزرگی آن ۱۰۰ برابر کمتر از جریان گذرنده از آب است. این امر سبب می‌شود جریان الکتریکی در بدن مارماهی پخش شود تا هنگامی که مارماهی یک ماهی را بی‌حس می‌کند یا می‌کشد، خودش بی‌حس یا کشته نشود.



شکل ۲۸-۱۱ مسألهٔ نمونهٔ ۲۸-۴. (الف) نمایش مدل مدار الکتریکی یک‌مارماهی در درون آب. نیروی محرک الکتریکی هر لوحهٔ الکتریکی $\mathscr{E}$ و مقاومت درونی آن r است. در طول هر یک از ردیف‌های ۱۴۰ تایی، که از سَر تا دُم مارماهی امتداد دارند، ۵۰۰۰ لوحهٔ الکتریکی وجود دارد. مقاومت آب پیرامون مارماهی R_w است. (ب) نمودار نیروی محرک الکتریکی $\mathscr{E}_{row}$ و مقاومت R_{row} در هر ردیف. (پ) نیروی محرک الکتریکی میان نقطه‌های a و b، برابر با $\mathscr{E}_{row}$ است. در میان نقطه‌های b و c، ۱۴۰ مقاومت موازی R_{row} وجود دارد. (ت) نمودار مدار ساده شده، که در آن R_{eq} به جای ترکیب موازی مقاومت‌ها قرار گرفته است.

روشهای مسأله حل کردن

روش ۲: حل کردن مدارهای مربوط به باتری‌ها و مقاومت‌ها
برای حل کردن مدارها و محاسبهٔ جریان‌ها یا اختلاف پتانسیل‌ها دو روش کلی وجود دارد.

۱. اگر با جانشین کردن مقاومت‌های سری یا موازی با مقاومت‌های معادل می‌توانید مدار را ساده کنید، این کار را بکنید. اگر بتوانید مدار را به صورت تک حلقه ساده کنید، آن وقت، مانند مسألهٔ نمونهٔ ۲۸ـ۲ الف، می‌توانید جریان گذرنده از باتری واقع در آن حلقه را پیدا کنید. در این صورت، مجبورید «عکس» فرایند ساده کردن مقاومت‌ها را عمل کنید تا بتوانید جریان یا اختلاف پتانسیل هر مقاومت خالص، مانند مسألهٔ نمونهٔ ۲۸ـ۲ ب، را پیدا کنید.

۲. اگر نمی‌توانید مدار را به صورت تک حلقه درآورید، مانند مسألهٔ نمونهٔ ۲۸ـ۳، از قاعدهٔ پیوندگاه و قاعدهٔ حلقه برای نوشتن مجموعه معادله‌های همزمان استفاده کنید. به تعداد مجهول‌های موجود در معادله‌ها، معادلهٔ مستقل نیاز دارید. اگر باید جریان یا اختلاف پتانسیل مقاومت خاصی را پیدا کنید، می‌توانید مطمئن شوید که جریان یا اختلاف پتانسیل آن مقاومت، دست کم در یکی از معادله‌های مربوط به حلقه‌های شامل آن مقاومت، ظاهر می‌شود.

روش ۳: گزینه‌های اختیاری در حل کردن مسأله‌های مدار
در مسألهٔ نمونهٔ ۲۸ـ۳، چند گزینهٔ اختیاری داشتیم. (۱) جهت‌های جریان‌ها را در شکل ۲۸ـ۱۰ به اختیار برگزیدیم. (۲) هر یک از سه حلقهٔ ممکن برای نوشتن معادله‌ها را به اختیار برگزیدیم. (۳) جهت حرکت در حین پیمودن حلقه را به اختیار برگزیدیم. (۴) برای هر مسیر حرکت، نقطه‌های آغاز و پایان را به اختیار برگزیدیم.

داشتن گزینهٔ اختیاری، اغلب، افراد مبتدی را در حل کردن مسأله‌های مدار نگران می‌کند، اما برای افراد کارآزموده این موضوع مشکلی به وجود نمی‌آورد. فقط کافی است که دو قاعده را دقیقاً به خاطر بسپارید. اول، اطمینان حاصل کنید که هر حلقهٔ برگزیده را به طور کامل پیموده‌اید. دوم، همین که برای یک جریان جهتی انتخاب کردید، آن جهت را تا به دست آوردن مقادیر تمام جریان‌ها حفظ کنید. اگر در مورد جهت جریان اشتباه کرده باشید، نتیجهٔ حاصل با یک علامت منها آن را به شما نشان خواهد داد. در این صورت، می‌توانید علامت منفی را حذف و جهت پیکان جریان را در نمودار جریان عوض کنید. اما، همان گونه که در مسألهٔ ۲۸ـ۳ عمل کردیم، **پیش از کامل شدن تمام محاسبات لازم برای مدار، این تصحیح را انجام ندهید.**

۲۸ـ۷ آمپرسنج و ولت‌سنج

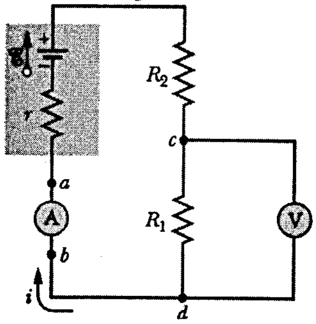
وسیله‌ای که برای اندازه‌گیری جریان به کار می‌رود، آمپرسنج نام دارد. برای تعیین جریان یک سیم باید معمولاً، سیم را قطع کنید و آمپرسنج را در محل قطع شده جا بدهید، به طوری که جریان مورد نظر از آمپرسنج بگذرد. (در شکل ۲۸ـ۱۲، آمپرسنج A برای اندازه‌گیری جریان i به کار رفته است).

مقاومت آمپرسنج R_A، اساساً باید در مقایسه با مقاومت‌های دیگر مدار بسیار کوچک باشد، وگرنه وجود خود آمپرسنج جریان مورد اندازه‌گیری را تغییر خواهد داد.

وسیله‌ای که برای اندازه‌گیری اختلاف پتانسیل به کار می‌رود، ولت‌سنج نام دارد. برای تعیین اختلاف پتانسیل میان دو نقطه از مدار، باید بدون قطع کردن مدار، دو سر ولت‌سنج را به آن دو نقطه وصل کرد. (در شکل ۲۸ـ۱۲، ولت‌سنج V برای اندازه‌گیری ولتاژ دو سر R_1 به کار رفته است).

مقاومت ولت‌سنج R_V، اساساً باید در مقایسه با مقاومت‌هایی از مدار که بین دو سر ولت‌سنج قرار می‌گیرند بسیار بزرگ باشد، وگرنه خود ولت‌سنج به صورت عنصر مداری مهمی در می‌آید و اختلاف پتانسیل مورد اندازه‌گیری را تغییر می‌دهد.

اغلب، یک دستگاه اندازه‌گیری به گونه‌ای ساخته می‌شود که از طریق کلیدهای خارجی بتواند هم به عنوان آمپرسنج و هم به عنوان ولت‌سنج به کار رود. معمولاً، این دستگاه چنان طراحی می‌شود که برای اندازه‌گیری مقاومت هر عنصر متصل به دو سر دستگاه به عنوان اهم‌سنج هم کاربرد دارد. چنین دستگاه چند کاره را چند سنجشگر (مالتی متر) می‌نامند.



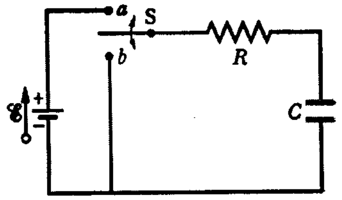
شکل ۲۸ـ۱۲ نمودار یک مدار تک حلقه‌ای، که چگونگی اتصال آمپرسنج (A) و ولت‌سنج (V) را در مدار نشان می‌دهد.

۲۸ـ۸ مدارهای RC

در بخش‌های پیش فقط با مدارهایی سر و کار داشتیم که در آنها جریان برحسب زمان تغییر نمی‌کرد. در اینجا به بحث در مورد جریان‌های متغیر با زمان می‌پردازیم.

باردار شدن خازن

در شکل ۲۸ـ۱۳، خازن با ظرفیت C ابتدا بدون بار الکتریکی است. برای باردار کردن آن کلید S را در وضعیت a قرار می‌دهیم. این عمل، مدار سری RC، شامل خازن، باتری آرمانی با نیروی محرک الکتریکی $\mathscr{E}$ و مقاومت R را کامل می‌کند.



شکل ۲۸ـ۱۳ با وصل کردن کلید S به وضعیت a، خازن از طریق مقاومت باردار می‌شود. هرگاه کلید را به وضعیت b وصل کنیم، خازن از طریق مقاومت بی‌بار می‌شود.

در بخش ۲۶ـ۲ دیدیم که به محض بسته شدن مدار در بین صفحهٔ خازن و پایانهٔ باتری متصل به هر صفحه، بارهای الکتریکی شروع به شارش می‌کنند (جریان به وجود می‌آید). این جریان بار روی صفحه‌ها q، و اختلاف پتانسیل دو سر خازن V، (مساوی با q/C) را افزایش می‌دهد. وقتی این اختلاف پتانسیل با اختلاف پتانسیل دو سر باتری (که در اینجا مساوی با نیروی محرک الکتریکی است) برابر می‌شود جریان مدار صفر می‌شود. با توجه به معادلهٔ ۲۶ـ۱ ($q=CV$)، بار تعادلی (پایانی) خازن بار شدهٔ کامل، برابر با $C\mathscr{E}$ است.

در اینجا می‌خواهیم فرایند باردار شدن را بررسی کنیم. به ویژه، می‌خواهیم بدانیم که به هنگام باردار شدن خازن، بار الکتریکی روی صفحه‌ها $q(t)$، اختلاف پتانسیل دو سر خازن $V_C(t)$ و جریان مدار $i(t)$، برحسب زمان چگونه تغییر می‌کند. این موضوع را با به کار بردن قاعدهٔ حلقه در مورد مدار آغاز می‌کنیم و مدار را از پایانهٔ منفی باتری در جهت ساعتگرد می‌پیماییم. در نتیجه، داریم

$$\mathscr{E} - iR - \frac{q}{C} = 0 \qquad (۲۸ـ۲۷)$$

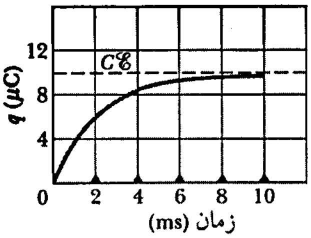
جملهٔ آخر در طرف چپ این معادله اختلاف پتانسیل دو سر خازن است. این جمله منفی است چون پتانسیل صفحهٔ بالایی خازن، که به پایانهٔ مثبت باتری وصل شده بالاتر از پتانسیل صفحهٔ پایینی است. بنابراین، از صفحهٔ بالایی خازن به سمت صفحهٔ پایینی افت پتانسیل وجود دارد.

معادلهٔ ۲۸ـ۲۷ را بی‌درنگ نمی‌توان حل کرد، زیرا دارای دو متغیر i و q است. اما این متغیرها از هم مستقل نیستند، بلکه از طریق معادلهٔ زیر به هم مربوط‌اند:

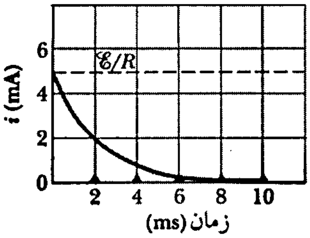
$$i = \frac{dq}{dt} \qquad (۲۸ـ۲۸)$$

با جانشانی این مقدار i در معادله ۲۸ـ۲۷ و مرتب کردن معادلهٔ حاصل، داریم

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \mathscr{E} \quad \text{(معادلهٔ باردار شدن خازن)} \qquad (۲۸ـ۲۹)$$



(الف)



(ب)

شکل ۲۸ـ۱۴ (الف) نمودار معادلهٔ ۲۸ـ۳۰، که باردار شدن خازن شکل ۲۸ـ۱۳ را نشان می‌دهد. (ب) نمودار معادلهٔ ۲۸ـ۳۱، که کاهش یافتن جریان باردارکنندهٔ خازن در مدار شکل ۲۸ـ۱۳ را نشان می‌دهد. این نمودارها به ازای $R=2000\Omega$، $C=1\mu F$، و $\mathscr{E}=10V$ رسم شده‌اند؛ مثلث‌های کوچک در طول محور زمان نشان‌دهندهٔ بازه‌های پی‌درپی مساوی با ثابت زمانی τ هستند.

این معادله دیفرانسیل نشان دهندهٔ تغییرات زمانی بار الکتریکی روی خازن q، در شکل ۲۸ـ۱۳ است. برای حل کردن این معادله باید تابع $q(t)$ را که در این معادله صدق می‌کند معین کنیم. در ضمن، در این تابع باید شرط بی‌بار بودن خازن در مبدأ زمان نیز صادق باشد؛ یعنی به ازای $t=0$، داشته باشیم $q=0$.

چنانکه نشان خواهیم داد جواب معادلهٔ ۲۸ـ۲۹ به صورت زیر است

$$q=C\mathscr{E}(1-e^{-t/RC}) \quad \text{(باردار شدن خازن)} \qquad (۲۸ـ۳۰)$$

(در اینجا e پایهٔ نمایی مساوی با... ۲٫۷۱۸ است و نماد بار بنیادی نیست). توجه کنید که معادلهٔ ۲۸ـ۳۰ با شرط آغازی، سازگار است زیرا در لحظهٔ $t=0$، جملهٔ $e^{-t/RC}$ مساوی با یک است و در نتیجه، داریم $q=0$. در ضمن، توجه کنید که وقتی t به بی‌نهایت (یعنی، به مدتی طولانی) میل می‌کند جملهٔ $e^{-t/RC}$ به صفر میل می‌کند، به گونه‌ای که معادله مقدار مناسب بار (تعادلی) کامل روی خازن، یعنی $q=C\mathscr{E}$، را به دست می‌دهد. در شکل ۲۸ـ۱۴ الف، نمودار مربوط به فرایند باردار شدن $q(t)$، رسم شده است.

جریان باردارکنندهٔ خازن $i(t)$، از مشتق $q(t)$ نسبت به زمان به دست می‌آید:

$$i = \frac{dq}{dt} = \left(\frac{\mathscr{E}}{R}\right)e^{-t/RC} \quad \text{(باردار شدن خازن)} \qquad (۲۸ـ۳۱)$$

■

در شکل ۲۸ـ۱۴ ب، نمودار مربوط به فرایند باردار شدن خازن $i(t)$، رسم شده است. توجه کنید که جریان دارای مقدار آغازی $\mathscr{E}/R$ است و هنگامی که خازن به طور کامل باردار می‌شود، این مقدار به صفر کاهش می‌یابد.

◀ خازنی که باید باردار شود، در مقابل جریان باردار کننده، در آغاز مانند یک سیم رابط (با مقاومت صفر) عمل می‌کند. پس از مدتی طولانی، رفتار خازن مانند یک سیم قطع شده (با مقاومت بی‌نهایت) است.

از ترکیب معادله‌های ۲۶-۱ ($q=CV$) و ۲۸-۳۰، نتیجه می‌گیریم که اختلاف پتانسیل دو سر خازن $V_C(t)$، در حین باردار شدن برابر است با:

$$V_C = \frac{q}{C} = \mathscr{E}(1-e^{-t/RC}) \quad \text{(باردار شدن خازن)} \quad (۲۸\text{-}۳۲) \;\blacksquare$$

این معادله نشان می‌دهد که در لحظهٔ $t=0$، داریم $V_C=0$، و وقتی خازن به ازای $t\longrightarrow\infty$ به طور کامل باردار می‌شود، داریم $V_C=\mathscr{E}$.

ثابت زمانی

حاصل‌ضرب RC ظاهر شده در معادله‌های ۲۸-۳۰، ۲۸-۳۱ و ۲۸-۳۲ دارای بُعد زمان است (زیرا نمای موجود در این معادله‌ها باید بدون بعد باشد، (در واقع، $1{,}0\,s=1{,}0\,\Omega\times1{,}0\,F$). RC **ثابت زمانی خازنی** مدار نام دارد و با نماد τ نشان داده می‌شود:

$$\tau=RC \quad \text{(ثابت زمانی)} \quad (۲۸\text{-}۳۳) \;\blacksquare$$

اکنون، با توجه به معادلهٔ ۲۸-۳۰ دیده می‌شود که در مدت زمان $t=\tau$ (مساوی با RC)، بار روی خازن بی‌بار شکل ۲۸-۱۳ در آغاز، از صفر تا مقدار زیر افزایش یافته است:

$$q = C\mathscr{E}(1-e^{-1}) = 0{,}63C\mathscr{E} \quad (۲۸\text{-}۳۴)$$

به عبارت دیگر، در ظرف نخستین ثابت زمانی τ، بار خازن از صفر تا ۶۳ درصد مقدار پایانی خود $C\mathscr{E}$، افزایش می‌یابد. در شکل ۲۸-۱۴، مثلث‌های کوچک در طول محور زمان نشان دهندهٔ بازه‌های پی‌درپی یک ثابت زمانی در هنگام باردار شدن خازن هستند. زمان‌های باردار شدن خازن در مدارهای RC را، اغلب، برحسب τ بیان می‌کنند؛ هر چه τ بزرگتر باشد، مدت زمان باردار شدن خازن بیشتر است.

بی‌بار شدن خازن

اکنون، فرض می‌کنیم خازن شکل ۲۸-۱۳ به طور کامل تا پتانسیل V_0 مساوی با نیروی محرک الکتریکی باتری $\mathscr{E}$، باردار شده است. در لحظهٔ $t=0$، کلید S از a جدا و به b وصل می‌شود تا خازن بتواند از طریق مقاومت R بی‌بار شود. در این حالت، می‌خواهیم بدانیم بار روی خازن $q(t)$، و جریان گذرنده از حلقهٔ بی‌بار شدن خازن و مقاومت $i(t)$، برحسب زمان چگونه تغییر می‌کند.

معادله دیفرانسیل توصیف کنندهٔ $q(t)$ مانند معادله ۲۸-۲۹ است، با این تفاوت که در حلقهٔ بی‌بار شدن خازن باتری وجود ندارد و $\mathscr{E}=0$. در نتیجه، داریم

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \quad \text{(معادلهٔ بی‌بار شدن خازن)} \quad (۲۸\text{-}۳۵)$$

جواب این معادله دیفرانسیل به صورت زیر است

$$q = q_0 e^{-t/RC} \quad \text{(بی‌بار شدن خازن)} \quad (۲۸\text{-}۳۶) \;\blacksquare$$

که در آن q_0 (مساوی با CV_0) بار آغازی خازن است. با جانشانی می‌توان تحقیق کرد که معادلهٔ ۲۸-۳۶ به واقع جواب معادلهٔ ۲۸-۳۵ است.

معادلهٔ ۲۸-۳۶ نشان می‌دهد که q برحسب زمان به طور نمایی کاهش می‌یابد و آهنگ این کاهش با ثابت زمانی خازنی $\tau=RC$ صورت می‌گیرد. در مدت زمان $t=\tau$، بار خازن به مقدار q_0e^{-1}، یا در حدود ۳۷ درصد

مقدار آغازی می‌رسد. توجه کنید که بزرگتر شدن τ به معنای بیشتر شدن زمان بی‌بار شدن است.

با مشتق گرفتن از معادلهٔ ۲۸ـ۳۶ نسبت به زمان جریان $i(t)$ به دست می‌آید:

$$i = \frac{dq}{dt} = -\left(\frac{q_\circ}{RC}\right)e^{-t/RC} \qquad \text{(بی‌بار شدن خازن)} \qquad (۲۸\text{ـ}۳۷)$$ ■

این معادله نشان می‌دهد که جریان برحسب زمان به طور نمایی کاهش می‌یابد و آهنگ این کاهش با τ مشخص می‌شود. جریان آغازی $i_\circ$ برابر با $q_\circ/RC$ است. توجه کنید که با کاربرد قاعدهٔ حلقه در مدار در لحظهٔ $t=\circ$، می‌توان $i_\circ$ را به دست آورد؛ درست پس از اتصال خازن به دو سر مقاومت R پتانسیل آغازی خازن $V_\circ$ است. در نتیجه، جریان مدار باید برابر باشد با:

$$i_\circ = V_\circ/R = (q_\circ/C)/R = q_\circ/RC$$

علامت منها در معادلهٔ ۲۸ـ۳۷ را می‌توان نادیده گرفت؛ این علامت صرفاً به این معناست که بار خازن q، در حال کاهش یافتن است.

به دست آوردن معادلهٔ ۲۸ـ۳۰

برای حل کردن معادلهٔ ۲۸ـ۲۹، آن را دوباره چنین می‌نویسیم:

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{\mathscr{E}}{R} \qquad (۲۸\text{ـ}۳۸)$$

جواب عمومی این معادله دیفرانسیل به صورت زیر است

$$q = q_{\rm p} + Ke^{-at} \qquad (۲۸\text{ـ}۳۹)$$

که در آن $q_{\rm p}$ جواب خصوصی معادله دیفرانسیل است، K مقدار ثابتی است که باید از شرایط آغازی حساب شود، و $a=1/RC$ ضریب q در معادلهٔ ۲۸ـ۳۸ است. برای تعیین $q_{\rm p}$، مقدار $dq/dt=\circ$ (متناظر با شرط پایانی باردار نشدن اضافی است) را در معادلهٔ ۲۸ـ۳۸ قرار می‌دهیم. با فرض $q=q_{\rm p}$ و حل کردن معادله، داریم

$$q_{\rm p} = C\mathscr{E} \qquad (۲۸\text{ـ}۴۰)$$

برای محاسبهٔ K، نخست مقدار بالا را در معادلهٔ ۲۸ـ۳۹ قرار می‌دهیم:

$$q = C\mathscr{E} + Ke^{-at}$$

سپس، با قرار دادن شرایط آغازی $q=\circ$ و $t=\circ$ در معادله، داریم

$$\circ = C\mathscr{E} + K \quad \Rightarrow$$

$$K = -C\mathscr{E}$$

سرانجام، با جانشانی مقادیر $q_{\rm p}$، a و K در معادلهٔ ۲۸ـ۳۹، داریم

$$q = C\mathscr{E} - C\mathscr{E}e^{-t/RC}$$

که با اندکی دستکاری، همان معادلهٔ ۲۸ـ۳۰ به دست می‌آید.

خودآزمایی ۵: جدول زیر چهار مجموعه از مقادیر عنصرهای مداری شکل ۲۸ـ۱۳ را به دست می‌دهد. این مجموعه‌ها را با توجه به (الف) جریان آغازی (هنگامی که کلید به a وصل شده است) و (ب) زمان لازم برای کاهش یافتن جریان تا نصف مقدار آغازی‌اش، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.

کمیت	۱	۲	۳	۴
$\mathscr{E}$(V)	۱۲	۱۲	۱۰	۱۰
$R(\Omega)$	۲	۳	۱۰	۵
$C(\mu$F)	۳	۲	۰٫۵	۲

مسألهٔ نمونهٔ ۲۸ـ۵

خازن C از طریق مقاومت R بی‌بار می‌شود.

(الف) پس از چند ثابت زمانی $\tau=RC$، بار خازن به نصف مقدار آغازی‌اش می‌رسد؟

حل: در اینجا **نکتهٔ کلیدی** این است که بار روی خازن طبق معادلهٔ ۲۸ـ۳۶ تغییر می‌کند:

$$q = q_\circ e^{-t/RC}$$

که در آن $q_\circ$ بار آغازی است. می‌خواهیم زمان t را که به ازای آن $q=\frac{۱}{۲}q_\circ$، پیدا کنیم، یعنی

$$\frac{۱}{۲}q_\circ = q_\circ e^{-t/RC} \quad (۲۸\text{ـ}۴۱)$$

پس از حذف کردن $q_\circ$، متوجه می‌شویم که زمان مورد نظر t، درون یک تابع نمایی قرار دارد. برای پیدا کردن t در معادلهٔ ۲۸ـ۴۱ از دو طرف معادله لگاریتم طبیعی می‌گیریم. (لگاریتم طبیعی تابع معکوس تابع نمایی است). در نتیجه، داریم

$$\ln\frac{۱}{۲} = \ln(e^{-t/RC}) = -\frac{t}{RC}$$

یا

$$t = (-\ln\frac{۱}{۲})RC = ۰٫۶۹RC \Rightarrow$$

$$t = ۰٫۶۹\tau$$ **(پاسخ)**

(ب) پس از چند ثابت زمانی انرژی ذخیره شده در خازن به نصف مقدار آغازی‌اش کاهش می‌یابد؟

حل: در اینجا دو **نکتهٔ کلیدی** وجود دارد. اول، انرژی ذخیره شده در خازن U، طبق معادلهٔ ۲۶ـ۲۱ ($U=q^۲/۲C$) به بار روی خازن q، مربوط است. دوم، این بار طبق معادلهٔ ۲۸ـ۳۶ کاهش می‌یابد. از ترکیب این دو نکته، داریم

$$U = \frac{q^۲}{۲C} = \frac{q_\circ^۲}{۲C}e^{-۲t/RC} = U_\circ e^{-۲t/RC}$$

که در آن $U_\circ$ انرژی ذخیره شدهٔ آغازی است. می‌خواهیم زمانی را که به ازای آن، داریم $U=\frac{۱}{۲}U_\circ$، پیدا کنیم:

$$\frac{۱}{۲}U_\circ = U_\circ e^{-۲t/RC}$$

پس از حذف کردن $U_\circ$ و گرفتن لگاریتم طبیعی از دو طرف معادله، داریم

$$\ln\frac{۱}{۲} = -\frac{۲t}{RC}$$

یا

$$t = -RC\frac{\ln\frac{۱}{۲}}{۲} = ۰٫۳۵RC \Rightarrow$$

$$t = ۰٫۳۵\tau$$ **(پاسخ)**

زمان لازم برای رسیدن مقدار بار به نصف مقدار آغازی بیشتر از زمان لازم برای رسیدن مقدار انرژی ذخیره شده به نصف مقدار آغازی است ($۰٫۶۹\tau$ در مقایسه با $۰٫۳۵\tau$). آیا این نتیجه برایتان شگفت‌انگیز نیست؟

مرور و خلاصهٔ مطالب فصل

نیروی محرک الکتریکی **منبع نیروی محرک الکتریکی** با کار کردن روی بارهای الکتریکی، میان پایانه‌های خروجی خود اختلاف پتانسیل برقرار می‌کنند. اگر dW مقدار کار لازم توسط منبع برای راندن بار مثبت dq از پایانهٔ منفی به پایانهٔ مثبت باشد، **نیروی محرک الکتریکی منبع** (کار انجام شده روی یکای بار) برابر است با:

$$\mathscr{E} = \frac{dW}{dq} \quad (\text{تعریف } \mathscr{E}) \quad (۲۸\text{ـ}۱)$$

یکای SI نیروی محرک الکتریکی، مانند یکای اختلاف پتانسیل، **ولت** است. **منبع نیروی محرک الکتریکی آرمانی**، منبعی است که مقاومت درونی ندارد. اختلاف پتانسیل میان پایانه‌های آن برابر با نیروی محرک الکتریکی است. **منبع نیروی محرک الکتریکی واقعی** دارای مقاومت درونی است. اختلاف پتانسیل میان پایانه‌های منبع فقط در هنگام عبور نکردن جریان از آن، با نیروی محرک الکتریکی برابر است.

تحلیل کردن مدارها تغییر پتانسیل مقاومت R هنگام عبور از مقاومت همسوی با جریان $-iR$، و ناهمسوی با جریان $+iR$ است. تغییر پتانسیل منبع نیروی محرک الکتریکی آرمانی در موقع عبور از منبع همسوی با پیکان نیروی محرک $+\mathscr{E}$، و ناهمسوی با پیکان $-\mathscr{E}$، است. اصل پایستگی انرژی منجر به قاعدهٔ حلقه می‌شود:

قاعدهٔ حلقه **مجموع جبری تغییرات پتانسیل موجود در هنگام پیمودن کامل هر حلقهٔ مدار، صفر است.**

اصل پایستگی بار الکتریکی منجر به قاعدهٔ پیوندگاه می‌شود:

قاعدهٔ پیوندگاه **در هر پیوندگاه مجموع جریان‌های وارد شده برابر با مجموع جریان‌های خارج شده است.**

مدارهای تک حلقه‌ای جریان در یک مدار تک حلقه‌ای شامل مقاومت R و یک منبع با نیروی محرک الکتریکی $\mathscr{E}$ و مقاومت درونی r، برابر است با:

$$i = \frac{\mathscr{E}}{R+r} \quad (۲۸\text{ـ}۴)$$

این معادله برای منبع نیروی محرک الکتریکی آرمانی به ازای $r=۰$، به شکل سادهٔ $i=\mathscr{E}/R$ در می‌آید.

توان هنگامی که یک باتری واقعی با نیروی محرک الکتریکی $\mathscr{E}$ و مقاومت

درونی r روی حامل‌های بار با جریان گذرندهٔ i کار انجام می‌دهد، آهنگ انتقال انرژی به حامل‌های بار P، برابر است با:

$$P = iV \qquad (۲۸\text{-}۱۱)$$

که در آن V اختلاف پتانسیل میان پایانه‌های باتری است. آهنگ اتلاف انرژی در درون باتری به صورت انرژی گرمایی P_r برابر است با:

$$P_r = i^2 r \qquad (۲۸\text{-}۱۳)$$

آهنگ تغییر انرژی شیمیایی در درون باتری P_{emf}، برابر است با:

$$P_{emf} = i\mathscr{E} \qquad (۲۸\text{-}۱۴)$$

ترکیب سری مقاومت‌ها مقاومت‌های سری جریان مساوی دارند. مقاومت معادلی که می‌تواند به جای ترکیب سری مقاومت‌ها قرار گیرد از معادلهٔ زیر به دست می‌آید

$$R_{eq} = \sum_{j=1}^{n} R_j \qquad \text{(مقاومت سری } n\text{)} \qquad (۲۸\text{-}۷)$$

ترکیب موازی مقاومت‌ها مقاومت‌های موازی اختلاف پتانسیل مساوی دارند. مقاومت معادلی که می‌تواند به جای ترکیب موازی مقاومت‌ها قرار گیرد از معادلهٔ زیر به دست می‌آید

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{R_j} \qquad \text{(مقاومت موازی } n\text{)} \qquad (۲۸\text{-}۲۱)$$

مدارهای RC هرگاه نیروی محرک الکتریکی $\mathscr{E}$ به یک مدار سری شامل مقاومت R و خازن C، مطابق شکل ۲۸-۱۳، اعمال شود، در حالتی که کلید به a وصل شده است، بار روی خازن طبق معادلهٔ زیر افزایش می‌یابد

$$q = C\mathscr{E}(1-e^{-t/RC}) \qquad \text{(باردار شدن خازن)} \qquad (۲۸\text{-}۳۰)$$

در این معادله $C\mathscr{E}=q_0$ بار تعادلی (پایانی) و $RC=\tau$ **ثابت زمانی خازنی** مدار است. در حین باردار شدن خازن معادلهٔ تغییرات جریان چنین است:

$$i = \frac{dq}{dt} = \left(\frac{\mathscr{E}}{R}\right)e^{-t/RC} \qquad \text{(باردار شدن خازن)} \qquad (۲۸\text{-}۳۱)$$

وقتی خازنی از طریق مقاومت R بی‌بار می‌شود، بار روی خازن طبق معادلهٔ زیر کاهش می‌یابد

$$q = q_0 e^{-t/RC} \qquad \text{(بی‌بار شدن خازن)} \qquad (۲۸\text{-}۳۶)$$

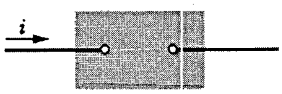
در حین بی‌بار شدن خازن معادلهٔ تغییرات جریان چنین است:

$$i = \frac{dq}{dt} = -\left(\frac{q_0}{RC}\right)e^{-t/RC} \qquad \text{(بی‌بار شدن خازن)} \qquad (۲۸\text{-}۳۷)$$

پرسش‌ها

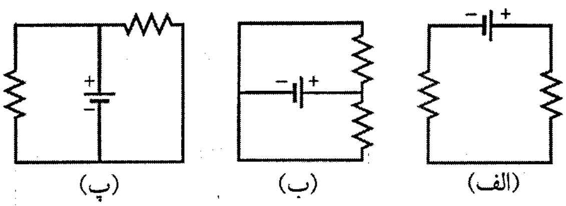
۱. شکل ۲۸-۱۵، مدار یک باتری را که از آن جریان i می‌گذرد، نشان می‌دهد. جدول زیر، چهار مجموعه از مقادیر i و نیروی محرک الکتریکی باتری $\mathscr{E}$، و مقاومت درونی باتری r، را نشان می‌دهد؛ در ضمن، در این جدول علامت قطب باتری (سمتگیری قطب‌ها) نیز مشخص شده است. این مجموعه‌ها را با توجه به آهنگ انتقال انرژی بین باتری و حامل‌های بار، از بیشترین انرژی منتقل شده به حامل‌ها تا بیشترین انرژی منتقل شده از حامل‌ها، مرتب کنید.

مجموعه	$\mathscr{E}$	r	i	علامت قطب
(۱)	$۱۵\mathscr{E}_1$	۰	i_1	+ در سمت چپ
(۲)	$۱۰\mathscr{E}_1$	۰	$۲i_1$	+ در سمت چپ
(۳)	$۱۰\mathscr{E}_1$	۰	$۲i_1$	− در سمت چپ
(۴)	$۱۰\mathscr{E}_1$	r_1	$۲i_1$	− در سمت چپ



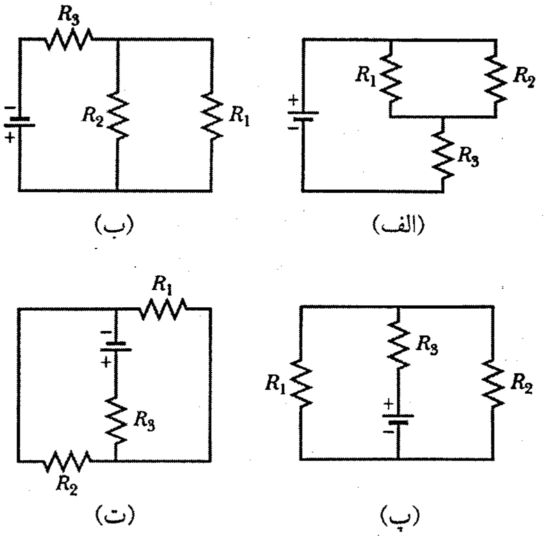
شکل ۲۸-۱۵ پرسش ۱.

۲. در هر یک از مدارهای شکل ۲۸-۱۶، آیا ترکیب مقاومت‌ها در مدار به صورت سری است، موازی است، یا هیچ کدام؟



شکل ۲۸-۱۶ پرسش ۲.

۳. (الف) در شکل ۲۸-۱۷ الف، آیا ترکیب مقاومت‌های R_1 و R_3 به صورت



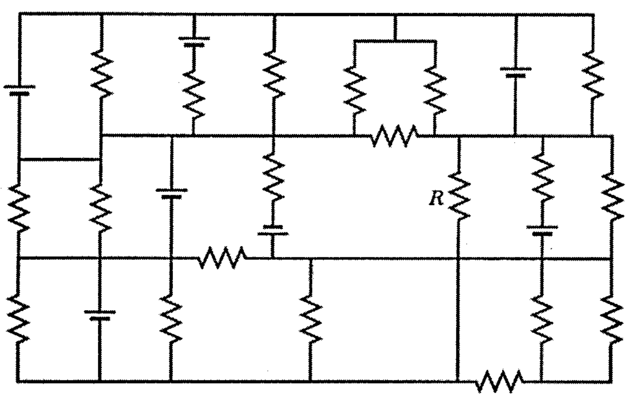
شکل ۲۸-۱۷ پرسش‌های ۳ و ۴.

سری است؟ (ب) آیا ترکیب مقاومت‌های R_1 و R_2 به صورت موازی است؟ (پ) مقاومت‌های معادل چهار مدار نشان داده شده در شکل ۲۸-۱۷ را، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.

۴. در شکل ۲۸-۱۷ الف، به ازای $R_1 > R_2$، آیا اختلاف پتانسیل دو سر R_2 نسبت به اختلاف پتانسیل دو سر R_1، بزرگتر است، کوچکتر است، یا مساوی است؟ (ب) آیا جریان گذرنده از مقاومت R_2 نسبت به جریان گذرنده از R_1، بزرگتر است، کوچکتر است، یا مساوی است؟

۵. می‌خواهیم مقاومت‌های R_1 و R_2 را با شرط $R_1 > R_2$، ابتدا تک تک، سپس به صورت سری، و آنگاه، به صورت موازی، به یک باتری وصل کنیم. این آرایش‌ها را با توجه به مقدار جریان گذرنده از باتری، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.

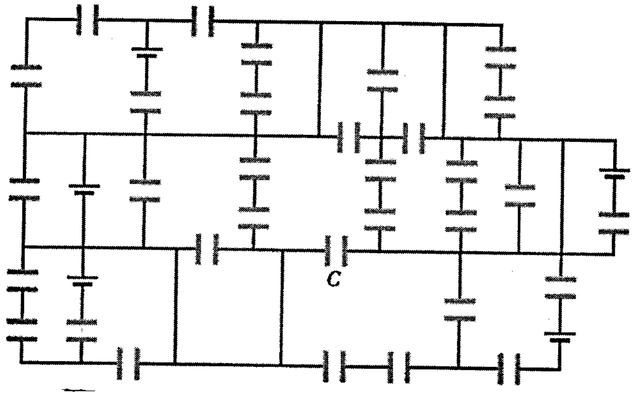
۶. شبکهٔ پیچیدهٔ مقاومت‌ها. در شکل ۲۸-۱۸، تمام مقاومت‌ها ۴٫۰ اهمی و همهٔ باتری‌ها (ی آرمانی) دارای نیروی محرک الکتریکی ۴٫۰V هستند. جریان گذرنده از مقاومت R چقدر است؟ (اگر بتوانید در این شبکه حلقهٔ مناسب را پیدا کنید، با انجام دادن محاسبات ذهنی در عرض چند ثانیه می‌توانید به این پرسش پاسخ دهید).



شکل ۲۸-۱۸ پرسش ۶.

۷. ابتدا تک مقاومت R_1 را به یک باتری وصل و سپس، مقاومت R_2 را به‌طور موازی به آن اضافه می‌کنیم. آیا (الف) اختلاف پتانسیل دو سر R_1 و (ب) جریان i گذرنده از R_1، نسبت به مقدار قبلی بیشتر است، کمتر است، یا مساوی است؟ (پ) آیا مقاومت معادل R_{12} مربوط به R_1 و R_2، نسبت به مقاومت R_1 بیشتر است، کمتر است، یا مساوی است؟ (ت) آیا جریان کل گذرنده از ترکیب موازی R_1 و R_2، نسبت به جریان قبلی گذرنده از R_1، بیشتر است، کمتر است، یا مساوی است؟

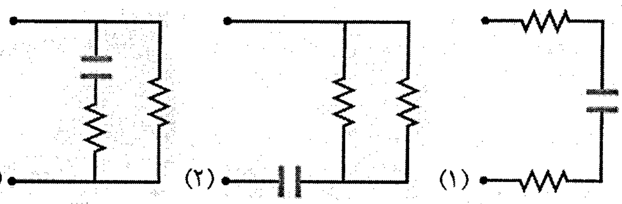
۸. شبکهٔ پیچیدهٔ خازن‌ها. در شکل ۲۸-۱۹، تمام خازن‌ها دارای ظرفیت ۶٫۰μF و همهٔ باتری‌ها دارای نیروی محرک الکتریکی ۱۰V هستند. بار روی خازن C چقدر است؟ (اگر بتوانید در این شبکه حلقهٔ مناسب را پیدا کنید، با انجام دادن محاسبات ذهنی در عرض چند ثانیه می‌توانید به این پرسش پاسخ دهید).



شکل ۲۸-۱۹ پرسش ۸.

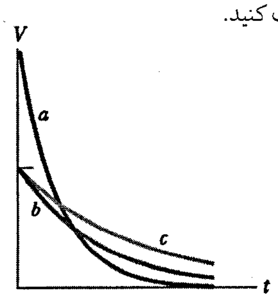
۹. ابتدا مقاومت R_1 را به یک باتری وصل و سپس مقاومت R_2 را به طور سری به آن اضافه می‌کنیم. آیا (الف) اختلاف پتانسیل دو سر R_1 و (ب) جریان i گذرنده از R_1، نسبت به مقدار قبلی بیشتر است، کمتر است، یا مساوی است؟ (پ) آیا مقاومت معادل R_{12} مربوط به R_1 و R_2، نسبت به مقاومت R_1 بیشتر است، کمتر است، یا مساوی است؟

۱۰. شکل ۲۸-۲۰، سه قطعه از مداری را نشان می‌دهد که قرار است به کمک کلیدی مانند کلید S در شکل ۲۸-۱۳، به نوبت به دو سر یک باتری وصل شود. همهٔ مقاومت‌ها مشابه و نیز همهٔ خازن‌ها مشابه‌اند. این قطعه مدارها را با توجه به (الف) بار پایانی (تعادلی) روی خازن و (ب) زمان لازم برای رسیدن بار خازن به ۵۰ درصد بار پایانی، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



شکل ۲۸-۲۰ پرسش ۱۰.

۱۱. شکل ۲۸-۲۱، نمودارهای $V(t)$، تغییرات مربوط به سه خازن را نشان می‌دهند، که هر کدام (جدا جدا) از طریق مقاومت یکسانی بی‌بار می‌شوند. این نمودارها را با توجه به ظرفیت‌های خازن‌ها، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



شکل ۲۸-۲۱ پرسش ۱۱.

تمرین‌ها و مسأله‌ها

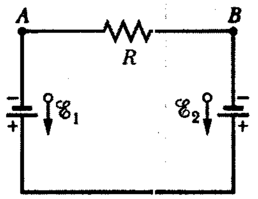
بخش ۲۸ـ۵ تعیین اختلاف پتانسیل

۱ ت. باتری استاندارد لامپ فلاش عکاسی پیش از بی‌بار شدن می‌تواند ۲ر۰ W.h انرژی تولید کند. (الف) اگر بهای هر باتری ۸۰۰ ریال باشد، با استفاده از این باتری‌ها هزینهٔ روشن شدن یک لامپ ۱۰۰ واتی به مدت ۸ر۰ ساعت چقدر می‌شود؟ (ب) اگر انرژی لازم توسط یک نیروگاه برق با بهای هر کیلووات ساعت ۶۰ ریال تأمین شود، هزینهٔ روشن شدن لامپ چقدر است؟

۲ ت. در مداری توسط یک باتری بار شدنی با نیروی محرک الکتریکی ۶ر۰ V یک جریان ۵ر۰ آمپری به مدت ۶ر۰ min برقرار می‌شود. مقدار کاهش یافتن انرژی شیمیایی باتری چقدر است؟

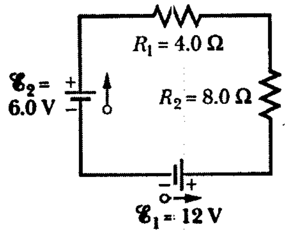
۳ ت. بار الکتریکی آغازی یک باتری ۱۲ ولتی اتومبیل ۱۲۰A.h است. به فرض آنکه اختلاف پتانسیل دو سر باتری تا بی‌بار شدن کامل آن ثابت بماند، این باتری به مدت چند ساعت می‌تواند با آهنگ ۱۰۰W انرژی بدهد؟

۴ ت. در شکل ۲۸ـ۲۲، داریم $\mathscr{E}_1=$ ۱۲V و $\mathscr{E}_2=$ ۸V. (الف) جهت جریان در مقاومت چگونه است؟ (ب) کدام باتری کار مثبت انجام می‌دهد؟ (پ) پتانسیل کدام نقطه بالاتر است، A یا B؟



شکل ۲۸ـ۲۲ تمرین ۴.

۵ ت. فرض کنید باتری‌های شکل ۲۸ـ۲۳ دارای مقاومت درونی ناچیزند. مطلوب است تعیین (الف) جریان مدار، (ب) توان تلف شده در هر مقاومت، و (پ) توان تولید شده یا جذب شده توسط هر باتری.



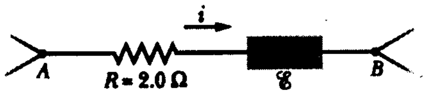
شکل ۲۸ـ۲۳ تمرین ۵.

۶ ت. سیمی به مقاومت ۵ر۰Ω به یک باتری با نیروی محرک الکتریکی ۲ر۰V و مقاومت درونی ۱ر۰Ω وصل شده است. در مدت ۲ر۰min، (الف) چقدر انرژی شیمیایی به انرژی الکتریکی تبدیل می‌شود؟ (ب) چقدر انرژی به صورت گرما در سیم ظاهر می‌شود؟ (پ) دلیل اختلاف میان قسمت‌های (الف) و (ب) را بیان کنید.

۷ ت. باتری اتومبیلی، که دارای نیروی محرک الکتریکی ۱۲V و مقاومت درونی ۰ر۰۴۰Ω است، با جریان ۵۰A باردار می‌شود. (الف) اختلاف پتانسیل دو سر باتری چقدر است؟ (ب) در این باتری انرژی گرمایی با چه آهنگی تلف می‌شود؟ (پ) انرژی الکتریکی با چه آهنگی به انرژی شیمیایی تبدیل می‌شود؟ (ت) هرگاه از این باتری برای راه انداختن موتور استارت اتومبیل با جریان ۵۰ آمپری استفاده شود، پاسخ قسمت‌های (الف) و (ب) چیست؟

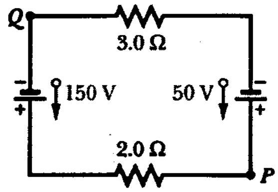
۸ ت. در شکل ۲۸ـ۴ الف، فرض کنید $\mathscr{E}=$ ۲ر۰V و $r=$ ۱۰۰Ω. منحنی‌های تغییرات (الف) جریان و (ب) اختلاف پتانسیل دو سر R را، برحسب R و در گسترهٔ صفر تا ۵۰۰Ω، رسم کنید. هر دو منحنی را روی یک دستگاه مختصات رسم کنید. (پ) با ضرب کردن عرض‌های نقاط دو منحنی رسم شده در یکدیگر به ازای هر مقدار R، منحنی سومی هم رسم کنید. مفهوم فیزیکی این منحنی سوم چیست؟

۹ ت. در مدار شکل ۲۸ـ۲۴، بخش AB در موقع عبور جریان $i=$ ۱ر۰A در جهت نشان داده شده، انرژی را با آهنگ ۵۰W جذب می‌کند. (الف) اختلاف پتانسیل میان A و B چقدر است؟ (ب) منبع نیروی محرک الکتریکی X مقاومت درونی ندارد. نیروی محرک الکتریکی آن چیست؟ (پ) قطب‌های (سمتگیری پایانه‌های مثبت و منفی) این عنصر کدام‌اند؟



شکل ۲۸ـ۲۴ تمرین ۹.

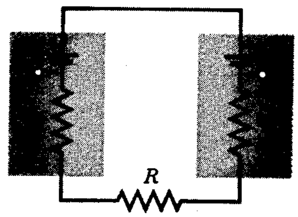
۱۰ ت. در شکل ۲۸ـ۲۵، اگر پتانسیل نقطهٔ P برابر با ۱۰۰V باشد، پتانسیل نقطهٔ Q چیست؟



شکل ۲۸ـ۲۵ تمرین ۱۰.

۱۱ ت. در شکل ۲۸ـ۶ الف، اختلاف پتانسیل میان a و c را در مسیر شامل R، r_1 و $\mathscr{E}_1$ حساب کنید.

۱۲ م. (الف) در شکل ۲۸ـ۲۶، مقدار R چقدر باید باشد تا جریان مدار ۰ر۱mA شود؟ فرض کنید $\mathscr{E}_1=$ ۰ر۲V، $\mathscr{E}_2=$ ۰ر۳V و $r_1=r_2=$ ۰ر۳Ω. (ب) آهنگ انرژی گرمایی تلف شده در R چقدر است؟



شکل ۲۸ـ۲۶ مسألهٔ ۱۲.

۱۳ م. در یک مدار تک حلقه‌ای شامل مقاومت R، جریان ۰ر۵A است. اگر یک مقاومت ۰ر۲ اهمی به طور سری با R، به مدار افزوده شود، جریان ۰ر۴A می‌شود. مقدار R چقدر است؟

۱۴ م. موتور استارت اتومبیلی نسبتاً کند می‌چرخد و تعمیرکار تصمیم می‌گیرد استارت، سیم‌کشی، یا باتری را عوض کند. طبق دفترچهٔ راهنمای اتومبیل، مقاومت درونی باتری ۱۲ ولتی از ۰۲۰ر۰Ω، مقاومت موتور استارت از ۲۰۰ر۰Ω، و مقاومت سیم‌کشی از ۰۴۰ر۰Ω نباید بیشتر باشد. تعمیرکار استارت را روشن و مشاهده می‌کند که اختلاف پتانسیل دو سر باتری ۴ر۱۱V، افت ولتاژ در سیم‌کشی ۰ر۳V و جریان مدار ۵۰A است. کدام بخش سیستم برق اتومبیل عیب دارد؟

۱۵ م. دو باتری با نیروی محرک الکتریکی یکسان $\mathscr{E}$ و مقاومت‌های درونی r_1 و r_2 $(r_1>r_2)$، به طور سری به مقاومت خارجی R وصل شده‌اند. (الف) مقاومت R را طوری معین کنید که اختلاف پتانسیل میان پایانه‌های یکی از باتری‌ها صفر باشد. (ب) این باتری، کدام است؟

۱۶ م. اختلاف پتانسیل دو سر یک سلول خورشیدی در موقع اتصال به مقاومت ۵۰۰ اهمی ۱۰ر۰V، و در موقع اتصال به مقاومت ۱۰۰۰ اهمی، ۱۵ر۰V است. (الف) مقاومت درونی و (ب) نیروی محرک الکتریکی سلول خورشیدی چقدر است؟ (پ) مساحت سطح سلول ۵ر۰cm^2 و آهنگ دریافت نور در یکای سطح سلول ۲ر۰mW/cm^2 است. بازده سلول در تبدیل انرژی نوری به انرژی گرمایی در مقاومت خارجی ۱۰۰۰ اهمی چقدر است؟

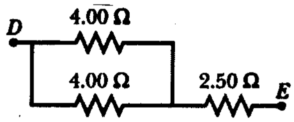
۱۷ م. (الف) در شکل ۲۸ـ۴ الف، نشان دهید که آهنگ اتلاف انرژی گرمایی در R به ازای $R=r$ بیشینه است. (ب) نشان دهید که این توان بیشینه برابر است با $P=\mathscr{E}^2/4r$.

بخش ۲۸ـ۶ مدارهای چند حلقه‌ای

۱۸ ت. با استفاده از دو مقاومت ـ به صورت تک تک، سری یا موازی ـ می‌توان مقاومت‌های ۰ر۳، ۰ر۴، ۱۲ و ۱۶ اهم را تهیه کرد. مقدار هر کدام از مقاومت‌ها چقدر است؟

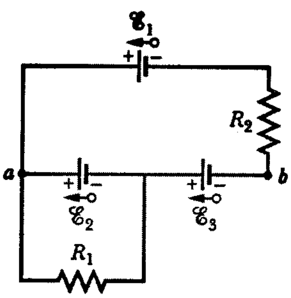
۱۹ ت. چهار مقاومت ۰ر۱۸ اهمی به طور موازی به دو سر یک باتری آرمانی ۰ر۲۵ ولتی وصل شده‌اند. چه جریانی از باتری می‌گذرد؟

۲۰ ت. در شکل ۲۸ـ۲۷، مقاومت معادل میان نقطه‌های D و E را پیدا کنید. (راهنمایی: تصور کنید یک باتری بین دو نقطهٔ D و E وصل شده است).



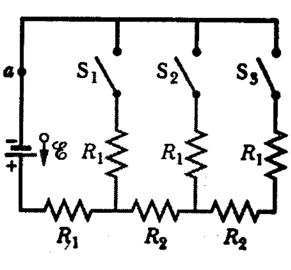
شکل ۲۸ـ۲۷ تمرین ۲۰.

۲۱ ت. در شکل ۲۸ـ۲۸، جریان هر مقاومت و اختلاف پتانسیل میان نقطه‌های a و b را پیدا کنید. فرض کنید $\mathscr{E}_1=$ ۰ر۶V، $\mathscr{E}_2=$ ۰ر۵V، $\mathscr{E}_3=$ ۰ر۴V، $R_1=$ ۱۰۰Ω، و $R_2=$ ۵۰Ω.



شکل ۲۸ـ۲۸ تمرین ۲۱.

۲۲ ت. شکل ۲۸ـ۲۹، مداری را نشان می‌دهد که شامل سه کلید S_1، S_2 و S_3 است. جریان در نقطهٔ a را برای تمام ترکیب‌های ممکن اتصال کلیدها پیدا کنید. فرض کنید $\mathscr{E}=$ ۱۲۰V، $R_1=$ ۰ر۲۰Ω، و $R_2=$ ۰ر۱۰Ω. باتری را بدون مقاومت درونی فرض کنید.



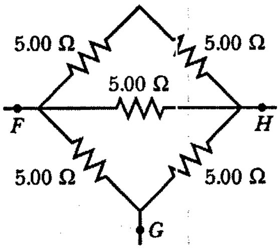
شکل ۲۸ـ۲۹ تمرین ۲۲.

۲۳ ت. دو لامپ روشنایی، یکی با مقاومت R_1 و دیگری با مقاومت R_2، با فرض $R_1>R_2$، (الف) به طور موازی، و (ب) به‌طور سری، به یک باتری وصل شده‌اند. در هر حالت کدام لامپ پرنورتر است (انرژی گرمایی بیشتری مصرف می‌کند)؟

۲۴ ت. در شکل ۲۸-۷، اختلاف پتانسیل میان نقطه‌های c و d را از طریق مسیرهای ممکن حساب کنید. فرض کنید $\mathscr{E}_1$=۴٫۰V، $\mathscr{E}_2$=۱٫۰V، $R_1=R_2$=۱۰Ω، و R_3=۵٫۰Ω.

۲۵ ت. ۹ سیم مسی، هر یک به طول l و قطر d، به طور موازی به هم وصل شده و تک رسانای مرکبی به مقاومت R تشکیل داده‌اند. D، قطر یک تک سیم مسی به طول l چقدر باید باشد تا سیم همان مقاومت R را داشته باشد؟

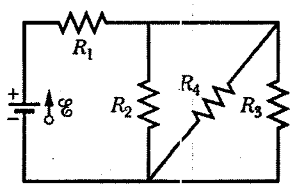
۲۶ م. در شکل ۲۸-۳۰، مقاومت معادل میان نقطه‌های (الف) F و H و (ب) F و G، را پیدا کنید. (راهنمایی: تصور کنید در بین هر زوج نقطه‌ها یک باتری وصل شده است).



شکل ۲۸-۳۰ مسألهٔ ۲۶.

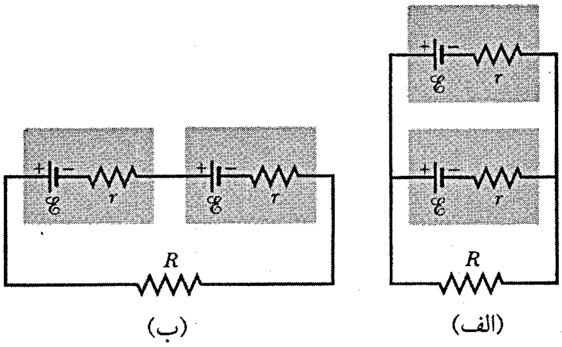
۲۷ م. تعدادی مقاومت ۱۰ اهمی در اختیار داریم که توان مصرفی هر کدام، بدون سوختن، ۱٫۰W است. به طور می‌نیمم، چند تا از این مقاومت‌ها لازم است تا از ترکیب سری یا موازی آنها یک مقاومت ۱۰ اهمی با توان مصرفی، دست کم، ۵٫۰W به دست آید؟

۲۸ م. (الف) در شکل ۲۸-۳۱، مقاومت معادل شبکهٔ نشان داده شده چقدر است؟ (ب) جریان هر یک از مقاومت‌ها چیست؟ فرض کنید R_1=۱۰۰Ω، $R_2=R_3$=۵۰Ω، R_4=۷۵Ω و $\mathscr{E}$=۶٫۰V. باتری را آرمانی فرض کنید.



شکل ۲۸-۳۱ مسألهٔ ۲۸.

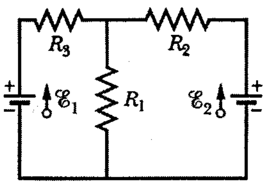
۲۹ م. دو باتری با نیروی محرک الکتریکی $\mathscr{E}$ و مقاومت درونی r، مطابق شکل ۲۸-۳۲ الف، به طور موازی به دو سر مقاومت R وصل شده‌اند. (الف) به ازای چه مقدار R آهنگ اتلاف انرژی الکتریکی در این مقاومت بیشینه است؟ (ب) این آهنگ بیشینهٔ اتلاف انرژی، چقدر است؟



شکل ۲۸-۳۲ مسأله‌های ۲۹ و ۳۰.

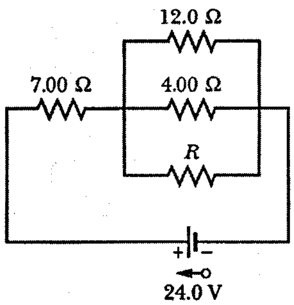
۳۰ م. دو باتری با نیروی محرک الکتریکی $\mathscr{E}$ و مقاومت درونی r در دست است. این باتری‌ها را می‌توان به طور موازی (شکل ۲۸-۳۲ الف) یا به‌طور سری (شکل ۲۸-۳۲ ب) به هم وصل و از آنها برای برقرار شدن جریان در مقاومت R استفاده کرد. (الف) رابطه‌های مربوط به جریان در مقاومت R را برای هر دو آرایش به دست آورید. در شرایط (ب) $R>r$ و (پ) $R<r$، کدام آرایش جریان بیشتری تولید می‌کند؟

۳۱ م. در شکل ۲۸-۳۳، $\mathscr{E}_1$ = ۳٫۰۰V، $\mathscr{E}_2$ = ۱٫۰۰V، R_1 = ۵٫۰۰Ω، R_2=۲٫۰۰Ω، R_3=۴٫۰۰Ω، و هر دو باتری آرمانی‌اند. آهنگ اتلاف انرژی در مقاومت‌های (الف) R_1، (ب) R_2 و (پ) R_3، چیست؟ توان (ت) باتری ۱ و (ث) باتری ۲، چقدر است؟



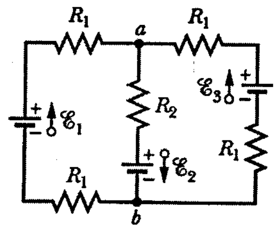
شکل ۲۸-۳۳ مسألهٔ ۳۱.

۳۲ م. در مدار شکل ۲۸-۳۴، به ازای چه مقدار از مقاومت R آهنگ انرژی داده شده به مقاومت‌ها توسط باتری آرمانی، (الف) ۶۰٫۰W، (ب) بیشترین مقدار ممکن، و (پ) کمترین مقدار ممکن، است؟ (ت) مقدار این آهنگ‌های انرژی، چقدر است؟



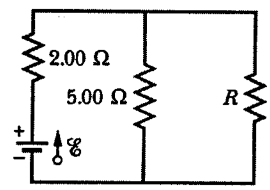
شکل ۲۸-۳۴ مسألهٔ ۳۲.

۳۳ م. (الف) جریان گذرنده از هر باتری آرمانی در شکل ۲۸-۳۵ را حساب کنید. فرض کنید R_1 = ۱٫۰Ω، R_2 = ۲٫۰Ω، $\mathscr{E}_1$ = ۲٫۰V، و $\mathscr{E}_2=\mathscr{E}_3$=۴٫۰V. (ب) $V_a - V_b$ را معین کنید.



شکل ۲۸-۳۵ مسألهٔ ۳۳.

۳۴ م. در مدار شکل ۲۸-۳۶، $\mathscr{E}$ ثابت است، اما مقدار R را می‌توان تغییر داد. R را طوری پیدا کنید که گرمای حاصل در مقاومت بیشینه باشد. باتری آرمانی است.

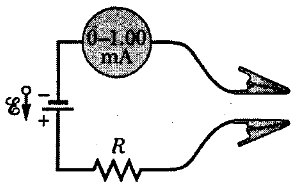


شکل ۲۸-۳۶ مسألهٔ ۳۴.

۳۵ م. یک سیم مسی به شعاع a=۰٫۲۵۰mm، دارای پوشش آلومینیومی به شعاع بیرونی b=۰٫۳۸۰mm است. (الف) جریان گذرنده از این سیم مرکب i=۲٫۰۰A است. با استفاده از جدول ۲۷-۱، جریان مربوط به هر فلز را پیدا کنید. (ب) اگر برای برقرار شدن این جریان در سیم مرکب اختلاف پتانسیل دو سر سیم V=۱۲V باشد، طول سیم چقدر است؟

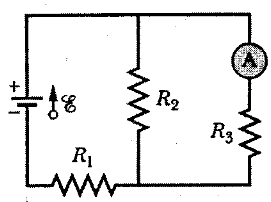
بخش ۲۸-۷ آمپرسنج و ولت‌سنج

۳۶ ت. اهم‌سنج ساده شامل یک باتری ۱٫۵۰V ولتی است که با مقاومت R و آمپرسنج با درجه‌بندی صفر تا ۱٫۰۰mA، مطابق شکل ۲۸-۳۷، به‌طور سری وصل شده است. مقدار R طوری اختیار می‌شود که وقتی دو گیرهٔ اتصال به صورت مدار کوتاه به هم وصل می‌شوند عقربهٔ آمپرسنج به اندازهٔ تمام مقیاس ۱٫۰۰mA، منحرف می‌شود. مقاومت خارجی بین دو گیرهٔ اتصال چقدر باید باشد تا به اندازهٔ انحراف عقربه نسبت به تمام مقیاس (الف) ۱۰ درصد، (ب) ۵۰ درصد، و (پ) ۹۰ درصد، باشد؟ (ت) اگر مقاومت آمپرسنج ۲۰٫۰Ω و مقاومت درونی باتری ناچیز باشد، مقدار R چقدر است؟



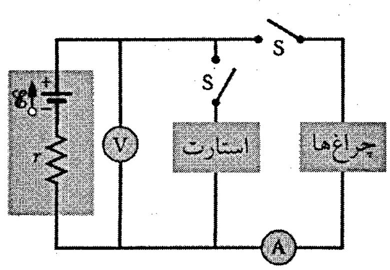
شکل ۲۸-۳۷ تمرین ۳۶.

۳۷ م. (الف) در شکل ۲۸-۳۸، با فرض $\mathscr{E}$=۵٫۰V (برای باتری آرمانی)، R_1=۲٫۰Ω، R_2=۴٫۰Ω، و R_3=۶٫۰Ω، مقداری را که آمپرسنج نشان می‌دهد معین کنید. (ب) اکنون جای آمپرسنج و منبع نیروی محرک الکتریکی را باهم عوض می‌کنیم. نشان دهید عددی که آمپرسنج می‌خواند تغییر نمی‌کند.



شکل ۲۸-۳۸ مسألهٔ ۳۷.

۳۸ م. هنگام روشن شدن چراغ‌های یک اتومبیل آمپرسنج متصل به آنها به‌طور سری ۱۰A و ولت‌سنج متصل به دو سر آنها ۱۲V را نشان می‌دهد. شکل ۲۸-۳۹ را ببینید. اما هنگامی که موتور استارت به کار می‌افتد، آمپرسنج جریان ۸٫۰A را نشان می‌دهد و چراغ‌ها اندکی کم‌نور می‌شوند. اگر مقاومت درونی باتری ۰٫۰۵۰Ω و مقاومت آمپرسنج ناچیز باشد، (الف) نیروی محرک الکتریکی باتری، و (ب) جریان گذرنده از استارت در موقع روشن بودن چراغ‌ها، چقدر است؟



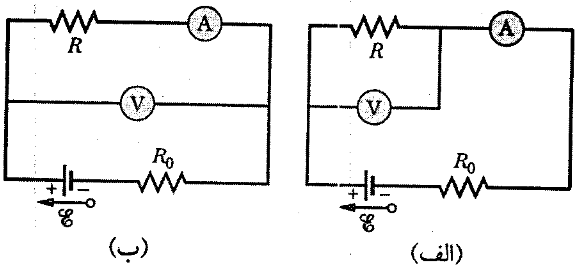
شکل ۲۸-۳۹ مسألهٔ ۳۸.

۳۹ م. در شکل ۲۸-۱۲، فرض کنید $\mathscr{E}$=۳٫۰V، r=۱۰۰Ω، R_1=۲۵۰Ω، و R_2=۳۰۰Ω. اگر مقاومت ولت‌سنج R_V، برابر با ۵٫۰kΩ باشد، چند درصد خطا در خواندن اختلاف پتانسیل دو سر R_1 ایجاد می‌شود؟ وجود آمپرسنج را نادیده بگیرید.

۴۰ م. برای اندازه‌گیری مقاومت R، ولت‌سنج (با مقاومت R_V) و آمپرسنج (با مقاومت R_A) در مداری، مطابق شکل ۲۸ـ۴۰ الف، به هم وصل شده‌اند. این مقاومت از رابطهٔ $R=V/i$ به دست می‌آید، که در آن V عدد خوانده شده با ولت‌سنج و i جریان در مقاومت R است. بخشی از جریان i' نشان داده شده توسط آمپرسنج از ولت‌سنج می‌گذرد، به طوری که نسبت مقادیر خوانده شده توسط وسایل اندازه‌گیری (یعنی V/i') مقاومت ظاهری R' را به‌دست می‌دهد. نشان دهید که رابطهٔ میان R و R' به‌صورت زیر است

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R'} - \frac{1}{R_V}$$

توجه کنید که وقتی $R_V \longrightarrow \infty$، داریم $R' \longrightarrow R$.



شکل ۲۸ـ۴۰ مسأله‌های ۴۰ تا ۴۲.

۴۱ م. (مسألهٔ ۴۰ را ببینید). اگر برای اندازه‌گیری مقاومت از آمپرسنج و ولت‌سنج استفاده می‌کنیم، این وسایل را مطابق شکل ۲۸ـ۴۰ ب، هم می‌توانیم در مدار وصل کنیم. در اینجا باز هم نسبت مقادیر خوانده شده توسط وسایل اندازه‌گیری، مقاومت ظاهری R' را به دست می‌دهد. نشان دهید که رابطهٔ میان R و R' به صورت زیر است

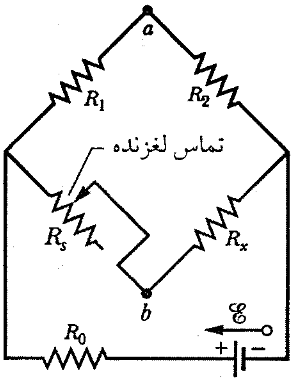
$$R = R' - R_A$$

که در آن R_A مقاومت آمپرسنج است. توجه کنید که وقتی $R_A \longrightarrow 0$، داریم $R' \longrightarrow R$.

۴۲ م. (مسأله‌های ۴۰ و ۴۱ را ببینید). در شکل ۲۸ـ۴۰، مقاومت‌های آمپرسنج و ولت‌سنج، به ترتیب، $3{,}00\Omega$ و 300Ω هستند. فرض کنید برای باتری آرمانی $\mathscr{E}=12{,}0V$ و $R_0=100\Omega$. به ازای $R=85{,}0\Omega$، (الف) وسایل اندازه‌گیری در دو حالت مختلف (شکل‌های ۲۸ـ۴۰ الف و ب) چه عددی را نشان می‌دهند؟ (ب) در هر حالت مقدار مقاومت ظاهری R'، چه خواهد بود؟

۴۳ م. در شکل ۲۸ـ۴۱، با حرکت دادن محل تماس لغزنده مقدار مقاومت R_s طوری تنظیم می‌شود که نقطه‌های a و b هم پتانسیل شوند. (این شرط را با وصل کردن یک آمپرسنج حساس در میان نقطه‌های a و b می‌توان آزمود؛ اگر پتانسیل این دو نقطه یکسان باشد عقربهٔ آمپرسنج منحرف نمی‌شود). نشان دهید که پس از تنظیم مقاومت، رابطهٔ زیر برقرار است:

$$R_x = R_s\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$



شکل ۲۸ـ۴۱ مسألهٔ ۴۳.

با استفاده از این وسیله، که پل ویتستون[1] نام دارد، می‌توان مقاومت نامعلوم (R_x) را برحسب یک مقاومت استاندارد (R_s) اندازه‌گیری کرد.

بخش ۲۸ـ۸ مدارهای RC

۴۴ ت. خازنی با بار آغازی q_0 از طریق یک مقاومت بی‌بار می‌شود. چه مدت برحسب ثابت زمانی τ، باید بگذرد تا خازن، (الف) یک سوم بار و (ب) دو سوم بار خودش را از دست بدهد؟

۴۵ ت. چند ثابت زمانی باید بگذرد تا در یک مدار سری RC، بار الکتریکی یک خازن بی‌بار به ۹۹٫۰ درصد بار تعادلی پایانی خود برسد؟

۴۶ ت. در یک مدار سری RC، داریم $\mathscr{E}=12{,}0V$، $R=1{,}40M\Omega$ و $C=1{,}80\mu F$. (الف) ثابت زمانی مدار را حساب کنید. (ب) بیشینهٔ مقدار بار ظاهر شده روی خازن را در موقع باردار شدن پیدا کنید. (پ) چه مدت طول می‌کشد تا بار خازن به $16{,}0\mu C$ برسد؟

۴۷ ت. یک مقاومت ۱۵٫۰ کیلواهمی و یک خازن به طور سری به هم وصل می‌شوند و به دو سر آنها ناگهان یک اختلاف پتانسیل ۱۲٫۰ ولتی اعمال می‌شود. در مدت $1{,}30\mu s$ اختلاف پتانسیل دو سر خازن به اندازهٔ $5{,}00V$ افزایش می‌یابد. (الف) ثابت زمانی مدار را حساب کنید. (ب) ظرفیت خازن را پیدا کنید.

۴۸ م. اختلاف پتانسیل میان صفحه‌های یک خازن نشتی ۲٫۰ میکروفارادی (خازنی که در آن بار از یک صفحه به صفحهٔ دیگر نشت می‌کند) در مدت ۲٫۰ ثانیه به یک چهارم مقدار آغازی‌اش کاهش می‌یابد. مقاومت معادل میان صفحه‌های خازن چقدر است؟

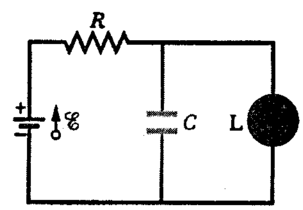
۴۹ م. مقاومت $3{,}00M\Omega$ و خازن $1{,}00\mu F$ به طور سری به یک باتری آرمانی با نیروی محرک الکتریکی $\mathscr{E}=4{,}00V$ وصل شده‌اند. ۱٫۰۰ ثانیه پس از اتصال مدار، آهنگ (الف) افزایش یافتن بار خازن، (ب) ذخیره شدن انرژی در خازن، (پ) انرژی گرمایی ظاهر شده در مقاومت، و (ت) انرژی دریافت شده از باتری، چقدر است؟

1. Wheatstone bridge

۵۰ م. خازن بی‌بار C که به طور سری به مقاومت R وصل شده است، به وسیلهٔ منبعی با نیروی محرک الکتریکی ثابت $\mathscr{E}$ به طور کامل باردار می‌شود. (الف) نشان دهید که انرژی نهایی ذخیره شده در خازن نصف انرژی تولید شده توسط منبع نیروی محرک الکتریکی است. (ب) با انتگرال‌گیری مستقیم از عبارت i^2R روی زمان باردار شدن خازن، نشان دهید که انرژی گرمایی تلف شده توسط مقاومت، نیز نصف انرژی تولید شده توسط منبع نیروی محرک الکتریکی است.

۵۱ م. خازنی با اختلاف پتانسیل آغازی ۱۰۰V با اتصال به یک مقاومت به وسیلهٔ یک کلید در لحظهٔ $t=0$، بی‌بار می‌شود. در زمان $t=$ ۱۰٫۰s، اختلاف پتانسیل دو سر خازن ۱٫۰۰V است. (الف) ثابت زمانی مدار چقدر است؟ (ب) اختلاف پتانسیل دو سر خازن در زمان $t=$ ۱۷٫۰s چقدر است؟

۵۲ م. در شکل ۲۸-۴۲، مدار یک لامپ چشمک زن، نظیر لامپ‌های نصب شده در نقاط در حال تعمیر بزرگراه‌ها، را نشان می‌دهد. در یک مدار RC لامپ فلوئورسنت L (با ظرفیت ناچیز) به طور موازی به دو سر خازن C وصل شده است. جریان فقط موقعی از لامپ می‌گذرد که اختلاف پتانسیل دو سرش به ولتاژ شکست V_L برسد؛ در این حالت خازن به طور کامل در لامپ تخلیه می‌شود و لامپ برای مدت کوتاهی چشمک می‌زند. فرض کنید می‌خواهیم لامپ در هر ثانیه دو بار چشمک بزند. برای یک لامپ با ولتاژ شکست $V_L=$ ۷۲٫۰V متصل به یک باتری آرمانی ۹۵٫۰V، و یک خازن ۰٫۱۵۰μF، مقاومت R چقدر باید باشد؟

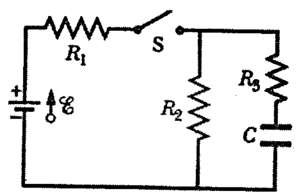


شکل ۲۸-۴۲ مسألهٔ ۵۲.

۵۳ م. یک خازن ۱٫۰μF با انرژی ذخیره شده آغازی ۰٫۵۰J، از طریق مقاومت ۱٫۰MΩ بی‌بار می‌شود. (الف) بار آغازی خازن چقدر است؟ (ب) جریان گذرنده از مقاومت به هنگام شروع بی‌بار شدن چقدر است؟ (پ) اختلاف پتانسیل دو سر خازن V_C، و اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت V_R، را به صورت تابعی از زمان معین کنید. (ت) آهنگ تولید انرژی گرمایی در مقاومت را برحسب زمان بیان کنید.

۵۴ م. در یک اسباب بازی الکتریکی، دستهٔ کنترل کننده شامل یک مقاومت متغیر است، که دو سرش به صفحه‌های یک خازن ۰٫۲۲۰μF وصل شده است. این خازن تا اختلاف پتانسیل ۵٫۰۰V باردار و سپس از طریق مقاومت بی‌بار می‌شود. مدت زمان لازم برای آنکه اختلاف پتانسیل میان صفحه‌های خازن به ۰٫۸۰۰V برسد، توسط یک‌ساعت درونی اندازه‌گیری می‌شود. اگر گسترهٔ زمان‌های بی‌بار شدن خازن بتواند به طور مؤثر از ۱۰٫۰μs تا ۶٫۰۰ms تنظیم شود، گسترهٔ تغییرات مقاومت چه باید باشد؟

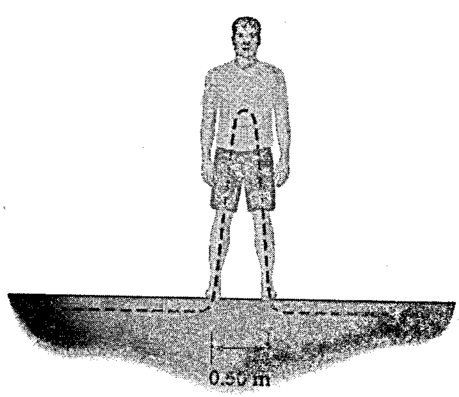
***۵۵ م.** در مدار شکل ۲۸-۴۳، داریم $\mathscr{E}=$ ۱٫۲kV، $C=$ ۶٫۵μF، $R_1=R_2=R_3=$ ۰٫۷۳MΩ. در حالی که C کاملاً بی‌بار است، کلید S ناگهان بسته می‌شود (در لحظهٔ $t=0$). (الف) جریان هر مقاومت را به ازای $t=0$ و $t\longrightarrow\infty$ معین کنید. (ب) منحنی نمایش V_2، اختلاف پتانسیل دو سر R_2 را از $t=0$ تا $t=\infty$، به طور کیفی رسم کنید. (پ) مقدار عددی V_2 به ازای $t=0$ و $t\longrightarrow\infty$ چقدر است؟ (ت) معنای فیزیکی «$t\longrightarrow\infty$» در این حالت چیست؟



شکل ۲۸-۴۳ مسألهٔ ۵۵.

مسألهٔ تکمیلی

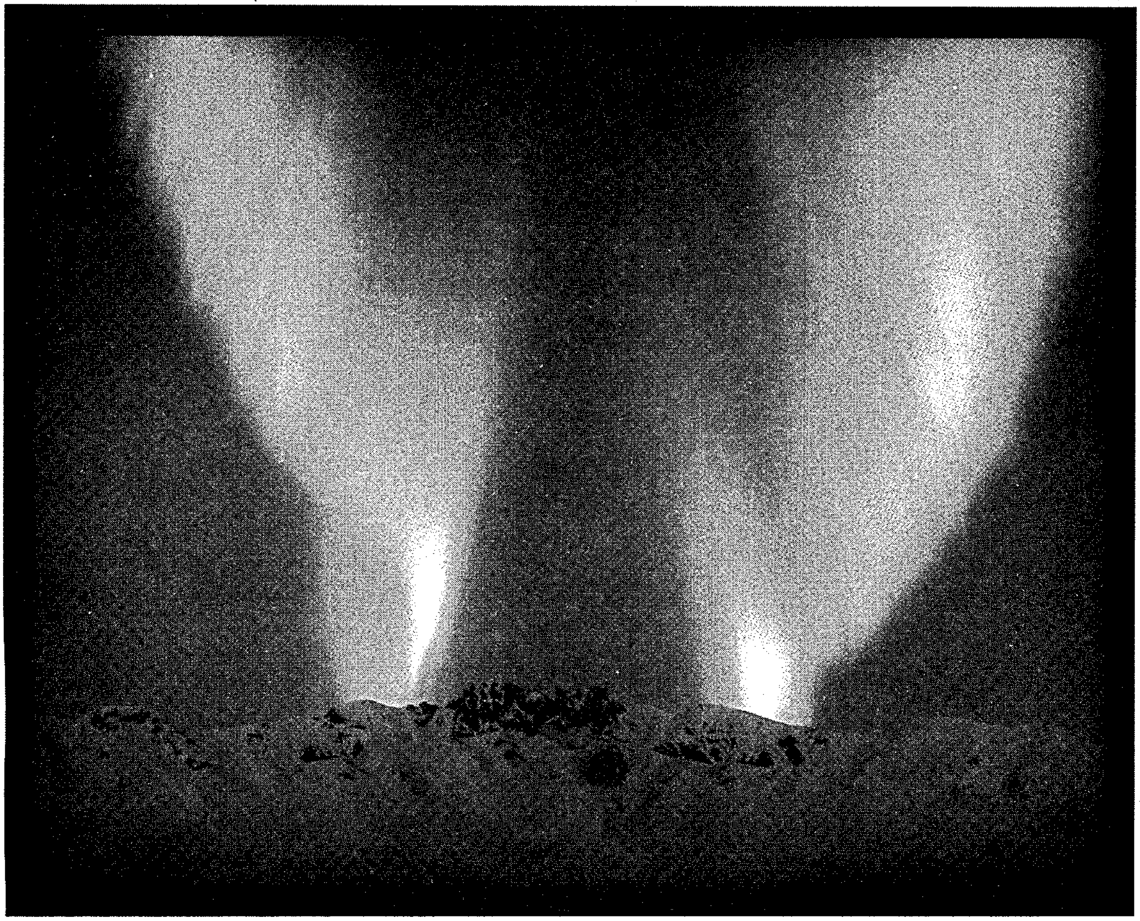
۵۶. حملهٔ قلبی یا مرگ بر اثر برق گرفتگی؟ این موضوع با مسألهٔ ۴۵ در فصل ۲۷ آغاز شد. شکل ۲۸-۴۴، مسیر جریان الکتریکی از یک پای شخص حادثه دیده را با عبور از تنه (شامل قلب)، تا پای دیگر، نشان می‌دهد. (الف) با توجه به داده‌ها، اختلاف پتانسیل میان پاهای شخص را با این فرض که یک پایش به اندازهٔ ۰٫۵۰m نسبت به پای دیگر به میلهٔ نشت‌دار نزدیک‌تر است، پیدا کنید. (ب) فرض کنید مقاومت الکتریکی یک پای شخص بر روی خاک نمدار، مقدار نوعی ۳۰۰Ω و مقاومت درون تنهٔ او مقدار پذیرفته شدهٔ ۱۰۰۰Ω است. در این صورت، چه جریانی از بدن شخص عبور می‌کند؟ (پ) اگر جریان گذرنده از بدن انسان ۰٫۱۰A تا ۱٫۰A باشد، قلب او دچار انقباض رشته‌های عضلانی (فیبریلاسیون) می‌شود. آیا فیبریلاسیون قلب این شخص ناشی از جریان نشت شده از میله بوده است؟



شکل ۲۸-۴۴ مسألهٔ ۵۶.

۲۹

میدان‌های مغناطیسی



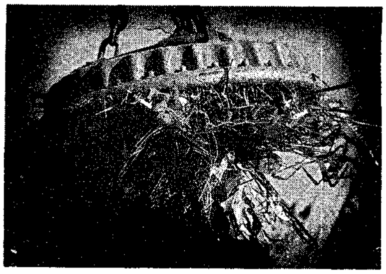
اگر در شبی تاریک در بیرون شهر بر بالای یک بلندی قرار بگیرید ممکن است بتوانید شفق قطبی را به صورت یک «پردهٔ» نورانی شبح مانند، که از آسمان آویخته است، ببینید. این پرده منحصر به آن محل نیست، بلکه ممکن است دارای صدها کیلومتر ارتفاع و هزاران کیلومتر طول باشد، که به صورت کمانی پیرامون زمین کشیده شده است. با این حال، ضخامت آن کمتر از یک کیلومتر است.

این تصویر عظیم را چه عاملی به وجود می‌آورد و چرا این قدر نازک است؟

در این فصل به این پرسش پاسخ داده خواهد شد.

۲۹ـ۱ میدان مغناطیسی

پیشتر دربارهٔ چگونگی تولید یک میدان برداری ـ میدان الکتریکی $\vec{E}$ ـ توسط یک میلهٔ پلاستیکی باردار در تمام نقاط پیرامون میله بحث کردیم. یک آهن‌ربا هم، به همین ترتیب، در تمام نقاط پیرامون خود یک میدان برداری ـ **میدان مغناطیسی** $\vec{B}$ ـ را به وجود می‌آورد. هنگامی که کاغذ یادداشتی را به کمک آهن‌ربای کوچکی روی دَر یخچال می‌چسبانید، یا به طور تصادفی یک دیسکت رایانه‌ای را با قرار دادن آن در مجاورت یک آهن‌ربا پاک می‌کنید، متوجه میدان مغناطیسی می‌شوید. آهن‌ربا بر روی دَر یخچال یا دیسکت به وسیلهٔ میدان مغناطیسی خود اثر می‌کند.



شکل ۲۹ـ۱ تصویری از چگونگی استفاده از آهن‌ربای الکتریکی برای جمع کردن و انتقال آهن قراضه‌ها در کارخانهٔ ذوب آهن.

آهن‌ربای الکتریکی آشنا شامل سیمی است که به دور یک هسته آهنی پیچیده شده است و از این پیچه یک جریان الکتریکی عبور می‌کند؛ شدت میدان مغناطیسی با بزرگی جریان معین می‌شود. در صنعت از این **آهن‌رباهای الکتریکی** برای جدا کردن آهن قراضه‌ها از اشیای دیگر (شکل ۲۹ـ۱) استفاده می‌شود. احتمال دارد شما با **آهن‌رباهای دایمی** ـ از نوع آهن‌رباهای روی دَر یخچال ـ که برای تولید میدان مغناطیسی نیازی به جریان الکتریکی ندارند، بیشتر آشنا باشید.

در فصل ۲۳ دیدیم که بار الکتریکی یک میدان الکتریکی تولید می‌کند و این میدان می‌تواند بر بارهای الکتریکی دیگر اثر کند. در اینجا نیز منطقی است که انتظار داشته باشیم بار مغناطیسی یک میدان مغناطیسی تولید کند و میدان هم می‌تواند بر بارهای مغناطیسی دیگر اثر کند. اگرچه، این گونه بارهای مغناطیسی، که **تک‌قطبی‌های مغناطیسی** نامیده می‌شوند، توسط برخی نظریه‌ها پیشگویی شده‌اند، اما موجود بودنشان تاکنون به تأیید نرسیده است.

پس، میدان‌های مغناطیسی چگونه تولید می‌شوند؟ برای این کار دو راه وجود دارد. (۱) حرکت کردن ذرات با بار الکتریکی، به صورت جریان الکتریکی در یک سیم، میدان مغناطیسی به وجود می‌آورد. (۲) ذرات بنیادی، مانند الکترون‌ها، در پیرامون خود یک میدان مغناطیسی ذاتی دارند؛ یعنی، این میدان یک مشخصهٔ اصلی وابسته به ذرات است، درست مانند جرم و بار الکتریکی (یا نقصان بار الکتریکی). همان طور که در فصل ۳۲ بحث خواهد شد، در برخی مواد میدان‌های مغناطیسی الکترون‌ها با هم جمع می‌شوند و در پیرامون آن مواد یک میدان مغناطیسی خالص به وجود می‌آورند. این موضوع دربارهٔ مواد مربوط به آهن‌رباهای دایمی صدق می‌کند (که البته، خاصیت خوبی است، چون با این خاصیت می‌توان کاغذ یادداشت را روی دَر یخچال نگه داشت). در مواد دیگر، میدان‌های مغناطیسی تمام الکترون‌ها یکدیگر را خنثی می‌کنند و در نتیجه، هیچ میدان مغناطیسی خالصی در پیرامون ماده تولید نمی‌شود. این امر در مورد مواد موجود در بدن ما نیز صدق می‌کند (که این هم خاصیت خوبی است، چون اگر چنین نبود، هر بار که از جلو یخچال عبور می‌کردیم محکم به دَر آن کوبیده می‌شدیم).

به طور تجربی در می‌یابیم که وقتی یک ذرهٔ باردار (به تنهایی یا به صورت بخشی از یک جریان الکتریکی) در میدان مغناطیسی حرکت می‌کند، نیرویی که ناشی از میدان است، به ذره اثر می‌کند. در این فصل به بررسی رابطهٔ میان میدان مغناطیسی و این نیرو می‌پردازیم.

۲۹ـ۲ تعریف $\vec{B}$

میدان الکتریکی $\vec{E}$ در یک نقطه را با قرار دادن ذرهٔ آزمون ساکن با بار q در آن نقطه و اندازه‌گیری نیروی الکتریکی $\vec{F}_E$ وارد شده به آن بار، معین کردیم. سپس، میدان $\vec{E}$ را چنین تعریف کردیم:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_E}{q} \qquad (۲۹\text{ـ}۱)$$

اگر یک تک قطبی مغناطیسی می‌داشتیم، می‌توانستیم میدان $\vec{B}$ را نیز به همین روش تعریف کنیم. اما چون چنین ذراتی در طبیعت یافت نشده‌اند، باید $\vec{B}$ را به روشی دیگر، یعنی برحسب نیروی مغناطیسی وارد شده به ذرهٔ آزمون باردار در حال حرکت، $\vec{F}_B$، تعریف کنیم.

در اصل، برای این کار ذرهٔ باردار را از نقطه‌ای که می‌خواهیم $\vec{B}$ را در آن نقطه تعریف کنیم، در جهت‌ها و با تندی‌های گوناگون به حرکت درمی‌آوریم و $\vec{F}_B$، نیروی وارد شده به ذره در آن نقطه را معین می‌کنیم. پس از تکرار کردن این آزمون متوجه می‌شویم که وقتی سرعت ذره $\vec{v}$، در راستای یک محور خاص گذرنده از آن نقطه قرار دارد، نیروی $\vec{F}_B$ صفر می‌شود. برای تمام جهت‌های دیگر $\vec{v}$، بزرگی $\vec{F}_B$ همیشه با $v\sin\phi$ متناسب است، که در آن ϕ زاویهٔ میان محور صفر ـ نیرو، و بردار $\vec{v}$ است. علاوه بر این، $\vec{F}_B$، همیشه بر راستای $\vec{v}$ عمود است. (این نتیجه‌ها نشان می‌دهند که در اینجا یک ضرب برداری دخالت دارد).

اکنون، میدان مغناطیسی $\vec{B}$ را می‌توانیم به صورت کمیتی برداری که در راستای محور صفر ـ نیرو، قرار دارد، تعریف کنیم. سپس، هنگامی که $\vec{v}$ بر این محور عمود است می‌توانیم بزرگی $\vec{F}_B$ را اندازه بگیریم و آنگاه بزرگی $\vec{B}$ را برحسب بزرگی نیرو تعریف کنیم:

$$B = \frac{F_B}{|q|v}$$

که در آن q بار الکتریکی ذره است.

تمام این نتیجه‌ها را می‌توان به صورت معادلهٔ برداری زیر خلاصه کرد:

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B} \qquad (۲\text{-}۲۹)$$ ■

یعنی، نیروی وارد شده بر ذره $\vec{F}_B$، برابر با حاصل‌ضرب بار q در حاصل‌ضرب برداری سرعت ذره $\vec{v}$، و میدان $\vec{B}$ است (همهٔ کمیت‌ها در یک چارچوب مربع اندازه‌گیری شده‌اند). با استفاده از معادلهٔ ۳ـ۲۰ در مورد ضرب برداری، بزرگی $\vec{F}_B$ را می‌توان چنین نوشت:

$$F_B = |q|vB\sin\phi \qquad (۳\text{-}۲۹)$$ ■

که در آن ϕ زاویهٔ میان بردارهای سرعت $\vec{v}$ و میدان مغناطیسی $\vec{B}$ است.

تعیین نیروی مغناطیسی وارد بر یک ذره

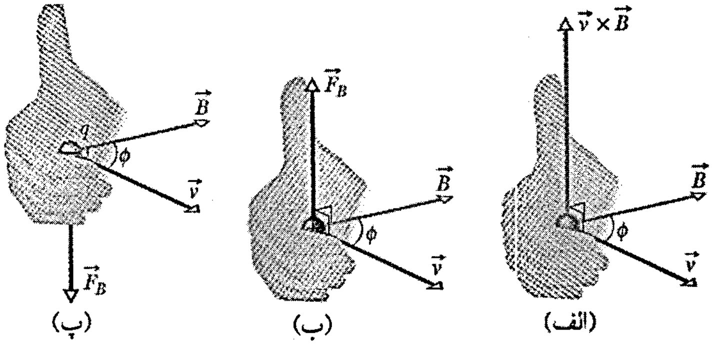
معادلهٔ ۲۹ـ۳ نشان می‌دهد که $\vec{F}_B$، بزرگی نیروی وارد بر یک ذره در یک میدان مغناطیسی، با بار q و تندی ذره v، متناسب است. بنابراین، اگر بار الکتریکی صفر یا ذره ساکن باشد نیروی وارد بر ذره صفر است. در ضمن، بنا به معادلهٔ ۲۹ـ۳ هرگاه $\vec{v}$ و $\vec{B}$ با هم موازی (همسو) ($\phi = 0°$) یا پاد موازی (ناهمسو) ($\phi = 180°$) باشند، نیرو صفر و اگر $\vec{v}$ و $\vec{B}$ برهم عمود باشند نیرو بیشینه است.

معادلهٔ ۲۹ـ۲، تمام این نتیجه‌ها را علاوه بر جهت $\vec{F}_B$ به دست می‌دهد. با توجه به بخش ۳ـ۷ می‌دانیم که حاصل‌ضرب برداری $\vec{v}\times\vec{B}$ در معادلهٔ ۲۹ـ۲، برداری است که بر دو بردار $\vec{v}$ و $\vec{B}$ عمود است. طبق قاعدهٔ دست راست (شکل ۲۹ـ۲ الف) اگر انگشت‌های دست راست از $\vec{v}$ به سمت $\vec{B}$ خم شوند، انگشت شست جهت $\vec{v}\times\vec{B}$ را نشان خواهد داد. هرگاه q مثبت باشد، نیروی $\vec{F}_B$ با $\vec{v} \times \vec{B}$ هم علامت است (طبق معادلهٔ ۲۹ـ۲) و در نتیجه، باید همسو باشند؛ یعنی، وقتی q مثبت باشد $\vec{F}_B$ در جهت انگشت شست خواهد بود (شکل ۲۹ـ۲ ب). هرگاه q منفی باشد، نیروی $\vec{F}_B$ و حاصل‌ضرب برداری $\vec{v} \times \vec{B}$ دارای علامت مخالف‌اند و درنتیجه، باید جهت‌های مخالف داشته باشند. پس، وقتی q منفی باشد، $\vec{F}_B$ در خلاف جهت انگشت شست است (شکل ۲۹ـ۲ پ).

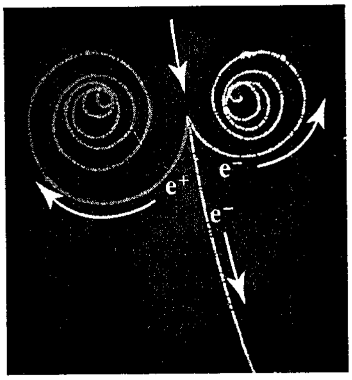
به هر حال، بدون توجه به علامت بار الکتریکی می‌توان گفت که:

◀ نیروی $\vec{F}_B$ وارد بر ذرهٔ بارداری که با سرعت $\vec{v}$ در میدان مغناطیسی $\vec{B}$ حرکت می‌کند، همیشه بر بردارهای $\vec{v}$ و $\vec{B}$ عمود است.

بنابراین، $\vec{F}_B$ هرگز مؤلفه‌ای موازی با $\vec{v}$ نخواهد داشت. منظور این است که $\vec{F}_B$ نمی‌تواند v، تندی ذره (و در نتیجه انرژی جنبشی ذره) را تغییر دهد. نیرو فقط می‌تواند جهت $\vec{v}$ (و در نتیجه جهت حرکت) را تغییر دهد؛ $\vec{F}_B$ فقط در همین جهت می‌تواند به ذره شتاب بدهد.



شکل ۲۹ـ۲ (الف) طبق قاعدهٔ دست راست (که در آن $\vec{v}$ تحت زاویهٔ کوچکتر ϕ میان دو بردار به سمت $\vec{B}$ خم می‌شود) جهت بردار $\vec{v}\times\vec{B}$ با انگشت شست نشان داده می‌شود. (ب) هرگاه q مثبت باشد، نیروی $\vec{F}_B=q\vec{v}\times\vec{B}$ در جهت $\vec{v}\times\vec{B}$ خواهد بود. (پ) هرگاه q منفی باشد، $\vec{F}_B$ در خلاف جهت $\vec{v}\times\vec{B}$ خواهد بود.



شکل ۲۹ـ۳ نمایش ردهای دو الکترون (e^-) و یک پوزیترون (e^+) در یک اتاقک حباب واقع در میدان مغناطیسی یکنواخت، که در برون سوی صفحهٔ شکل است.

برای درک کردن معادلهٔ ۲۹ـ۲، شکل ۲۹ـ۳ را در نظر می‌گیریم، که برخی ردهای به جا مانده از حرکت سریع ذرات باردار در اتاقک حباب آزمایشگاه لارنس برکلی[1] را نشان می‌دهد. این اتاقک که محتوی هیدروژن مایع است، در میدان مغناطیسی یکنواخت قوی در برون سوی صفحهٔ شکل قرار دارد. ذرهٔ گامای فرودی ـ که به دلیل نداشتن بار الکتریکی هیچ ردی به جا نمی‌گذارد ـ به یک الکترون (رد مارپیچی مشخص شده با e^-) و یک پوزیترون (رد مشخص شده با e^+) تبدیل می‌شود و یک الکترون از اتم هیدروژن (رد دراز مشخص شده با e^-) خارج می‌کند. تحقیق کنید که با توجه به معادلهٔ ۲۹ـ۲، و شکل ۲۹ـ۲، هر سه رد تولید شده توسط دو ذرهٔ منفی و یک ذرهٔ مثبت، در جهت‌های مناسب خم می‌شوند.

یکای SI میدان $\vec{B}$ با توجه به معادله‌های ۲۹ـ۲ و ۲۹ـ۳، به صورت (ثانیه / کولن. متر) / نیوتون است. به خاطر سادگی، این یکا را **تسلا**[2] (با نماد T) می‌نامند:

$$\text{یک تسلا} = 1\text{T} = 1\,\frac{\text{نیوتون}}{(\text{کولن})\,(\text{متر / ثانیه})}$$

با یادآوری این نکته که کولن بر ثانیه همان آمپر است، داریم

$$1\text{T} = 1\,\frac{\text{نیوتون}}{(\text{کولن / ثانیه})\,(\text{متر})} = 1\frac{\text{N}}{\text{A.m}} \qquad (۲۹\text{ـ}۴)$$

یکای قدیمی $\vec{B}$ (غیر SI)، که هنوز هم به کار می‌رود، **گاؤس** (با نماد G) است، و داریم

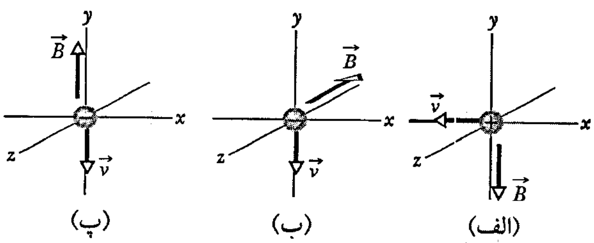
$$\text{یک تسلا} = 10^{4}\ \text{گاؤس} \qquad (۲۹\text{ـ}۵)$$

جدول ۲۹ـ۱، بزرگی میدان‌های مغناطیسی موجود در موارد مختلف را نشان می‌دهد. توجه کنید که میدان مغناطیسی زمین در نزدیکی سطح زمین در حدود $10^{-4}\,\text{T}$ (مساوی با $100\,\mu\text{T}$، یا یک گاؤس) است.

جدول ۲۹ـ۱ بزرگی تقریبی برخی میدان‌های مغناطیسی

در سطح یک ستارهٔ نوترونی	$10^{8}\,\text{T}$
درنزدیکی یک آهن‌ربای الکتریکی بزرگ	$1{,}5\,\text{T}$
درنزدیکی یک آهن‌ربای میله‌ای کوچک	$10^{-2}\,\text{T}$
در سطح زمین	$10^{-4}\,\text{T}$
در فضای میان ستاره‌ها	$10^{-10}\,\text{T}$
کمترین مقدار در اتاقی با حفاظ مغناطیسی	$10^{-14}\,\text{T}$

خودآزمایی ۱: شکل زیر، سه وضعیت را نشان می‌دهد که در آنها ذره‌ای باردار با سرعت $\vec{v}$ در یک میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ حرکت می‌کند. در هر وضعیت، $\vec{F}_B$، نیروی مغناطیسی وارد بر ذره، در چه جهتی است؟



1. Lawrence Berkeley Laboratory

2. Tesla

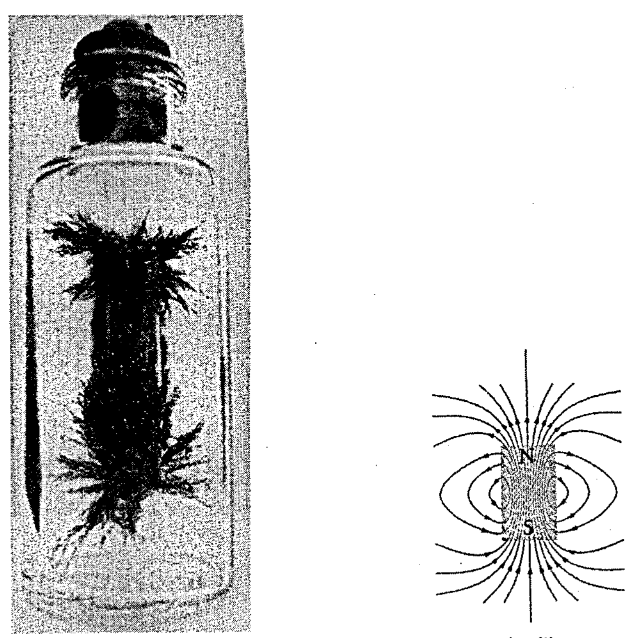
خط‌های میدان مغناطیسی

میدان‌های مغناطیسی را، نظیر آنچه در مورد میدان‌های الکتریکی انجام دادیم، می‌توانیم با خط‌های میدان نمایش دهیم. در اینجا نیز قاعده‌های مشابهی را به کار می‌بندیم؛ یعنی، (۱) راستای مماس بر خط میدان مغناطیسی در هر نقطه راستای $\vec{B}$ در آن نقطه را مشخص می‌کند، و (۲) فاصلهٔ میان خط‌های میدان بزرگی $\vec{B}$ را نشان می‌دهد ـ یعنی، هر چه خط‌ها در جایی به هم نزدیک‌تر باشند، میدان مغناطیسی در آنجا قوی‌تر است، و برعکس.

شکل ۲۹ـ۴ الف، نشان می‌دهد که چگونه می‌توان میدان مغناطیسی نزدیک یک آهن‌ربای میله‌ای (آهن‌ربایی دایمی که به شکل میله است) را به وسیلهٔ خط‌های مغناطیسی نشان داد. تمام خط‌ها از آهن‌ربا عبور می‌کنند، و همهٔ آنها حلقه‌های بسته تشکیل می‌دهند (حتی آنها که در شکل به صورت بسته نشان داده نشده‌اند). اثرهای مغناطیسی خارجی یک آهن‌ربای میله‌ای در نزدیکی دو سر میله قوی‌تر و در آنجا خط‌های میدان به هم نزدیک‌ترند. بنابراین، میدان مغناطیسی آهن‌ربای میله‌ای در شکل ۲۹ـ۴ ب، براده‌های آهن را به‌طور عمده در نزدیکی دو سر آهن‌ربا جمع می‌کند.

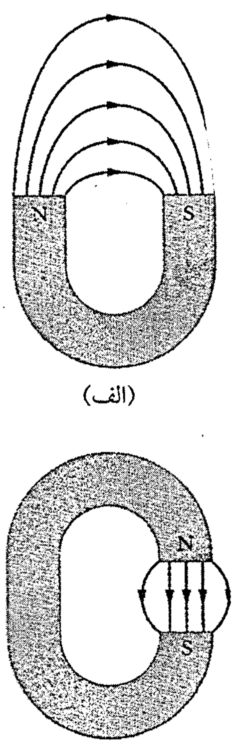
خط‌های میدان (بسته) از یک سر آهن‌ربا وارد و از سر دیگر خارج می‌شوند. سر آهن‌ربا را که از آن خط‌های میدان خارج می‌شوند. قطب شمال و سر دیگر را که خط‌های میدان به آن وارد می‌شوند، قطب جنوب آهن‌ربا می‌نامند. آهن‌رباهایی که برای چسباندن کاغذهای یادداشت بر روی دَر یخچال به کار می‌روند، آهن‌رباهای میله‌ای کوتاه هستند. شکل ۲۹ـ۵، دو نمونهٔ متداول آهن‌ربا را نشان می‌دهد: یکی آهن‌ربای نعل اسبی شکل است و دیگری آهن‌ربایی است که به شکل C خم شده است و قطب‌ٰخ‌های آن روبه‌روی هم قرار گرفته‌اند. (در این آهن‌ربا میدان مغناطیسی میان قطب‌ها تقریباً یکنواخت است). بدون در نظر گرفتن شکل آهن‌رباها، اگر دو آهن‌ربا را در کنار هم قرار دهیم:

> ◀ قطب‌های مغناطیسی ناهمنام یکدیگر را می‌ربایند و قطب‌های مغناطیسی همنام یکدیگر را می‌رانند.



(ب) (الف)

شکل ۲۹ـ۴ (الف) نمودار خط‌های میدان مغناطیسی مربوط به یک آهن‌ربای میله‌ای. (ب) تصویر یک «آهن‌ربای گاوی». این، یک آهن‌ربای میله‌ای است که در شکمبهٔ گاو قرار داده می‌شود تا از رسیدن آهن پاره‌های بلعیده شده به‌طور تصادفی، به رودهٔ گاو جلوگیری کند. براده‌های آهن در دو سر آهن‌ربا امتداد خط‌های میدان مغناطیسی را آشکار می‌کنند.



شکل ۲۹ـ۵ تصویر (الف) یک آهن‌ربای نعلی شکل و (ب) یک آهن‌ربای C ـ شکل. (فقط تعدادی از خط‌های میدان خارجی آهن رباها نشان داده شده‌اند).

زمین دارای یک میدان مغناطیسی است که با ساز و کارهای ناشناخته‌ای در هستهٔ زمین به وجود آمده است. در سطح زمین این میدان مغناطیسی را با استفاده از قطب‌نما، که در واقع یک آهن‌ربای میله‌ای ظریف قرار داده شده بر روی یک تکیه‌گاه با اصطکاک ناچیز است، می‌توان آشکار کرد. این آهن‌ربای میله‌ای، یا این سوزن، بدین جهت می‌چرخد که قطب شمال آن به طرف ناحیهٔ شمالگان زمین جذب می‌شود. بنابراین، قطب جنوب میدان مغناطیسی زمین باید در طرف شمالگان واقع شده باشد. پس، از لحاظ منطقی می‌توان آن قطب را قطب جنوب نامید. اما چون آن جهت را شمال می‌نامیم، مجبوریم که بگوییم زمین در آن جهت دارای یک **قطب شمال زمین مغناطیسی** است.

با اندازه‌گیری‌های دقیق معلوم شده است که در نیمکرهٔ شمالی خط‌های میدان مغناطیسی زمین به طور کلی به درون سوی زمین و به سمت شمالگان هستند. در نیمکرهٔ جنوبی این خط‌ها به طور کلی به برون سوی زمین هستند و از جنوبگان ـ یعنی، از قطب جنوب زمین مغناطیسی ـ دور می‌شوند.

مسألهٔ نمونهٔ ۲۹ـ۱

میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ به بزرگی ۱٫۲mT، در تمام فضای یک اتاق آزمایشگاهی در راستای قائم و به سمت بالاست. پروتونی با انرژی جنبشی ۵٫۳MeV در حال حرکت در راستای افقی، از جنوب به شمال به اتاق وارد می‌شود. در موقع ورود پروتون به اتاق چه نیروی انحراف دهندهٔ مغناطیسی‌ای به پروتون وارد می‌شود؟ جرم پروتون 1.67×10^{-27}kg است. (میدان مغناطیسی زمین را نادیده بگیرید).

حل: چون پروتون باردار است و در یک میدان مغناطیسی حرکت می‌کند، نیروی مغناطیسی $\vec{F}_B$ می‌تواند به آن وارد شود. در اینجا **نکتهٔ کلیدی** این است که چون سرعت آغازی پروتون در راستای خط میدان مغناطیسی نیست، پس $\vec{F}_B$ صفر نیست. برای تعیین بزرگی نیروی $\vec{F}_B$، می‌توان از معادلهٔ ۲۹ـ۳ استفاده کرد، به شرط آنکه نخست تندی پروتون v، را به دست آوریم. v را می‌توان با استفاده از انرژی جنبشی داده شده پیدا کرد، چون داریم $K=\frac{1}{2}mv^2$. با حل کردن این معادله نسبت به v، داریم

$$v=\sqrt{\frac{2K}{m}}=\sqrt{\frac{(2)(5.3\,\text{MeV})(1.60\times10^{-13}\,\text{J/MeV})}{1.67\times10^{-27}\,\text{kg}}}$$

$$v=3.2\times10^{7}\,\text{m/s}$$

اکنون، با استفاده از معادلهٔ ۲۹ـ۲، داریم

$$F_B=|q|vB\sin\phi$$

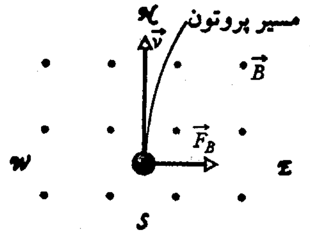
$$F_B=(1.60\times10^{-19}\,\text{C})(3.2\times10^{7}\,\text{m/s})(1.2\times10^{-3}\,\text{T})(\sin90^\circ)\ \Rightarrow$$

$$F_B=6.1\times10^{-15}\,\text{N}$$ **(پاسخ)**

به نظر می‌رسد که این نیرو ضعیف است، اما چون به ذره‌ای با جرم کوچک وارد می‌شود شتاب زیادی تولید می‌کند؛ یعنی

$$a=\frac{F_B}{m}=\frac{6.1\times10^{-15}\,\text{N}}{1.67\times10^{-27}\,\text{kg}}=3.7\times10^{12}\,\text{m/s}^2$$

برای تعیین جهت $\vec{F}_B$، از این **نکتهٔ کلیدی** استفاده می‌کنیم که $\vec{F}_B$ با حاصل‌ضرب برداری $q\vec{v}\times\vec{B}$ همسو است. چون بار q مثبت است، $\vec{F}_B$ باید با $\vec{v}\times\vec{B}$ همسو باشد و جهت آن را می‌توان با استفاده از قاعدهٔ دست راست برای ضرب‌های برداری (مانند شکل ۲۹ـ۲ ب) معین کرد. می‌دانیم که



شکل ۲۹ـ۶ مسألهٔ نمونهٔ ۲۹ـ۱. نمایش مسیر پروتون در اتاق با دید از بالا. پروتون با سرعت $\vec{v}$ از جنوب به شمال حرکت می‌کند. در اتاق یک میدان مغناطیسی در راستای قائم و به طرف بالا وجود دارد که با آرایه‌ای از نقطه‌ها (که معرف سَر پیکان هستند) نمایش داده شده است. پروتون به سمت مشرق منحرف شده است.

بردار $\vec{v}$ در راستای افقی و در جهت جنوب به شمال، و بردار $\vec{B}$ در راستای قائم و به سمت بالاست. قاعدهٔ دست راست نشان می‌دهد که نیروی انحراف دهندهٔ $\vec{F}_B$ باید افقی و مطابق شکل ۲۹ـ۶، از مغرب به سمت مشرق باشد. (در این شکل، آرایهٔ نقطه‌ها معرف میدان مغناطیسی است که در برون سوی صفحهٔ شکل است. آرایهٔ Xها نشان می‌دهد که میدان مغناطیسی در درون سوی صفحه شکل است).

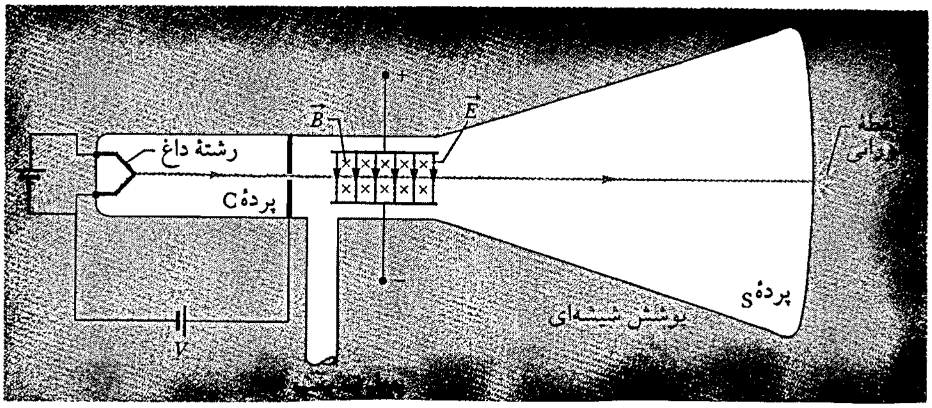
اگر بار ذره منفی می‌بود، نیروی انحراف دهندهٔ مغناطیسی در سوی مخالف، یعنی در راستای افقی و از مشرق به سمت مغرب می‌بود. اگر q را منفی بگیریم این موضوع از شکل ۲۹ـ۲ به خوبی نمایان می‌شود.

۲۹-۳ میدان‌های متعامد: کشف الکترون

میدان الکتریکی $\vec{E}$ و میدان مغناطیسی $\vec{B}$، هر دو، می‌توانند به یک ذرهٔ باردار نیرو وارد کنند. وقتی این دو میدان برهم عمود باشند میدان‌های متعامد گفته می‌شوند. در اینجا می‌خواهیم ببینیم وقتی ذره‌های باردار ـ مانند الکترون‌ها ـ در میدان‌های متعامد حرکت می‌کنند برایشان چه اتفاقی می‌افتد. به عنوان مثال، آزمایشی را که در سال ۱۲۷۶/۱۸۹۷ توسط **تامسون**[1] در دانشگاه کمبریج[2] انجام و به کشف الکترون منجر شد، بررسی می‌کنیم.

شکل ۲۹-۷، نمونهٔ جدید و ساده شده‌ای از دستگاه تجربی تامسون، یعنی لامپ پرتوهای کاتودی را (که مانند لامپ تصویر یک تلویزیون استاندارد است) نشان می‌دهد. ذرات باردار (که امروزه آنها را به عنوان الکترون می‌شناسیم) از یک رشتهٔ داغ واقع در انتهای لامپ تخلیه شده از هوا گسیل می‌شوند و تحت اثر اختلاف پتانسیل V شتاب می‌گیرند. الکترون‌ها پس از عبور از یک شکاف واقع در پردهٔ C، باریکه‌ای از ذرات را تشکیل می‌دهند. آنگاه، الکترون‌ها به ناحیهٔ شامل میدان‌های متعامد $\vec{E}$ و $\vec{B}$ وارد می‌شوند، به سمت پردهٔ فلوئورسان S پیش می‌روند و در آنجا یک نقطهٔ نورانی به وجود می‌آورند (در صفحهٔ تلویزیون این نقطهٔ نورانی بخشی از تصویر است). در ناحیهٔ میدان‌های متعامد نیروهای وارد شده به ذرات باردار می‌توانند ذرات را از مرکز پرده منحرف کنند. تامسون، با کنترل کردن بزرگی و جهت میدان‌ها توانست محل ظاهر شدن نقطهٔ نورانی را بر روی پرده تنظیم کند. یادآوری می‌شود که نیروی وارد بر ذرهٔ با بار منفی از سوی یک میدان الکتریکی در خلاف جهت میدان است. بنابراین، برای آرایش خاص میدان‌ها در شکل ۲۹-۷، الکترون‌ها تحت اثر میدان الکتریکی $\vec{E}$ به طرف بالای صفحهٔ شکل و تحت اثر میدان مغناطیسی $\vec{B}$ به طرف پایین صفحه رانده می‌شوند؛ یعنی، نیروها در خلاف جهت یکدیگر اثر می‌کنند. روش کار تامسون به اجرا گذاشتن مرحله‌های زیر بود:

۱. $E=0$ و $B=0$ را انتخاب و به محل نقطهٔ نورانی بر روی پردهٔ S، که حاکی از منحرف نشدن باریکهٔ الکترونی است، توجه کنید.
۲. $\vec{E}$ را برقرار کنید و میزان انحراف باریکه را اندازه بگیرید.
۳. در حال ثابت نگه داشتن $\vec{E}$، میدان $\vec{B}$ را برقرار کنید و مقدار آن را طوری تنظیم کنید که باریکه به محل بدون انحراف پیشین خود برگردد. (نیروها به خاطر ناهمسو بودن یکدیگر را حذف می‌کنند).



شکل ۲۹-۷ نمونهٔ جدیدی از دستگاه تامسون برای اندازه‌گیری نسبت جرم به بار یک الکترون. میدان الکتریکی $\vec{E}$ با اتصال یک باتری به پایانه‌های صفحه‌های انحراف دهندهٔ تخت برقرار می‌شود. میدان مغناطیسی $\vec{B}$ با گذراندن جریان از یک سیستم پیچه (که نشان داده نشده است)، به وجود می‌آید. میدان مغناطیسی نشان داده شده در درون سوی صفحهٔ شکل است، که با آرایه‌ای از Xها (که معرف دُم پیکان میدان هستند) نمایش داده شده است.

---

1. J.J.Thomson
2. Cambridge

منحرف شدن یک ذرهٔ باردار در حال حرکت در میدان الکتریکی $\vec{E}$ میان دو صفحه (در اینجا مرحلهٔ ۲) را در مسألهٔ نمونهٔ ۲۳ـ۴ مورد بحث قرار دادیم. در آنجا دیدیم که میزان انحراف ذره در انتهای صفحه‌ها برابر است با:

$$y = \frac{qEL^{۲}}{۲mv^{۲}} \qquad (۶\text{ـ}۲۹)$$

در این معادله v تندی، m جرم، و q بار ذره، و L طول صفحه‌هاست. برای باریکهٔ الکترون‌ها در شکل ۲۹ـ۷ هم همین معادله را می‌توان به کار برد؛ اگر بخواهیم می‌توانیم میزان انحراف را با اندازه‌گیری انحراف باریکه بر روی پردهٔ S حساب کنیم و سپس میزان انحراف y در انتهای صفحه‌ها را به دست آوریم. (چون جهت انحراف با بار الکتریکی ذره مشخص می‌شود، تامسون توانست نشان دهد که ذره‌هایی که پرده را روشن می‌کنند بار منفی دارند).

وقتی دو میدان در شکل ۲۹ـ۷ را طوری تنظیم کنیم که دو نیروی منحرف کننده یکدیگر را خنثی کنند (مرحلهٔ ۳)، با استفاده از معادله‌های ۲۹ـ۱ و ۲۹ـ۳، داریم

$$|q|E = |q|vB\sin ۹۰^\circ = |q|vB \quad \Rightarrow$$

$$v = \frac{E}{B} \qquad (۷\text{ـ}۲۹)$$

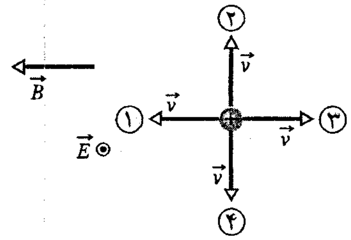
بنابراین، میدان‌های متعامد این امکان را به وجود می‌آورند که بتوانیم تندی ذرات باردار گذرنده از میان آنها را اندازه بگیریم. با جانشانی مقدار v ز معادلهٔ ۲۹ـ۷ در معادلهٔ ۲۹ـ۶ و مرتب کردن نتیجهٔ حاصل، داریم

$$\frac{m}{q} = \frac{B^{۲}L^{۲}}{۲yE} \qquad (۸\text{ـ}۲۹)$$

تمام کمیت‌های طرف راست این معادله را می‌توان اندازه‌گیری کرد. بنابراین، میدان‌های متعامد امکان اندازه‌گیری نسبت m/q مربوط به ذرات در حال حرکت در دستگاه تامسون را فراهم می‌کنند.

تامسون ادعا کرد که این ذرات در تمام مواد یافت می‌شوند. در ضمن، او ادعا کرد که این ذرات بیش از هزار بار از سبک‌ترین اتم شناخته شده (هیدروژن) سبک‌ترند. (بعدها این نسبت به طور دقیق و مساوی با ۱۵ر۱۸۳۶ به دست آمد). اندازه‌گیری m/q توسط تامسون همراه با جسارت در ابراز این دو ادعا، به عنوان «کشف الکترون» مورد توجه قرار گرفت.

خودآزمایی ۲: شکل زیر، چهار جهت مربوط به $\vec{v}$، بردار سرعت یک ذرهٔ با بار مثبت در حال حرکت در میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ (در برون سوی صفحهٔ شکل که با نقطهٔ درون دایره نشان داده شده است) و میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$، نشان می‌دهد. (الف) جهت‌های ۱، ۲ و ۳ را با توجه به بزرگی نیروی برایند وارد بر ذره، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید. (ب) نیروی برایند مربوط به کدام یک از این چهار جهت ممکن است صفر باشد؟



۲۹ـ۴ میدان‌های متعامد: اثر هال

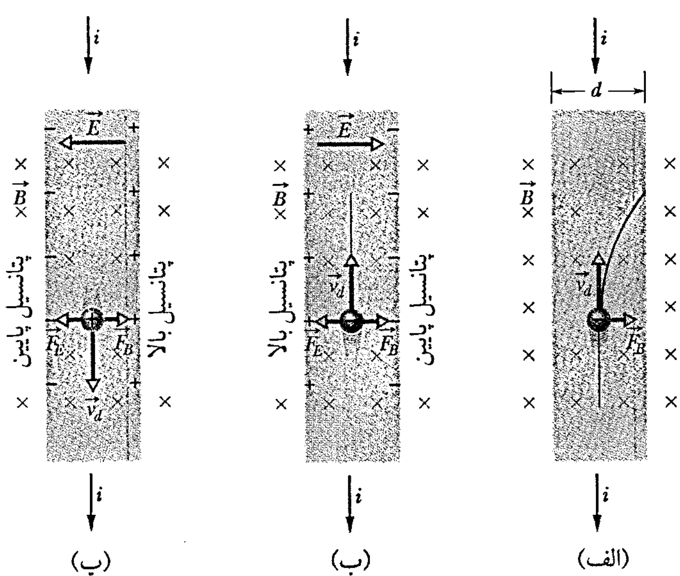
همان طور که دیدیم، باریکهٔ الکترون‌ها در خلاء می‌تواند به وسیلهٔ میدان مغناطیسی منحرف شود. آیا الکترون‌های رسانش در حال حرکت سوقی در یک سیم مسی هم می‌توانند به وسیلهٔ میدان مغناطیسی

منحرف شوند؟ در سال ۱۸۷۹/۱۲۵۸ **ادوین هال**[1]، دانشجوی ۲۴ سالهٔ دورهٔ کارشناسی ارشد دانشگاه جانز هاپکینز[2] نشان داد که چنین امری شدنی است. این، **اثر هال** است که به ما اجازه می‌دهد تا مثبت یا منفی بودن حامل‌های بار در یک رسانا را مشخص کنیم. علاوه بر این، ما می‌توانیم تعداد این حامل‌ها را در یکای حجم هم اندازه بگیریم.

شکل ۲۹ـ۸ الف، یک نوار مسی به پهنای d، را نشان می‌دهد که از آن جریان i در جهت قراردادی از بالا به پایین نوار می‌گذرد. حامل‌های بار الکترون‌ها هستند و چنان که می‌دانیم، الکترون‌ها (با تندی سوق v_d) در جهت مخالف، از پایین به بالای نوار سوق پیدا می‌کنند. در لحظهٔ نشان داده شده در شکل ۲۹ـ۸ الف، میدان مغناطیسی خارجی $\vec{B}$، که در درون سوی صفحهٔ شکل است، برقرار شده است. با توجه به معادلهٔ ۲۹ـ۲ معلوم می‌شود که یک نیروی انحراف دهنده مغناطیسی $\vec{F}_B$، به هر الکترون در حال حرکت سوقی وارد می‌شود و آن را به طرف کنارهٔ راست نوار می‌راند.

به مرور زمان، الکترون‌ها به سمت راست حرکت می‌کنند و بیشتر آنها در کنارهٔ راست نوار جمع می‌شوند، در حالی که بارهای مثبت خنثی نشده را در کنارهٔ چپ نوار در جای ثابت خود باقی می‌گذارند. جدا شدن بارهای مثبت و منفی در درون نوار مسی یک میدان الکتریکی $\vec{E}$ تولید می‌کند که در شکل ۲۹ـ۸ ب جهتش از چپ به راست است. این میدان با وارد کردن نیروی الکتریکی $\vec{F}_E$ به هر الکترون آن را به سمت چپ می‌راند.

برای رسیدن به تعادل در زمانی کوتاه، نیروی الکتریکی وارد بر هر الکترون به حدی می‌رسد که نیروی مغناطیسی را خنثی کند. وقتی این اتفاق افتاد، نیروی ناشی از $\vec{B}$ و نیروی ناشی از $\vec{E}$، مطابق شکل ۲۹ـ۸، به حال توازن در می‌آیند. سپس، الکترون‌های در حال حرکت سوقی با سرعت $\vec{v}_d$ در راستای نوار به طرف بالای صفحهٔ شکل پیش می‌روند و دیگر در کنارهٔ راست نوار جمع نمی‌شوند و میدان الکتریکی $\vec{E}$ افزایش پیدا نمی‌کند.



شکل ۲۹ـ۸ یک نوار مسی حامل جریان i در میدان مغناطیسی $\vec{B}$ قرار دارد. (الف) نمودار وضعیت موجود بی‌درنگ پس از برقرار شدن میدان مغناطیسی؛ مسیر خمیدهٔ پیموده شده توسط الکترون در اثر اعمال میدان مغناطیسی، نشان داده شده است. (ب) نمودار وضعیت تعادل، که به سرعت برقرار می‌شود. توجه کنید که بارهای منفی در طرف راست نوار جمع می‌شوند و بارهای مثبت خنثی نشده در طرف چپ برجا می‌مانند. بنابراین، پتانسیل طرف چپ نوار نسبت به پتانسیل طرف راست بالاتر است. (پ) برای همان جهت جریان، اگر حامل‌های بار مثبت باشند در طرف راست نوار جمع می‌شوند و پتانسیل طرف راست نسبت به پتانسیل طرف چپ بالاتر است.

1. Edvin H.Hall 2. Johns Hopkins

اختلاف پتانسیل هال V، وابسته به میدان الکتریکی تولید شده در پهنای نوار d، است. با توجه به معادلهٔ ۲۵-۴۲، بزرگی این اختلاف پتانسیل برابر است با:

$$V = Ed \qquad (۲۹\text{-}۹)$$

با وصل کردن یک ولت‌سنج به پهنای نوار می‌توان اختلاف پتانسیل میان دو کنارهٔ نوار را اندازه‌گیری کرد. علاوه بر این، ولت‌سنج می‌تواند نشان دهد که پتانسیل کدام کناره بالاتر است. در وضعیت شکل ۲۹-۸ الف، پتانسیل کنارهٔ چپ بالاتر است، که با فرض منفی بودن حامل‌های بار سازگار است.

اکنون، فرض مخالف را در نظر می‌گیریم، یعنی فرض می‌کنیم در جریان i حامل‌های بار دارای بار مثبت‌اند (شکل ۲۹-۸ پ). می‌پذیریم که وقتی این حامل‌های بار از بالا به پایین نوار حرکت می‌کنند در اثر نیروی $\vec{F}_B$ به کنارهٔ راست نوار رانده می‌شوند و در نتیجه، پتانسیل کنارهٔ راست بالاتر است. چون این نتیجه‌گیری با آنچه ولت‌سنج نشان می‌دهد تناقض دارد، پس حامل‌های بار باید منفی باشند.

اینک، به بررسی کمّی اثر هال می‌پردازیم. وقتی نیروهای الکتریکی و مغناطیسی در حال موازنه‌اند (شکل ۲۹-۸ ب) با استفاده از معادله‌های ۲۹-۱ و ۲۹-۳، داریم

$$eE = ev_dB \qquad (۲۹\text{-}۱۰)$$

تندی سوق v_d، با استفاده از معادلهٔ ۲۷-۷ برابر است با:

$$v_d = \frac{J}{ne} = \frac{i}{neA} \qquad (۲۹\text{-}۱۱)$$

که در آن J (مساوی با i/A) چگالی جریان در نوار، A مساحت مقطع نوار، و n چگالی عددی حامل‌های بار (تعداد حامل‌ها در یکای حجم) است.

در معادلهٔ ۲۹-۱۰، مقدار E را از معادلهٔ ۲۹-۹ و مقدار v_d را از معادلهٔ ۲۹-۱۱ جانشانی می‌کنیم:

$$n = \frac{Bi}{Vle} \qquad (۲۹\text{-}۱۲)$$ ■

در این معادله l (مساوی با A/d) ضخامت نوار است. با استفاده از این معادله می‌توان n را برحسب کمیت‌های قابل اندازه‌گیری به دست آورد.

اثر هال برای اندازه‌گیری مستقیم تندی سوق حامل‌های بار v_d، هم، که در حدود چند سانتی‌متر بر ساعت است، مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این آزمایش ماهرانه نوار فلزی به طور مکانیکی در خلاف جهت سرعت سوق حامل‌های بار در میدان مغناطیسی حرکت می‌کند. سرعت نوار متحرک تا آنجا تنظیم می‌شود که اختلاف پتانسیل هال صفر شود. در چنین شرایطی، که دیگر اثر هال وجود ندارد، سرعت حامل‌های بار نسبت به چارچوب مرجع آزمایشگاه باید صفر باشد، و در نتیجه سرعت نوار، باید بزرگی مساوی اما جهت مخالف با سرعت حامل‌های بار منفی داشته باشد.

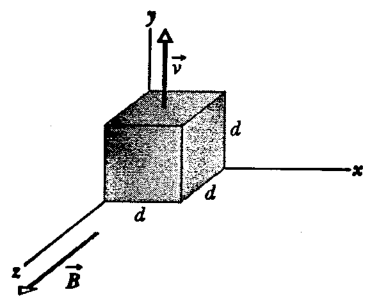
مسألهٔ نمونهٔ ۲۹-۲

شکل ۲۹-۹، یک مکعب فلزی توپر به ضلع $d = ۱٫۵\,\text{cm}$ را نشان می‌دهد که با سرعت ثابت $\vec{v}$ به بزرگی $۴٫۰\,\text{m/s}$ در جهت محور y مثبت حرکت می‌کند. حرکت این مکعب در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ به بزرگی $۰٫۰۵۰\,\text{T}$ و همسو با محور z مثبت، انجام می‌شود.

(الف) به خاطر حرکت مکعب در میدان مغناطیسی، کدام وجه در پتانسیل الکتریکی پایین و کدام وجه در پتانسیل الکتریکی بالاست؟

حل: یک **نکتهٔ کلیدی** این است که چون مکعب در میدان مغناطیسی $\vec{B}$ حرکت می‌کند، به ذرات باردار آن، از جمله الکترون‌های رسانش، یک نیروی مغناطیسی $\vec{F}_B$ وارد می‌شود. **نکتهٔ کلیدی** دوم این است که بدانیم چگونه اختلاف پتانسیل میان برخی وجه‌های مکعب را ایجاد می‌کند. وقتی مکعب در میدان مغناطیسی شروع به حرکت می‌کند، الکترون‌های رسانش آن نیز حرکت می‌کنند. چون هر الکترون دارای بار q است و با سرعت $\vec{v}$ در میدان مغناطیسی حرکت می‌کند، نیروی مغناطیسی وارد بر آن $\vec{F}_B$، از معادلهٔ ۲۹-۲ به دست می‌آید. چون q منفی است، $\vec{F}_B$ در خلاف جهت حاصل‌ضرب برداری $\vec{v}\times\vec{B}$ است، (که همسو با محور x در شکل ۲۹-۹ است). بنابراین، $\vec{F}_B$ با محور x منفی همسو است و به طرف وجه چپ مکعب اثر می‌کند (این وجه در شکل ۲۹-۹ دیده نمی‌شود).

در مولکول‌های مکعب بیشتر الکترون‌ها در جای خود ثابت‌اند. اما چون



شکل ۲۹-۹ مسألهٔ نمونهٔ ۲۹-۲. یک مکعب فلزی توپر به ضلع d، با سرعت ثابت $\vec{v}_d$ در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ حرکت می‌کند.

مکعب یک فلز است حاوی الکترون‌های رسانش است که می‌توانند آزادانه حرکت کنند. برخی از الکترون‌های رسانش تحت اثر نیروی $\vec{F}_B$ به سوی وجه چپ مکعب منحرف می‌شوند. در نتیجه، این وجه بار منفی و وجه راست بار مثبت پیدا می‌کند. جدا شدن بارها از هم یک میدان الکتریکی $\vec{E}$ تولید می‌کند که جهتش از وجه مثبت راست به سوی وجه منفی چپ است. بنابراین، وجه چپ پتانسیل الکتریکی پایین‌تر و وجه راست پتانسیل الکتریکی بالاتر دارد.

(ب) اختلاف پتانسیل میان وجه‌های با پتانسیل الکتریکی بالاتر و پایین‌تر چقدر است؟

حل: در اینجا **نکته‌های کلیدی** عبارت‌اند از:

۱. میدان الکتریکی حاصل از جدا شدن بارها $\vec{E}$، به هر الکترون نیروی الکتریکی $\vec{F}_E=q\vec{E}$ وارد می‌کند. چون q منفی است، جهت این نیرو برخلاف جهت میدان $\vec{E}$، یعنی به سمت راست، است. بنابراین به هر الکترون، $\vec{F}_E$ به سمت راست و $\vec{F}_B$ به سمت چپ وارد می‌شود.

۲. وقتی مکعب در میدان مغناطیسی شروع به حرکت می‌کند و جدا شدن بارها آغاز می‌شود، بزرگی $\vec{E}$ از صفر شروع به افزایش می‌کند. بنابراین، بزرگی F_E نیز از صفر افزایش می‌یابد و در آغاز از بزرگی F_B کوچکتر است. در طول این مرحلهٔ آغازی، نیروی برایند وارد بر هر الکترون بیشتر تحت تأثیر $\vec{F}_B$ قرار می‌گیرد و با افزایش یافتن میزان جدا شدن بارها الکترون‌های بیشتری را به سمت وجه چپ مکعب حرکت می‌دهد.

۳. با وجود این، وقتی میزان جدا شدن بارها افزایش می‌یابد، سرانجام، بزرگی F_E با بزرگی F_B برابر می‌شود. از این پس، نیروی برایند وارد بر هر الکترون صفر می‌شود و هیچ الکترون دیگری به سمت وجه چپ مکعب حرکت نمی‌کند. در نتیجه، بزرگی $\vec{F}_E$ دیگر نمی‌تواند افزایش یابد و الکترون‌ها به حال تعادل قرار می‌گیرند.

می‌خواهیم V، اختلاف پتانسیل میان وجه‌های چپ و راست مکعب را پس از برقرار شدن تعادل (که به سرعت حاصل می‌شود) بررسی کنیم. ما به شرطی می‌توانیم V را با استفاده از معادلهٔ ۲۹-۹ ($V=Ed$) به دست آوریم که نخست E، بزرگی میدان الکتریکی مربوط به حالت تعادل را پیدا کنیم. این کار را می‌توان با استفاده از معادلهٔ مربوط به موازنهٔ نیروها ($F_E=F_B$) انجام داد.

کمیت $|q|E$ را به جای F_E و کمیت $|q|vB\sin\phi$ را با استفاده از معادلهٔ ۲۹-۳ به جای F_B قرار می‌دهیم. با ملاحظهٔ شکل ۲۹-۹، معلوم می‌شود که ϕ، زاویهٔ میان بردارهای $\vec{v}$ و $\vec{B}$، برابر با ۹۰ درجه است؛ پس، با توجه به رابطه‌های $\sin\phi=1$ و $F_E=F_B$، داریم

$$|q|E = |q|vB\sin 90^\circ = |q|vB$$

و از آنجا نتیجه می‌گیریم که $E=vB$، و معادلهٔ ۲۹-۹ ($V=Ed$) به صورت زیر نوشته می‌شود

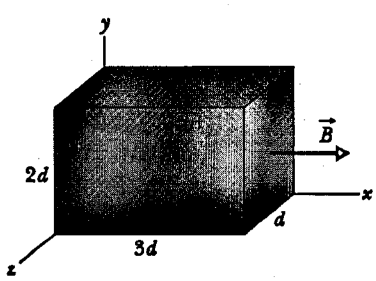
$$V = vBd \qquad (۲۹\text{-}۱۳)$$

با جانشانی مقادیر داده شده، داریم

$$V = (۴٫۰\ \mathrm{m/s})(۰٫۰۵۰\ \mathrm{T})(۰٫۰۱۵\ \mathrm{m}) \Rightarrow$$

$$V = ۰٫۰۰۳۰\ \mathrm{V} = ۳٫۰\ \mathrm{mV} \qquad \text{(پاسخ)}$$

خودآزمایی ۳: شکل زیر، یک مکعب مستطیل فلزی توپر را نشان می‌دهد که با تندی معین v در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ حرکت می‌کند. ابعاد این مکعب مستطیل، همان طور که شکل نشان می‌دهد، مضربی از d هستند. در اینجا برای جهت سرعت مکعب مستطیل شش گزینه وجود دارد: سرعت ممکن است موازی با محورهای x، y یا z و در جهت مثبت یا منفی محورها باشد. (الف) این شش گزینه را با توجه به اختلاف پتانسیل تولید شده میان وجه‌های مکعب مستطیل، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید. (ب) برای کدام گزینه، پتانسیل وجه جلوی پایین‌تر است؟



۲۹-۵ ذرهٔ باردار در حال دوران

هرگاه ذره‌ای با تندی ثابت در روی دایره‌ای حرکت کند، با اطمینان می‌توان گفت که نیروی خالص وارد بر آن با بزرگی ثابت به سوی مرکز دایره و همیشه بر بردار سرعت ذره عمود است. سنگی را که به ریسمانی بسته شده

است و در یک سطح افقی صاف بر روی دایره‌ای می‌چرخد، یا ماهواره‌ای را که در مداری دایره‌ای به دور زمین حرکت می‌کند، در نظر بگیرید. نیرو و شتاب مرکزگرای لازم را در حالت اول نیروی کشش ریسمان و در حالت دوم جاذبهٔ گرانشی زمین تأمین می‌کند.

شکل ۲۹-۱۰، نمونهٔ دیگری از این حالت را نشان می‌دهد. در اینجا باریکه‌ای از الکترون‌ها از تفنگ الکترونی G به درون اتاقکی پرتاب می‌شود. این الکترون‌ها با تندی v روی صفحهٔ شکل وارد می‌شوند و سپس در یک ناحیهٔ شامل میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ که در برون سوی صفحه است، حرکت می‌کنند. در نتیجه، میدان مغناطیسی $\vec{F}_B=q\vec{v}\times\vec{B}$ پیوسته الکترون‌ها را منحرف می‌کند و چون $\vec{v}$ و $\vec{B}$ همیشه برهم عمودند، این انحراف باعث می‌شود الکترون‌ها در یک مسیر دایره‌ای حرکت کنند. این مسیر در تصویر قابل مشاهده است، زیرا اتم‌های گاز درون اتاقک هنگام برخورد با الکترون‌های در حال دوران، نور گسیل می‌کنند.

در اینجا می‌خواهیم عامل‌های مشخص کنندهٔ حرکت دایره‌ای الکترون‌ها، یا هر ذرهٔ با بار q و جرم m را که با تندی v در صفحهٔ عمود بر میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ حرکت می‌کند، معین کنیم. با توجه به معادلهٔ ۲۹-۳، بزرگی نیروی وارد بر ذره برابر با qvB است. اگر قانون دوم نیوتون ($\vec{F}=m\vec{a}$) را برای حرکت دایره‌ای یکنواخت (معادله ۶-۱۸) به کار ببریم، خواهیم داشت

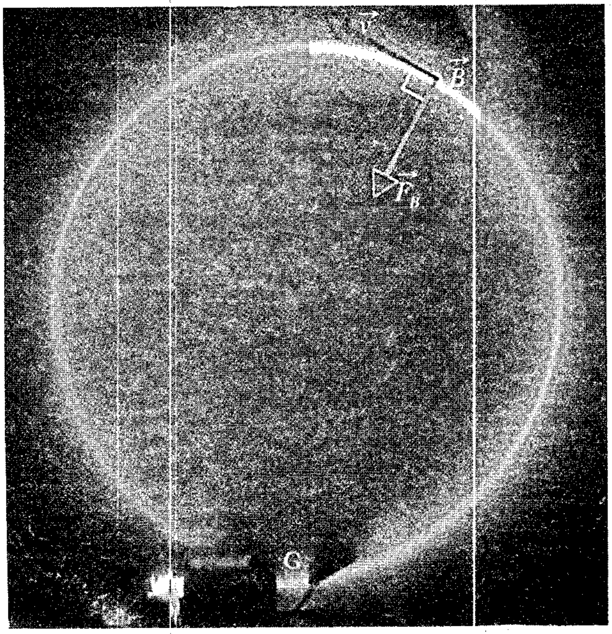
$$F = m\frac{v^2}{r} \qquad (۲۹\text{-}۱۴)$$

و از آنجا، داریم

$$qvB = m\frac{v^2}{r} \qquad (۲۹\text{-}۱۵)$$

با حل کردن این معادله نسبت به r، شعاع مسیر دایره‌ای ذره به دست می‌آید:

$$r = \frac{mv}{qB} \quad \text{(شعاع دوران)} \qquad (۲۹\text{-}۱۶)$$



شکل ۲۹-۱۰ الکترون‌ها در اتاقکی که محتوی گازی با فشار کم است، دوران می‌کنند (مسیر الکترون‌ها دایره‌ای درخشان است). میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$، که در برون سوی صفحه است، اتاقک را فرا گرفته است. به نیروی مغناطیسی شعاعی $\vec{F}_B$ توجه کنید؛ برای برقرار شدن حرکت دایره‌ای، $\vec{F}_B$ باید به سوی مرکز دایره باشد. با استفاده از قاعدهٔ دست راست در مورد ضرب برداری اطمینان حاصل کنید که رابطهٔ $\vec{F}_B=q\vec{v}\times\vec{B}$ جهت مناسب $\vec{F}_B$ را به‌دست می‌دهد (علامت بار q را فراموش نکنید).

دورهٔ تناوب T (زمان لازم برای اجرای یک دوران کامل) از تقسیم کردن محیط دایره بـه تـندی ذره بـه دست می‌آید:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{v}\frac{mv}{qB} = \frac{2\pi m}{qB} \quad \text{(دورهٔ تناوب)} \qquad (۱۷\text{-}۲۹)$$

بسامد دوران f(تعداد دورها در یکای زمان)، برابر است با:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m} \quad \text{(بسامد)} \qquad (۱۸\text{-}۲۹)$$

در نتیجه، بسامد زاویه‌ای حرکت ω، برابر است با:

$$\omega = 2\pi f = \frac{qB}{m} \quad \text{(بسامد زاویه‌ای)} \qquad (۱۹\text{-}۲۹)$$

چنان که می‌بینیم، کمیت‌های T، fو ω به تندی ذره بستگی ندارند (به شرط آنکه تندی ذره خیلی کـمتر از تندی نور باشد). ذره‌های تند در روی دایره‌های بزرگتر و ذره‌های کُند در روی دایـره‌های کـوچکتر حـرکت می‌کنند، اما همهٔ آنها با نسبت q/m یکسان و در زمان T (دورهٔ تناوب) یک دور کامل می‌چرخند. با استفاده از معادلهٔ ۲۹ـ۲، می‌توان نشان داد که اگر در جهت میدان $\vec{B}$ (از دُم به طرف سَر بردار $\vec{B}$) نگاه کنیم همیشه دوران ذرهٔ مثبت را در جهت پادساعتگرد و دوران ذره منفی را در جهت ساعتگرد می‌بینیم.

مسیرهای مارپیچی

هرگاه سرعت ذرهٔ بارداری دارای مؤلفه‌ای موازی با میدان مغناطیسی (یکـنواخت) بـاشد، ذره در یک مسـیر مارپیچی به دور بردار میدان خواهد چرخید. به عنوان مثال، شکل ۲۹ـ۱۱ الف، $\vec{v}$، بردار سرعت چنین ذره‌ای را نشان می‌دهد که به دو مؤلفه موازی با $\vec{B}$و عمود بر آن تجزیه شده است:

$$v_{\perp} = v\sin\phi \quad \text{و} \quad v_{\parallel} = v\cos\phi \qquad (۲۰\text{-}۲۹)$$

مؤلفهٔ موازی سرعت گام مارپیچ p، یعنی فاصلهٔ دو حلقهٔ مجاور (شکل ۲۹ـ۱۱ ب) را معین می‌کند. مـؤلفهٔ عمودی سرعت، شعاع مارپیچ را مشخص می‌کند و کمیتی است که در معادلهٔ ۲۹ـ۱۶ باید به جای v قرار داده شود.

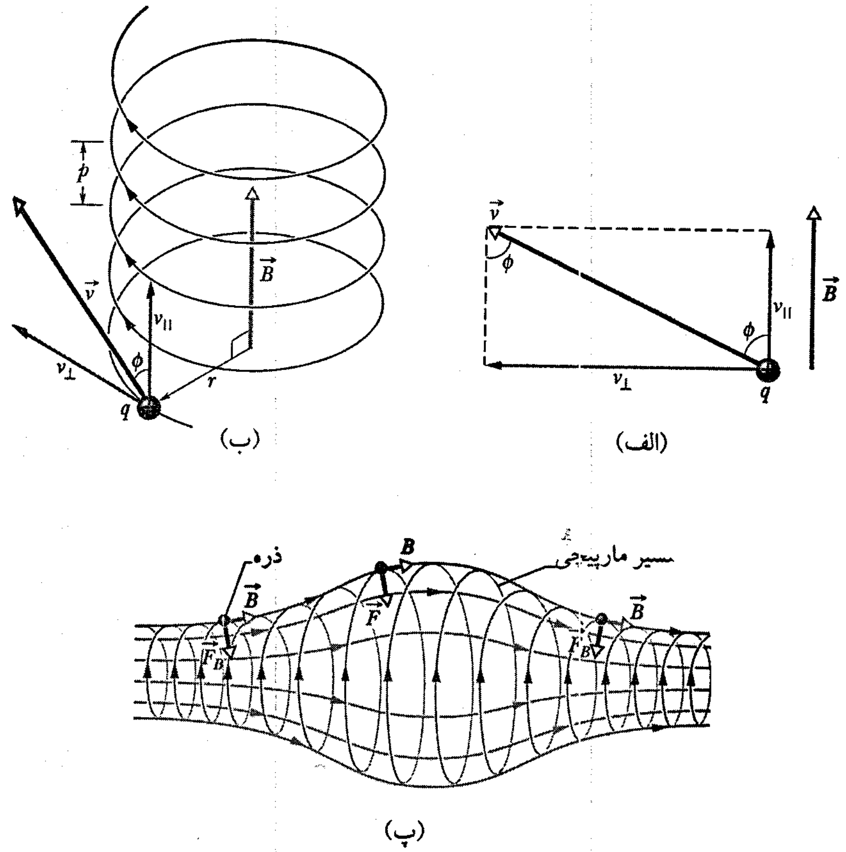
شکل ۲۹ـ۱۱ پ، نشان دهندهٔ ذرهٔ بارداری است که در یک میدان نایکنواخت حـرکت مـارپیچی انـجام می‌دهد. خط‌های میدان نزدیک به هم در دو انتهای چپ و راست شکل نشان می‌دهند که میدان مغناطیسی در آن بخش‌ها شدیدتر است. هرگاه در یک انتها میدان به قدر کافی قوی باشد ذره از آن انتها «باز می‌تابد». اگـر ذره‌ای از هر دو انتها باز بتابد، می‌گویند در یک **بطری مغناطیسی** گیر افتاده است.

الکترون‌ها و پروتون‌ها به همین ترتیب در میدان مغناطیسی زمین گیر می‌افتند. این ذره‌های گـیر افـتاده، **کمربندهای تابشی وان آلن**[1] را تشکیل می‌دهند که در بالای جوّ زمین در بین قـطب‌های شـمال و جـنوب مغناطیسی زمین حلقه زده‌اند. این ذره‌ها در عرض چند ثانیه، از یک انتها به انتهای دیگر بطری مغناطیسی به پس و پیش می‌جهند.

وقتی شعله‌های بزرگ خورشیدی الکترون‌ها و پروتون‌های پرانرژی را به درون کمربندهای تابشی پرتاب می‌کنند در محل بازتاب الکترون‌ها، یک میدان الکتریکی به وجود می‌آید. این میدان مانع بازتاب الکترون‌ها می‌شود و الکترون‌ها را به پایین و به طرف جوّ می‌راند، الکترون‌ها در آنجا با اتم‌ها و مولکول‌های هوا برخورد می‌کنند و باعث گسیل شدن نور از هوا می‌شوند. این نور **شفق قطبی** را تشکیل می‌دهد، که به صورت پرده‌ای درخشان از ارتفاع تقریبی ۱۰۰km آویخته می‌شود. نور سبز توسط اتم‌های اکسیژن و نـور صـورتی تـوسط مولکول‌های ازت گسیل می‌شود، اما این نورها آن‌قدر ضعیف‌اند که ما آنها را فقط به رنگ سفید می‌بینیم.

---

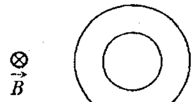
1. Van Allen

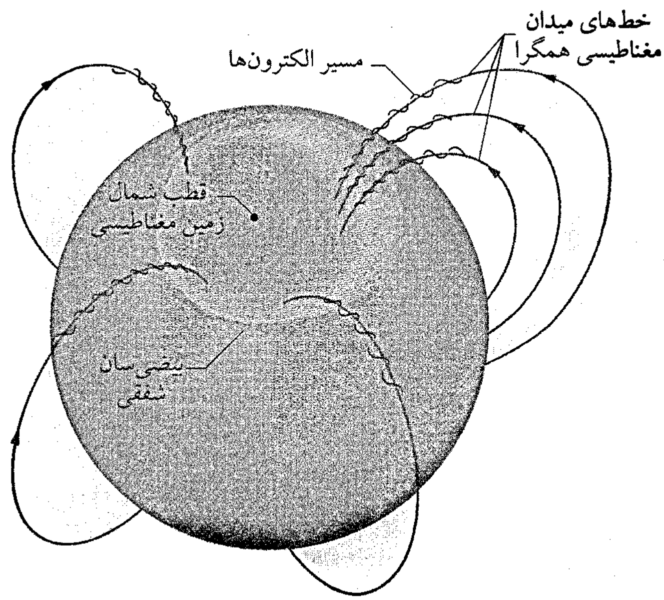


شکل ۲۹-۱۱ (الف) ذرهٔ بارداری در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ حرکت می‌کند و سرعت آن $\vec{v}$، با میدان مغناطیسی زاویهٔ ϕ می‌سازد. (ب) ذره یک مسیر مارپیچی به شعاع r و گام p را دنبال می‌کند. (پ) ذرهٔ بارداری در یک میدان مغناطیسی نایکنواخت حرکت مارپیچی انجام می‌دهد. (این ذره ممکن است گیر بیفتد و در بین میدان‌های قوی واقع در دو انتها به صورت مارپیچ به پس و پیش حرکت کند). توجه کنید که بردارهای نیروی مغناطیسی در دو انتهای چپ و راست، دارای مؤلفه‌ای به سوی مرکز شکل هستند.

شفق قطبی به صورت کمان‌هایی در بالای زمین امتداد می‌یابد و می‌تواند در ناحیه‌ای به نام بیضی‌سان شفقی ظاهر شود، تصویر آن چنان که از فضا دیده می‌شود، در شکل‌های ۲۹-۱۲ و ۲۹-۱۳ نشان داده شده است. اگر چه طول شفق قطبی زیاد است، ضخامت آن (از شمال به جنوب) از یک کیلومتر هم کمتر است، زیرا مسیرهای الکترون‌های مولد شفق قطبی در حین حرکت مارپیچی به طرف خط‌های میدان مغناطیسی همگرا باریک می‌شوند (شکل ۲۹-۱۲).

خودآزمایی ۴: شکل زیر، مسیرهای دایره‌ای دو ذره‌ای را نشان می‌دهد که با تندی یکسان در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ حرکت می‌کنند. میدان در درون سوی صفحهٔ شکل است. یکی از دو ذره پروتون و دیگری الکترون (با جرم کمتر) است. (الف) کدام ذره دایرهٔ کوچکتر را می‌پیماید، و (ب) حرکت این ذره در جهت ساعتگرد است یا پادساعتگرد؟





شکل ۲۹-۱۲ تصویر بیضی‌سان شفقی، که قطب شمال زمین مغناطیسی را (در شمال غربی گرینلند[1]) احاطه کرده است. خط‌های میدان مغناطیسی به طرف قطب شمال همگرا شده‌اند. الکترون‌های در حال حرکت به سوی زمین «گرفتار می‌شوند» و به دور این خط‌های میدان به صورت مارپیچی حرکت می‌کنند. الکترون‌ها در عرض‌های جغرافیایی بالا وارد جوّ زمین می‌شوند و در درون بیضی‌سان شفق قطبی را به وجود می‌آورند.



شکل ۲۹-۱۳ تصویری از یک شفق قطبی با رنگ بدلی در درون بیضی‌سان شفقی شمالی، که توسط ماهوارهٔ دینامیکس اکسپلورر[2]، با استفاده از نور فرابنفش گسیل شده توسط اتم‌های اکسیژن برانگیخته در شفق، گرفته شده است. بخشی از زمین که توسط خورشید روشن شده است، به صورت هلال در طرف چپ دیده می‌شود.

1. Greenland 2. Dynamics Explorer

مسألهٔ نمونهٔ ۲۹ـ۳

شکل ۲۹ـ۱۴، اساس کار یک طیف‌سنج جرم را که می‌تواند برای اندازه‌گیری جرم یک یون به کار رود، نشان می‌دهد؛ یونی به جرم m (که باید اندازه‌گیری شود) و بار الکتریکی q در چشمهٔ S تولید می‌شود. این یون، که در آغاز ساکن است توسط میدان الکتریکی ناشی از اختلاف پتانسیل V، شتاب پیدا می‌کند. یون چشمهٔ S را ترک می‌کند و به اتاقک جداکننده‌ای وارد می‌شود که در آنجا میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$، عمود بر مسیر یون برقرار است. میدان مغناطیسی باعث حرکت کردن یون در روی یک نیم‌دایره می‌شود و در نقطه‌ای به فاصلهٔ x از شکاف ورودی به یک صفحهٔ عکاسی برخورد می‌کند. (و در نتیجه بر آن اثر می‌گذارد). فرض کنید در آزمایشی $B=$۸۰ر۰۰۰mT و $V=$۱۰۰۰ر۰V، و یون‌های با بار $q=+$۱ر۶۰۲۲$\times$۱۰$^{-۱۹}$C به فاصلهٔ $x=$۱ر۶۲۵۴m به صفحهٔ عکاسی برخورد می‌کنند. جرم یک یون m، برحسب یکای جرم اتمی یکی شده (۱u=۱ر۶۶۰۵$\times$۱۰$^{-۲۷}$kg) چقدر است؟

حل: یک **نکتهٔ کلیدی** این است که چون میدان مغناطیسی (یکنواخت) باعث می‌شود یون (باردار) یک مسیر دایره‌ای را بپیماید، با استفاده از معادلهٔ ۲۹ـ۱۶ ($r=mv/qB$) می‌توان جرم یون را به شعاع مسیر دایره‌ای r، ربط داد. با توجه به شکل ۲۹ـ۱۴ معلوم می‌شود که $r=x/۲$، و بزرگی B میدان مغناطیسی هم معلوم است. اما v، تندی یون در میدان مغناطیسی پس از شتاب گرفتن تحت اختلاف پتانسیل V در دست نیست.

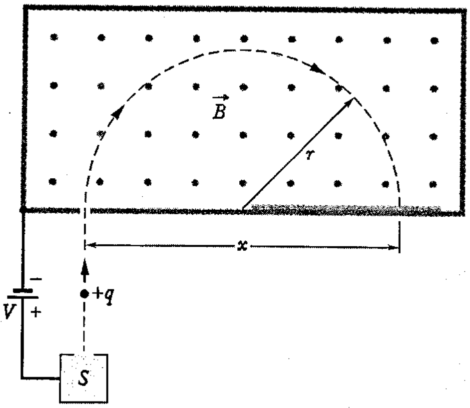
برای ربط دادن v و V به یکدیگر، این **نکتهٔ کلیدی** را، که انرژی مکانیکی ($E_{\text{mec}}=K+U$) در حین شتاب گرفتن یون پایسته است، به کار می‌بریم. انرژی جنبشی یون هنگام خارج شدن از چشمه تقریباً صفر و پس از شتاب گرفتن برابر با $\frac{۱}{۲}mv^۲$ است. در ضمن، یون مثبت در حین شتاب گرفتن تحت اثر تغییر پتانسیل $-V$ حرکت می‌کند. بنابراین، چون یون دارای بار مثبت q است، انرژی پتانسیل آن به اندازهٔ $-qV$ تغییر می‌کند. اکنون، اگر معادلهٔ پایستگی انرژی مکانیکی را به صورت

$$\Delta K + \Delta U = ۰$$

بنویسیم، خواهیم داشت

$$\frac{۱}{۲}mv^۲ - qV = ۰$$

و از آنجا



شکل ۲۹ـ۱۴ مسألهٔ نمونهٔ ۲۹ـ۳. نمودار اساس طیف‌سنج جرم. یک یون مثبت پس از خروج از چشمهٔ S و شتاب گرفتن تحت اثر اختلاف پتانسیل V، به اتاقکی وارد می‌شود که در آن میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ برقرار شده است. یون در آنجا یک مسیر نیمدایره‌ای به شعاع r می‌پیماید و در نقطه‌ای به فاصلهٔ x از محل ورود به اتاقک، به یک صفحهٔ عکاسی برخورد می‌کند.

$$v = \sqrt{\frac{۲qV}{m}} \qquad (۲۹\text{ـ}۲۱)$$

با جانشانی این مقدار در معادلهٔ ۲۹ـ۱۶، داریم

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{m}{qB}\sqrt{\frac{۲qV}{m}} = \frac{۱}{B}\sqrt{\frac{۲mV}{q}}$$

پس، نتیجه می‌گیریم که:

$$x = ۲r = \frac{۲}{B}\sqrt{\frac{۲mV}{q}}$$

این معادله را نسبت به m حل می‌کنیم و داده‌ها را در آن قرار می‌دهیم:

$$m = \frac{B^۲qx^۲}{۸V}$$

$$m = \frac{(\text{۰ر۰۸۰۰۰T})^۲(\text{۱ر۶۰۲۲}\times ۱۰^{-۱۹}\text{C})(\text{۱ر۶۲۵۴m})^۲}{۸(\text{۱۰۰۰ر۰V})} \Rightarrow$$

$$m = \text{۳ر۳۸۶۳}\times ۱۰^{-۲۵}\text{kg} = \text{۲۰۳ر۹۳u} \qquad \text{(پاسخ)}$$

مسألهٔ نمونهٔ ۲۹ـ۴

الکترونی با انرژی جنبشی ۲۲ر۵eV در ناحیه‌ای شامل یک میدان مغناطیسی یکنواخت به بزرگی $B=$۴ر۵۵$\times$۱۰$^{-۴}$T حرکت می‌کند. زاویهٔ میان میدان $\vec{B}$ و بردار سرعت الکترون $\vec{v}$، برابر با ۶۵ر۵ درجه است. گام مسیر مارپیچی پیموده شده توسط الکترون p، چقدر است؟

حل: در اینجا یک **نکتهٔ کلیدی** این است که گام p مسافتی است که الکترون در راستای موازی با میدان مغناطیسی $\vec{B}$ و در مدت یک دورهٔ تناوب دوران T، می‌پیماید. **نکتهٔ کلیدی** دوم این است که دورهٔ تناوب T از معادلهٔ ۲۹ـ۱۷، بدون در نظر گرفتن زاویهٔ میان بردارهای $\vec{v}$ و $\vec{B}$ به دست می‌آید (به شرط آنکه این زاویه صفر نباشد، که اگر صفر باشد الکترون نمی‌چرخد). بنابراین، با استفاده از معادله‌های ۲۹ـ۲۰ و ۲۹ـ۱۷، داریم

$$p = v_{\parallel} T = (v\cos\phi)\frac{۲\pi m}{qB} \qquad (۲۲\text{-}۲۹)$$

چنانکه در مورد پروتون در مسألهٔ نمونهٔ ۲۹-۱ دیدیم، تندی الکترون v، را با استفاده از انرژی جنبشی الکترون می‌توان حساب کرد، که برابر با $v=۲{,}۸۱\times۱۰^{۶}\text{m/s}$ است. با جانشانی بزرگی سرعت و داده‌های معلوم در معادلهٔ ۲۹-۲۲، داریم

$$p = (۲{,}۸۱\times۱۰^{۶}\text{m/s})(\cos۶۵{,}۵^{\circ}) \times \frac{۲\pi(۹{,}۱۱\times۱۰^{-۳۱}\text{kg})}{(۱{,}۶۰\times۱۰^{-۱۹}\text{C})(۴{,}۵۵\times۱۰^{-۴}\text{T})} \Rightarrow$$

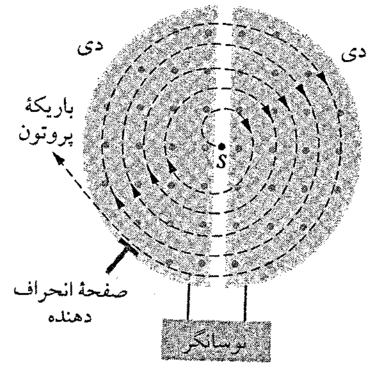
$$p = ۹{,}۱۶\text{cm}$$ (پاسخ)

۲۹-۶ سیکلوترون و سینکروترون

ساختار ماده در کوچک‌ترین مقیاس چگونه است؟ این، پرسشی است که همواره توجه فیزیکدانان را به خود جلب کرده است. یکی از راه‌های به دست آوردن پاسخ این پرسش این است که یک ذرهٔ باردار پرانرژی (مثلاً، یک پروتون) را به شدت به هدف جامدی بکوبیم. اما راه بهتر آن است که دو پروتون پرانرژی به طور رودررو با هم برخورد کنند. با تحلیل کردن آثار به جامانده از بسیاری از این برخوردها می‌توان به ماهیت ذرات زیر اتمی پی برد. جایزهٔ نوبل فیزیک در سال‌های ۱۹۷۶ و ۱۹۸۴ به کسانی اعطا شده است که این گونه مطالعات را انجام داده‌اند.

در چنین آزمایش‌هایی چگونه می‌توان به پروتون انرژی جنبشی کافی داد؟ در این کار رهیافت مستقیم این است که بگذاریم پروتون تحت اختلاف پتانسیل V «سقوط کند» تا انرژی جنبشی‌اش به اندازهٔ eV افزایش پیدا کند. اما اگر بخواهیم به انرژی‌های بالاتر و بالاتر دست پیدا کنیم، برقرار کردن اختلاف پتانسیل لازم بیش از پیش مشکل‌تر می‌شود.

روش بهتر آن است که ترتیبی بدهیم تا پروتون در یک میدان مغناطیسی دوران کند و در هر دور یک «لگد» الکتریکی مناسب به آن زده شود. به عنوان مثال، اگر پروتونی در یک میدان مغناطیسی ۱۰۰ بار دور بزند و در هر دور یک انرژی ۱۰۰keV به دست آورد، در پایان انرژی جنبشی‌اش به (۱۰۰keV)(۱۰۰) یا ۱۰MeV می‌رسد. اکنون دو وسیلهٔ شتاب دهندهٔ بسیار مفید را که بر این اساس کار می‌کنند مورد مطالعه قرار می‌دهیم.



شکل ۲۹-۱۵ نمودار اجزای یک سیکلوترون، که چشمهٔ S و دی‌ها را نشان می‌دهد. جهت میدان مغناطیسی یکنواخت در برون سوی صفحهٔ شکل است. پروتون‌های دوران کننده در میان دی‌های خالی به صورت مارپیچ به سمت بیرون حرکت و هر بار که از شکاف میان دی‌ها می‌گذرند، انرژی کسب می‌کنند.

سیکلوترون

شکل ۲۹-۱۵، تصویر ناحیه‌ای از یک **سیکلوترون** را با دید از بالا نشان می‌دهد که در آن ذره‌ها (مثلاً پروتون‌ها) دوران می‌کنند. در این سیستم دو شیء توخالی **D– شکل** (که کناره‌های مستقیم آنها باز است) از ورقه‌های مسی ساخته شده‌اند. این دو شیء، که **دی‌ها** نام دارند، بخشی از یک نوسانگر الکتریکی را تشکیل می‌دهند. این نوسانگر در دو طرف شکاف میان دی‌ها به طور متناوب یک اختلاف پتانسیل الکتریکی برقرار می‌کند. علامت‌های الکتریکی دی‌ها به نوبت طوری عوض می‌شوند که میدان الکتریکی در شکاف را به تناوب، ابتدا به طرف یک دی و سپس به طرف دی دیگر، به پس و پیش تغییر می‌دهند. دی‌ها در یک میدان مغناطیسی ($B=۱{,}۵\text{T}$) که در برون سوی صفحهٔ شکل است، قرار دارند. این میدان توسط یک آهن‌ربای الکتریکی بزرگ ایجاد می‌شود.

فرض کنید پروتونی که در شکل ۲۹-۱۵ توسط چشمهٔ S واقع در مرکز سیکلوترون پرتاب شده است، نخست به سمت دی منفی حرکت کند. پروتون به سمت این دی شتاب پیدا می‌کند و به آن وارد می‌شود. در درون دی پروتون به وسیلهٔ دیوارهای مسی دی از اثر میدان‌های الکتریکی محفوظ می‌ماند؛ یعنی میدان الکتریکی به دی وارد نمی‌شود. اما میدان مغناطیسی به وسیلهٔ دی مسی (نامغناطیسی) حفاظت نمی‌شود. در نتیجه، پروتون در یک مسیر دایره‌ای، که شعاعش به تندی پروتون بستگی دارد حرکت می‌کند؛ این شعاع از معادلهٔ ۲۹-۱۶ ($r=mv/qB$) به دست می‌آید.

اکنون، فرض کنید در لحظهٔ خروج پروتون از شکاف مرکزی در دی اول، قطبیت اختلاف پتانسیل میان دی‌ها عوض می‌شود. در این صورت، پروتون دوباره با یک دی منفی مواجه می‌شود و باز هم شتاب پیدا می‌کند. این فرایند ادامه می‌یابد و پروتون دوران کننده همیشه با نوسان‌های پتانسیل دی همگام است تا آنکه با

پیمودن یک مسیر مارپیچی از لبهٔ سیستم دی خارج می‌شود. در آنجا یک صفحهٔ انحراف دهندهٔ پروتون را از طریق یک معبر خارج می‌کند.

نکتهٔ اساسی در نحوهٔ کار سیکلوترون این است که f، بسامد دوران پروتون در میدان (که به تندی بستگی ندارد)، باید با بسامد ثابت نوسانگر الکتریکی، f_{osc}، برابر باشد:

$$f = f_{osc} \qquad \text{(شرط تشدید)} \qquad (۲۳\text{-}۲۹)$$ ■

بنا به این شرط تشدید اگر بخواهیم انرژی پروتون دوران کننده افزایش یابد، باید این انرژی با بسامد f_{osc}، که برابر با f، بسامد طبیعی دوران پروتون در میدان مغناطیسی است، به پروتون داده شود.

از ترکیب معادله‌های ۲۹ـ۱۸ و ۲۹ـ۲۳ می‌توان شرط تشدید را به صورت زیر نوشت

$$qB = ۲\pi m f_{osc} \qquad (۲۴\text{-}۲۹)$$

برای پروتون، q و m مقادیری ثابت‌اند. نوسانگر طوری طراحی می‌شود که با تک بسامد ثابت f_{osc} (بنا به فرض) کار کند. پس، با تغییر دادن B می‌توان سیکلوترون را «کوک کرد» تا معادلهٔ ۲۹ـ۲۴ برقرار شود و پروتون‌های زیادی که در میدان مغناطیسی دوران می‌کنند، به صورت باریکه‌ای از سیستم خارج شوند.

سینکروترون پروتون

اگر انرژی پروتون بیش از ۵۰MeV باشد، سیکلوترون مرسوم در کار خود در می‌ماند. زیرا یکی از فرض‌های اساسی مربوط به این سیستم ـ یعنی مستقل بودن بسامد دوران یک ذرهٔ باردار در میدان مغناطیسی از تندی ذره ـ فقط برای تندی‌های خیلی کمتر از تندی نور صادق است. هرگاه تندی پروتون زیاد (تقریباً بالاتر از ۱۰ درصد تندی نور) باشد، باید مسأله را به صورت نسبیتی بررسی کنیم. بنا به نظریهٔ نسبیت، در حین نزدیک شدن تندی پروتون دوران کننده به تندی نور بسامد دوران پروتون به طور پیوسته کاهش می‌یابد. در نتیجه، پروتون از همگامی با نوسانگر ـ که بسامدش در مقدار f_{osc} ثابت است ـ باز می‌ماند و سرانجام انرژی‌اش افزایش پیدا نمی‌کند.

مشکل دیگر این است که برای یک پروتون با انرژی ۵۰۰GeV در میدان مغناطیسی ۱٫۵T، شعاع مسیر ۱٫۱km است. در این شرایط آهن‌ربای یک سیکلوترون مرسوم با اندازهٔ مناسب به نحوی نامکن گران تمام می‌شود و مساحت قطبرخ‌هایش به حدود $۴\times۱۰^{۶}\text{m}^{۲}$ می‌رسد.

سینکروترون پروتون وسیله‌ای است که برای فایق آمدن بر این مشکلات طراحی شده است. میدان مغناطیسی B و بسامد نوسانگر f_{osc}، به جای داشتن مقادیر ثابت در سیکلوترون مرسوم، در طی چرخهٔ شتاب دادن برحسب زمان تغییر می‌کند. اگر این کار به خوبی انجام شود، (۱) بسامد دوران پروتون همیشه با بسامد نوسانگر همگام خواهد بود، و (۲) پروتون‌ها یک مسیر دایره‌ای ـ و نه مارپیچی ـ خواهند پیمود. بنابراین، آهن‌ربا به جای داشتن مساحتی در حدود $۴\times۱۰^{۶}\text{m}^{۲}$، فقط در طول مسیر دایره‌ای پروتون مورد نیاز خواهد بود. اما اگر بخواهیم به انرژی‌های بالا دست پیدا کنیم باید باز هم مسیر دایره‌ای را بزرگتر اختیار کنیم. سینکروترون پروتون آزمایشگاه شتاب دهندهٔ ملی فرمی[1] در ایلینویز[2] (امریکا) محیطی برابر با ۶٫۳km دارد و می‌تواند پروتون‌هایی با انرژی‌ای در حدود ۱TeV (مساوی با $۱۰^{۱۲}\text{eV}$) تولید کند.

مسألهٔ نمونهٔ ۲۹ـ۵

فرض کنید سیکلوترونی با بسامد نوسانگر ۱۲MHz کار می‌کند و شعاع دی آن $R=۵۳\text{cm}$ است.

(الف) بزرگی میدان مغناطیسی لازم برای شتاب دادن به دوترون‌ها در این شتاب دهنده چقدر است؟ دوترون هستهٔ دوتریوم، از ایزوتوپ‌های هیدروژن، است. دوترون شامل یک پروتون و یک نوترون است و در نتیجه، بار الکتریکی آن همان بار یک پروتون است. جرم دوترون برابر است با $m=۳٫۳۴\times۱۰^{-۲۷}\text{kg}$.

حل: در اینجا **نکتهٔ کلیدی** این است که به ازای بسامد نوسانگر معین f_{osc}،

---

1. Fermi National Accelerator Laboratory (Fermilab)
2. Illinois

برای شتاب دادن به هر ذره در یک سیکلوترون، بزرگی میدان مغناطیسی لازم B، طبق معادلهٔ ۲۹ـ۲۴، به m/q، نسبت جرم به بار آن ذره بستگی دارد. برای دوترون‌ها و بسامد نوسانگر $f_{osc}=۱۲\text{MHz}$، داریم

$$B = \frac{۲\pi m f_{osc}}{q} = \frac{(۲\pi)(۳٫۳۴\times۱۰^{-۲۷}\text{kg})(۱۲\times۱۰^{۶}\text{s}^{-۱})}{۱٫۶۰\times۱۰^{-۱۹}\text{C}} \Rightarrow$$

$$B = ۱٫۵۷\text{T} \approx ۱٫۶\text{T}$$ **(پاسخ)**

توجه کنید که برای شتاب دادن به پروتون‌ها بزرگی B به نصف کاهش می‌یابد، به شرط آنکه بسامد نوسانگر در همان مقدار ۱۲MHz ثابت بماند.

(ب) انرژی جنبشی دوترون‌ها چیست؟

حل: یک **نکتهٔ کلیدی** این است که انرژی جنبشی ($\frac{۱}{۲}mv^۲$) دوترون خارج شده از سیکلوترون درست برابر با انرژی جنبشی پیش از خروج آن است در هنگامی که در یک مسیر دایره‌ای با شعاع تقریبی مساوی با R، شعاع دی‌های سیکلوترون، حرکت می‌کرد. **نکتهٔ کلیدی** دوم این است که v، تندی حرکت دوترون در مسیر دایره‌ای را می‌توان با استفاده از معادلهٔ ۲۹ـ۱۶ ($r=mv/qB$) به دست آورد. با حل کردن این معادله نسبت به v، و قرار دادن R به جای r، و سپس جانشانی داده‌های معلوم، داریم

$$v = \frac{RqB}{m} = \frac{(۰٫۵۳\text{m})(۱٫۶۰\times۱۰^{-۱۹}\text{C})(۱٫۵۷\text{T})}{۳٫۳۴\times۱۰^{-۲۷}\text{kg}}$$

$$v = ۳٫۹۹\times۱۰^{۷}\text{m/s}$$

این تندی متناظر با انرژی جنبشی زیر است:

$$K = \frac{۱}{۲}mv^۲$$

$$K = \frac{۱}{۲}(۳٫۳۴\times۱۰^{-۲۷}\text{kg})(۳٫۹۹\times۱۰^{۷}\text{m/s})^۲ \Rightarrow$$

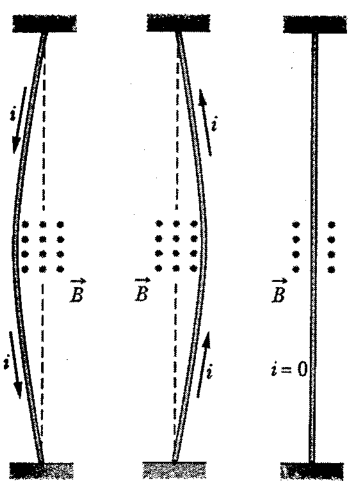
$$K = ۲٫۷\times۱۰^{-۱۲}\text{J}$$ **(پاسخ)**

این انرژی در حدود ۱۷MeV است.

۲۹ـ۷ نیروی مغناطیسی وارد بر سیم حامل جریان

چنان‌که پیشتر دیدیم (در ارتباط با اثر هال) میدان مغناطیسی به الکترون‌های در حال حرکت در یک سیم یک نیروی جانبی وارد می‌کند. این نیرو باید به خود سیم هم منتقل شود، زیرا الکترون‌های رسانش نمی‌توانند به‌طور جانبی از سیم خارج شوند.

در شکل ۲۹ـ۱۶ الف، سیم بدون جریانی، که دو سرش ثابت شده است، به طور قائم در شکاف بین قطبرخ‌های قائم یک آهن‌ربا قرار گرفته است. میدان مغناطیسی در بین رخ‌ها در برون سوی صفحهٔ شکل است. در شکل ۲۹ـ۱۶ ب، سیم حامل جریانی به سمت بالاست و به سمت راست منحرف می‌شود. در شکل ۲۹ـ۱۶ پ، جهت جریان برعکس است و سیم به سمت چپ منحرف می‌شود.



شکل ۲۹ـ۱۶ یک سیم انعطاف‌پذیر از میان قطبرخ‌های یک آهن‌ربا عبور کرده است (فقط قطبرخ زیرین نشان داده شده است). (الف) سیم بدون جریان و به شکل مستقیم است. (ب) سیم حامل جریانی به سمت بالاست و به طرف راست منحرف می‌شود. (پ) سیم حامل جریانی به سمت پایین است و به طرف چپ منحرف می‌شود. اتصال‌های الکتریکی مربوط به ورود جریان از یک سر سیم و خروج از سر دیگر، نشان داده نشده‌اند.

شکل ۲۹ـ۱۷، نشان می‌دهد که درون سیم شکل ۲۹ـ۱۶ چه اتفاقی روی می‌دهد. در اینجا یکی از الکترون‌های رسانش را می‌بینیم که با تندی سوق v_d به سمت پایین حرکت می‌کند. از معادلهٔ ۲۹ـ۳ نتیجه می‌گیریم که به ازای $\phi=۹۰°$، به هر الکترون نیروی $\vec{F}_B$ با بزرگی ev_dB وارد می‌شود. با توجه به معادلهٔ ۲۹ـ۲ معلوم می‌شود که این نیرو باید به سمت راست باشد. بنابراین، انتظار داریم که کل سیم تحت تأثیر نیرویی به سمت راست قرار گیرد، و این موضوع با شکل ۲۹ـ۱۶ ب سازگار است.

اگر در شکل ۲۹ـ۱۷، هر کدام از جهت‌های میدان مغناطیسی یا جریان، را وارون می‌کردیم، جهت نیروی وارد بر سیم وارون و سیم به سمت چپ منحرف می‌شد. در ضمن، توجه کنید که بارهای الکتریکی چه منفی باشند و به سمت پایین سیم (جهت واقعی) حرکت کنند و چه مثبت باشند و به سمت بالا حرکت کنند، جهت نیروی انحراف دهندهٔ وارد بر سیم در هر دو حالت یکی است. بنابراین، اگر جریان بارهای مثبت را در نظر بگیریم بهتر است.

در شکل ۲۹ـ۱۷، طولی برابر با L از سیم را در نظر می‌گیریم. تمام الکترون‌های رسانش در این بخش از سیم، در زمانی برابر با $t=L/v_d$ از صفحهٔ xx در شکل ۲۹ـ۱۷ می‌گذرند. بنابراین، مقدار باری که در این مدت از صفحه عبور می‌کند، برابر است با:

$$q = it = i\frac{L}{v_d}$$

با جانشانی این مقدار در معادلهٔ ۲۹ـ۳، داریم

$$F_B = qv_dB\sin\phi = \frac{iL}{v_d}v_dB\sin۹۰° \Rightarrow$$

$$F_B = iLB \tag{۲۹ـ۲۵}$$

این معادله نیروی مغناطیسی مربوط به طول L از سیم مستقیم حامل جریان i واقع در میدان مغناطیسی B عمود بر سیم، را به دست می‌دهد.

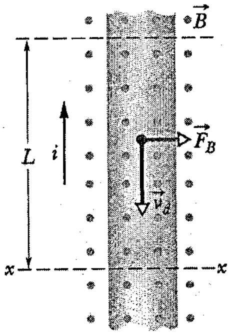
اگر میدان مغناطیسی، مطابق شکل ۲۹ـ۱۸، بر سیم **عمود نباشد**، نیروی مغناطیسی در حالت کلی معادلهٔ ۲۹ـ۲۵، چنین به دست می‌آید:

$$\vec{F}_B = i\vec{L} \times \vec{B} \qquad \text{(نیروی وارد بر سیم حامل جریان)} \qquad (۲۹\text{-}۲۶)$$

در اینجا $\vec{L}$ بردار طول است که دارای بزرگی L و همسوی با جریان (قراردادی) است. بزرگی نیروی F_B برابر است با:

$$F_B = iLB\sin\phi \qquad (۲۹\text{-}۲۷)$$

در این معادله ϕ زاویهٔ میان بردارهای $\vec{L}$ و $\vec{B}$ است. جهت $\vec{F}_B$ همان جهت حاصل‌ضرب برداری $\vec{L}\times\vec{B}$ است، زیرا جریان i را کمیتی مثبت در نظر گرفتیم. معادلهٔ ۲۹ـ۲۶ نشان می‌دهد که $\vec{F}_B$، مطابق شکل ۲۹ـ۱۸، همیشه بر صفحهٔ شامل $\vec{L}$ و $\vec{B}$، عمود است.



شکل ۲۹ـ۱۷ نمای نزدیکی از مقطع سیم شکل ۲۹ـ۱۶ ب. جریان به سمت بالاست، و این، به معنای حرکت سوقی الکترون‌ها به سمت پایین است. میدان مغناطیسی در برون سوی صفحهٔ شکل است، که باعث حرکت کردن الکترون‌ها و سیم به سمت راست می‌شود.

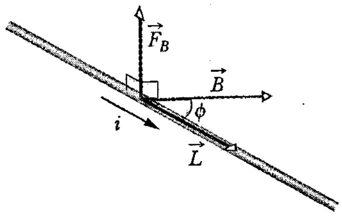
معادلهٔ ۲۹ـ۲۶ با معادلهٔ ۲۹ـ۲، که می‌توان آن را معادلهٔ تعریف کنندهٔ $\vec{B}$ در نظر گرفت، هم‌ارز است. در عمل، میدان $\vec{B}$ را با استفاده از معادلهٔ ۲۹ـ۲۶ هم می‌توان تعریف کرد، زیرا اندازه‌گیری نیروی مغناطیسی وارد بر یک سیم از اندازه‌گیری نیروی وارد بر تک بار متحرک آسان‌تر است.

اگر سیم حامل جریان مستقیم نباشد، یا میدان مغناطیسی یکنواخت نباشد، می‌توان سیم را در ذهن خود به پاره‌های کوچک و مستقیم تقسیم و در مورد هر پاره از معادلهٔ ۲۹ـ۲۶ استفاده کرد. در این صورت، نیروی وارد بر کل سیم از مجموع برداری تمام نیروهای وارد بر پاره‌های تشکیل دهندهٔ سیم به دست می‌آید. در حد دیفرانسیلی می‌توان نوشت

$$d\vec{F}_B = i\,d\vec{L}\times\vec{B} \qquad (۲۹\text{-}۲۸)$$

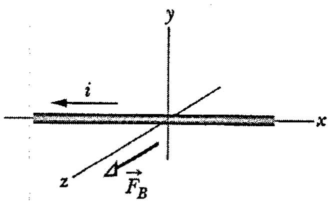
با انتگرال‌گیری از معادلهٔ ۲۹ـ۲۸ در روی هر آرایش معینی از جریان می‌توان نیروی برایند وارد بر آن آرایش را پیدا کرد.

در کاربرد معادلهٔ ۲۹ـ۲۸ توجه کنید که هیچ پاره سیم حامل جریانی به طول dL که منزوی باشد، وجود ندارد. همیشه باید راهی در نظر گرفت که جریان از یک سر سیم وارد و از سر دیگر خارج شود.



شکل ۲۹ـ۱۸ یک سیم حامل جریان i با میدان مغناطیسی $\vec{B}$ زاویهٔ ϕ تشکیل می‌دهد. این سیم در میدان دارای طول L و بردار طول $\vec{L}$ (در جهت جریان) است و به آن نیروی مغناطیسی $\vec{F}_B=i\vec{L}\times\vec{B}$ وارد می‌شود.

خودآزمایی ۵: شکل زیر، جریان i گذرنده از یک سیم واقع در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ و هم‌چنین، نیروی مغناطیسی وارد بر سیم $\vec{F}_B$، را نشان می‌دهد. جهت میدان مغناطیسی به گونه‌ای است که نیروی وارد بر سیم بیشینه است. میدان در چه جهتی است؟



مسألهٔ نمونهٔ ۲۹ـ۶

یک سیم مستقیم و افقی حامل جریان $i=$ ۲۸A است. بزرگی و جهت میدان مغناطیسی کمینهٔ $\vec{B}$ برای معلق ماندن سیم، یعنی برای آنکه نیروی مغناطیسی حاصل با نیروی گرانشی وارد بر سیم متوازن شود، چیست؟ چگالی خطی (جرم یکای طول) سیم ۴۶٫۶g/m است.

حل: یک **نکتهٔ کلیدی** این است که چون سیم حامل جریان است، نیروی مغناطیسی $\vec{F}_B$ وقتی می‌تواند روی سیم اثر کند که سیم در میدان مغناطیسی $\vec{B}$ قرار گیرد. برای متوازن شدن نیروی گرانشی رو به پایین $\vec{F}_g$ وارد بر سیم، باید $\vec{F}_B$ رو به بالا باشد (شکل ۲۹ـ۱۹).

نکتهٔ کلیدی دوم این است که طبق معادلهٔ ۲۹ـ۲۶، جهت $\vec{F}_B$ با جهت‌های $\vec{B}$ و بردار طول سیم، $\vec{L}$، رابطه دارد. چون راستای $\vec{L}$ افقی است (و جریان مثبت فرض شده است)، معادلهٔ ۲۹ـ۲۶ و قاعدهٔ دست راست در مورد ضرب برداری نشان می‌دهند که $\vec{B}$ باید افقی و به سمت راست (در

شکل ۲۹ـ۱۹) باشد تا نیروی رو به بالای لازم $\vec{F}_B$، حاصل شود.

بزرگی $\vec{F}_B$ با استفاده از معادلهٔ ۲۹ـ۲۷ ($F_B=iLB\sin\phi$) به دست می‌آید. چون می‌خواهیم $\vec{F}_B$ با $\vec{F}_g$ متوازن شود، پس، می‌توان نوشت:

$$iLB\sin\phi = mg \tag{29-29}$$

که در آن mg بزرگی نیروی $\vec{F}_g$ و m جرم سیم است. در ضمن، می‌خواهیم بزرگی میدان B، در نیروی $\vec{F}_B$ برای متوازن شدن با $\vec{F}_g$ کمینه باشد. پس، لازم است $\sin\phi$ در معادلهٔ ۲۹ـ۲۹ بیشینه باشد. برای این کار، $\phi=90^\circ$ را در معادله قرار می‌دهیم که به ازای آن $\vec{B}$ بر سیم عمود است. در نتیجه، داریم $\sin\phi=1$ و از معادلهٔ ۲۹ـ۲۹ نتیجه می‌گیریم که:

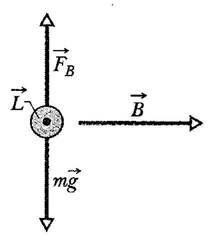
$$B = \frac{mg}{iL\sin\phi} = \frac{(m/L)g}{i} \tag{29-30}$$

نتیجهٔ حاصل را بدین جهت به صورت معادلهٔ بالا نوشتیم که مقدار m/L، چگالی خطی سیم، معلوم است. با جانشانی داده‌های معلوم، داریم

$$B = \frac{(46.6\times10^{-3}\,\mathrm{kg/m})(9.8\,\mathrm{m/s^2})}{28\,\mathrm{A}} \Rightarrow$$

$$B = 1.6\times10^{-2}\,\mathrm{T}$$ (پاسخ)

این مقدار در حدود ۱۶۰ برابر شدت میدان مغناطیسی زمین است.



شکل ۲۹ـ۱۹ مسألهٔ نمونهٔ ۲۹ـ۶. یک سیم حامل جریان (که مقطع آن نشان داده شده است) می‌تواند در یک میدان مغناطیسی «معلق» شود. جریان در سیم در برون سوی صفحهٔ شکل و میدان مغناطیسی به سمت راست است.

۲۹ـ۸ گشتاور نیروی وارد بر حلقهٔ جریان

در زندگی امروزی بسیاری از کارها به وسیلهٔ موتورهای الکتریکی انجام می‌شوند. عامل‌های انجام دهندهٔ این کار، نیروهای مغناطیسی هستند که آنها را در بخش پیش مطالعه کردیم. اینها، همان نیروهایی هستند که میدان مغناطیسی به یک سیم حامل جریان الکتریکی وارد می‌کند.

شکل ۲۹ـ۲۰، موتور ساده‌ای را نشان می‌دهد که شامل یک تک حلقهٔ حامل جریان است و در میدان مغناطیسی $\vec{B}$ قرار گرفته است. دو نیروی مغناطیسی $\vec{F}$ و $-\vec{F}$ به حلقه یک گشتاور نیرو وارد می‌کنند و تمایل دارند حلقه را حول محور مرکزی آن بچرخانند. در اینجا اگر چه بسیاری از نکات اساسی منظور نشده‌اند، اما شکل داده شده نشان می‌دهد که چگونه تأثیر میدان مغناطیسی روی یک حلقهٔ حامل جریان، حرکت دورانی ایجاد می‌کند. اکنون، به تحلیل این اثر می‌پردازیم.

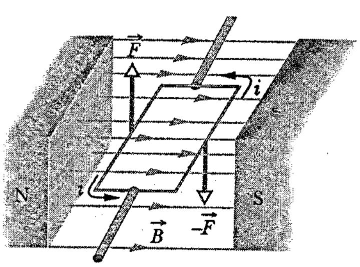
شکل ۲۹ـ۲۱ الف، حلقهٔ مستطیل شکلی به ضلع‌های a و b را نشان می‌دهد که حامل جریان i است و در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ قرار دارد. حلقه را به گونه‌ای در میدان قرار می‌دهیم که ضلع‌های دراز آن، ۱ و ۳، بر میدان مغناطیسی (که در درون سوی صفحهٔ شکل است) عمود باشند، اما ضلع‌های کوتاه آن، ۲ و ۴، عمود نباشند. برای ورود و خروج جریان در حلقه به سیم‌های رابطی نیاز داریم، که به خاطر سادگی در شکل نشان داده نشده‌اند.

برای مشخص کردن سمتگیری حلقه در میدان مغناطیسی از $\vec{n}$، بردار عمود بر صفحهٔ حلقه استفاده می‌کنیم. شکل ۲۹ـ۲۱ ب، قاعدهٔ دست راست را برای پیدا کردن جهت $\vec{n}$ نشان می‌دهد. اگر در هر نقطه از حلقه انگشت‌های دست راست خود را در جهت جریان قرار دهید یا بپیچید، در آن صورت، انگشت شست به حالت کشیده جهت بردار عمود $\vec{n}$ را نشان خواهد داد.

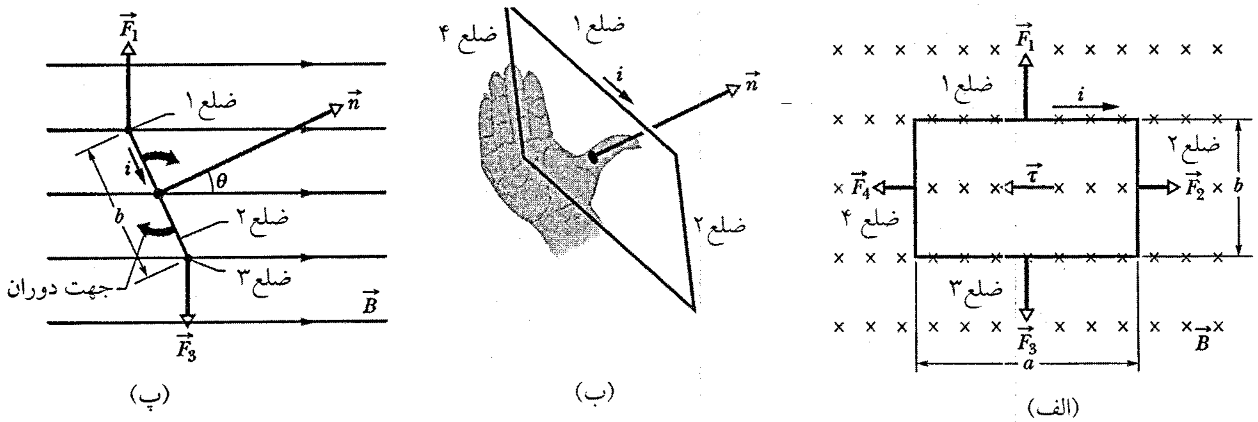
در شکل ۲۹ـ۲۱ پ، بردار عمود بر حلقه تحت زاویهٔ اختیاری θ نسبت به میدان مغناطیسی $\vec{B}$ نشان داده شده است. اکنون، می‌خواهیم نیروی برایند و گشتاور نیروی برایند وارد بر حلقه در این سمتگیری را پیدا کنیم.

نیروی برایند وارد بر حلقه برابر با مجموع برداری نیروهای مؤثر بر چهار ضلع حلقه است. در ضلع ۲، بردار $\vec{L}$ در معادلهٔ ۲۹ـ۲۶ در جهت جریان و بزرگی آن b است. زاویهٔ میان $\vec{L}$ و $\vec{B}$ برای ضلع ۲، $90^\circ-\theta$ است (شکل ۲۹ـ۲۱ پ را ببینید). بنابراین، بزرگی نیروی وارد بر این ضلع برابر است با:

$$F_2 = ibB\sin(90^\circ - \theta) = ibB\cos\theta \tag{29-31}$$



شکل ۲۹ـ۲۰ نمودار اجزای یک موتور الکتریکی. حلقهٔ سیم مستطیل شکل که حامل جریان است و آزادانه می‌تواند حول محور ثابتی بچرخد، در یک میدان مغناطیسی قرار دارد. نیروهای مغناطیسی وارد بر حلقهٔ سیم گشتاور نیرویی وارد می‌کنند که حلقه را می‌چرخاند. یک جابه‌جاگر (که نشان داده نشده است) در هر نیم دور جهت جریان را عوض می‌کند، به گونه‌ای که گشتاور نیرو همیشه در یک جهت وارد می‌شود.



شکل ۲۹-۲۱ حلقهٔ مستطیل شکلی به درازای a و پهنای b، که حامل جریان i است در میدان مغناطیسی یکنواخت قرار دارد. گشتاور نیروی $\vec{\tau}$ در جهتی اثر می‌کند که بردار عمودی $\vec{n}$ را در جهت میدان مغناطیسی قرار دهد. (الف) وضعیت حلقه هنگامی که در جهت میدان مغناطیسی مشاهده می‌شود. (ب) نمایی از حلقه، که چگونگی تعیین جهت $\vec{n}$ را با استفاده از قاعدهٔ دست راست را نشان می‌دهد؛ بردار $\vec{n}$ بر صفحهٔ حلقه عمود است. (پ) نمای جانبی حلقه از طرف ضلع ۲. حلقه در جهت نشان داده شده می‌چرخد.

می‌توان نشان داد که بزرگی نیروی $\vec{F}_۴$ وارد بر ضلع ۴ برابر با بزرگی نیروی $\vec{F}_۲$، اما در سوی مخالف است.بنابراین، $\vec{F}_۲$ و $\vec{F}_۴$ یکدیگر را کاملاً خنثی می‌کنند. برایند این نیروها صفر است و چون خط اثر مشترک آنها از مرکز حلقه می‌گذرد گشتاور نیروی برایند آنها صفر است.

اما برای ضلع‌های ۱ و ۳ وضعیت متفاوت است. در این حالت، $\vec{L}$ بر $\vec{B}$ عمود است و در نتیجه نیروهای $\vec{F}_۱$ و $\vec{F}_۳$ دارای بزرگی یکسان iaB هستند. چون این نیروها دارای جهت‌های مخالف‌اند، تمایلی به حرکت دادن حلقه به سمت بالا یا پایین ندارند. اما چنان که شکل ۲۹-۲۱ پ نشان می‌دهد، این دو نیرو یک خط اثر ندارند و از این رو یک گشتاور نیروی برایند ایجاد می‌کنند. گشتاور نیرو تمایل دارد حلقه را طوری بچرخاند که بردار عمود $\vec{n}$ را در جهت میدان مغناطیسی $\vec{B}$ قرار دهد. این گشتاور نیرو دارای بازوی گشتاور $(b/۲)\sin\theta$ نسبت به محور مرکزی حلقه است. بزرگی گشتاور نیروی τ'، که از نیروهای $\vec{F}_۱$ و $\vec{F}_۳$ ناشی می‌شود (شکل ۲۹-۲۱ پ را ببینید) برابر است با:

$$\tau' = \left(iaB\frac{b}{۲}\sin\theta\right) + \left(iaB\frac{b}{۲}\sin\theta\right) = iabB\sin\theta \qquad (۲۹\text{-}۳۲)$$

فرض کنید به جای تک حلقهٔ حامل جریان پیچه‌ای با N حلقه، یا N دور، قرار می‌دهیم. علاوه بر این، حلقه‌های سیم آن قدر تنگ هم پیچیده شده‌اند که می‌توان فرض کرد که ابعاد همهٔ آنها تقریباً یکسان و همه در یک صفحه قرار دارند. بنابراین، حلقه‌ها یک **پیچهٔ تخت** تشکیل می‌دهند و گشتاور نیروی τ'، که بزرگی‌اش از معادلهٔ ۲۹-۳۲ به دست می‌آید، به هر یک از حلقه‌ها وارد می‌شود. پس بزرگی گشتاور نیروی کل وارد بر پیچه برابر است با:

$$\tau = N\tau' = NiabB\sin\theta = (NiA)B\sin\theta \qquad (۲۹\text{-}۳۳)$$

که در آن A (مساوی با ab) مساحت محصور شده توسط پیچه است. کمیت‌های درون پرانتز (NiA)، یعنی تعداد حلقه‌ها، مساحت سطح و جریان پیچه، همه با هم، از خواص پیچه هستند. معادلهٔ ۲۹-۳۳ برای تمام پیچه‌های تخت، بدون توجه به شکل آنها، به شرطی صادق است که میدان مغناطیسی یکنواخت باشد.

به جای توجه به حرکت پیچ، ساده‌تر این است که به حرکت بردار $\vec{n}$، که بر صفحهٔ پیچه عمود است، توجه کنیم. معادلهٔ ۲۹-۳۳ نشان می‌دهد که یک پیچهٔ تخت حامل جریان واقع در یک میدان مغناطیسی تمایل دارد طوری بچرخد که بردار $\vec{n}$ با میدان همسو شود.

در یک موتور وقتی $\vec{n}$ شروع به همسو شدن با میدان مغناطیسی می‌کند جهت جریان در پیچه عوض می‌شود و در نتیجه، گشتاور نیرو به چرخاندن پیچه ادامه می‌دهد. این عوض شدن جهت جریان به طور خودکار توسط یک جابه‌جاگر صورت می‌گیرد که از طریق اتصال‌های ثابت در روی سیم‌های تغذیه کنندهٔ جریان، تماس‌های الکتریکی با پیچهٔ در حال چرخش را برقرار می‌کند.

مسألهٔ نمونهٔ ۲۹ـ۷

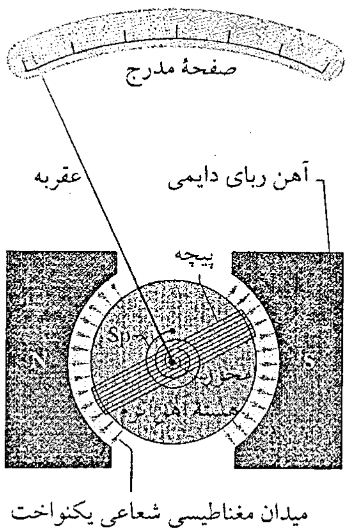
ولت‌سنج‌ها و آمپرسنج‌های مانسته (قیاسی) بر پایهٔ اندازه‌گیری نیروی وارد بر پیچهٔ حامل جریان از سوی میدان مغناطیسی کار می‌کنند. مقدار خوانده شده توسط این وسیله‌ها با منحرف شدن یک عقربه در روی یک صفحهٔ مدرج مشخص می‌شود. شکل ۲۹ـ۲۲، اجزای اصلی یک گالوانومتر را که اساس کار آمپرسنج‌ها و ولت‌سنج‌های مانسته است، نشان می‌دهد. فرض کنید طول پیچه ۱cmر۲ و پهنای آن ۲cmر۱ است. این پیچه ۲۵۰ دور سیم دارد و طوری قرار گرفته است که می‌تواند در میدان مغناطیسی شعاعی یکنواخت $B=$ ۲۳Tر۰ به دور محوری (در درون سوی صفحه شکل) بچرخد. برای هر سمتگیری پیچه، میدان مغناطیسی خالص گذرنده از پیچه بر بردار عمودی پیچه عمود است (و در نتیجه با صفحهٔ پیچه موازی است). فنر Sp یک پادگشتاور نیرو ایجاد می‌کند که با گشتاور نیروی مغناطیسی متوازن می‌شود. در نتیجه، جریان پایای معین i در پیچه یک انحراف زاویه‌ای پایای ϕ به‌وجود می‌آورد. هر چه جریان بیشتر باشد، میزان انحراف عقربه بیشتر، و در نتیجه گشتاور نیروی لازم در فنر نیز بیشتر می‌شود. اگر یک جریان ۱۰۰μA باعث ایجاد انحراف زاویه‌ای ۲۸ درجه بشود، ثابت پیچش فنر κ، با استفاده از معادلهٔ ۲۲ـ۱۶ ($\tau=-\kappa\phi$) چقدر است؟

حل: در اینجا **نکتهٔ کلیدی** این است که با ثابت شدن جریان گذرنده از دستگاه، گشتاور نیروی مغناطیسی حاصل (معادلهٔ ۲۹ـ۳۳) با گشتاور نیروی فنر متوازن می‌شود. بنابراین، بزرگی‌های این گشتاورهای نیرو باهم برابرند:

$$NiAB\sin\theta = \kappa\phi \qquad (۲۹ـ۳۴)$$

در اینجا ϕ انحراف زاویه‌ای پیچه و عقربه، و A (مساوی با ۲m^{۲} ۱۰$^{-۴}$×۵۲ر۲) مساحت سطح احاطه شده توسط پیچه است. چون میدان مغناطیسی خالص گذرنده از پیچه همیشه بر بردار عمودی پیچه عمود است، به ازای هر سمتگیری عقربه، داریم $\theta=$ ۹۰°.

با حل کردن معادلهٔ ۲۹ـ۳۴ نسبت به κ، داریم



شکل ۲۹ـ۲۲ مسألهٔ نمونهٔ ۲۹ـ۷. نمودار اجزای اصلی یک گالوانومتر. این وسیله، متناسب با مدار خارجی، می‌تواند به صورت ولت‌سنج یا آمپرسنج مورد استفاده قرار گیرد.

$$\kappa = \frac{NiAB\sin\theta}{\phi}$$

$$\kappa = (۲۵۰)(۱۰۰\times۱۰^{-۶}A)(۲٫۵۲\times۱۰^{-۴}m^{۲}) \times \frac{(۰٫۲۳T)(\sin ۹۰^{\circ})}{۲۸^{\circ}} \Rightarrow$$

$$\kappa = ۵٫۲\times۱۰^{-۸} N.m/\text{درجه} \qquad \text{(پاسخ)}$$

آمپرسنج‌ها و ولت‌سنج‌های امروزی، اغلب، رقمی هستند، یعنی عدد اندازه‌گیری شده را به طور مستقیم نشان می‌دهند و در آنها از پیچهٔ متحرک استفاده نمی‌شود.

۲۹ـ۹ گشتاور دوقطبی مغناطیسی

پیچهٔ حامل جریان مورد بحث در بخش پیش را می‌توان با تک بردار $\vec{\mu}$ یعنی، **گشتاور دوقطبی مغناطیسی**، توصیف کرد. جهت $\vec{\mu}$ را همان جهت بردار عمودی $\vec{n}$، که مطابق شکل ۲۹ـ۲۱ پ بر صفحهٔ پیچه عمود است، در نظر می‌گیریم. بزرگی $\vec{\mu}$ از معادلهٔ زیر به دست می‌آید

$$\mu = NiA \qquad \text{(گشتاور دوقطبی مغناطیسی)} \qquad (۲۹ـ۳۵) \blacksquare$$

که در آن N تعداد دورهای پیچه، i جریان گذرنده از پیچه، و A مساحت سطح محصور شده توسط هر حلقهٔ پیچه است. (معادلهٔ ۲۹ـ۳۵ نشان می‌دهد که یکای $\vec{\mu}$، آمپر ـ مترمربع با نماد A.m^{۲} است). با استفاده از

تعریف $\vec{\mu}$ معادلهٔ ۲۹-۳۳ مربوط به گشتاور نیروی وارد بر پیچه از سوی میدان مغناطیسی را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\tau = \mu B \sin\theta \qquad (۲۹\text{-}۳۶)$$

که در آن θ زاویهٔ میان بردارهای $\vec{\mu}$ و $\vec{B}$ است.

این رابطه را می‌توان به صورت رابطهٔ برداری زیر تعمیم داد

$$\vec{\tau} = \vec{\mu}\times\vec{B} \qquad (۲۹\text{-}۳۷)$$ ■

که معادله‌ای شبیه معادلهٔ گشتاور نیروی وارد شده به یک **دوقطبی الکتریکی** از سوی **میدان الکتریکی**، یعنی معادلهٔ ۲۳-۳۴، است

$$\vec{\tau} = \vec{p}\times\vec{E}$$

در هر مورد گشتاور نیروی حاصل از میدان ـ مغناطیسی یا الکتریکی ـ برابر با حاصل‌ضرب برداری گشتاور دوقطبی مربوط در بردار میدان است.

یک **دوقطبی مغناطیسی** در میدان مغناطیسی خارجی، دارای **انرژی پتانسیل مغناطیسی** است که به سمتگیری دوقطبی در میدان بستگی دارد. در مورد دوقطبی‌های الکتریکی نشان دادیم (معادلهٔ ۲۳-۳۸) که:

$$U(\theta) = -\vec{p}.\vec{E}$$

براساس مانستگی دقیق، در حالت مغناطیسی هم می‌توان نوشت

$$U(\theta) = -\vec{\mu}.\vec{B} \qquad (۲۹\text{-}۳۸)$$ ■

بنابراین، یک دوقطبی مغناطیسی وقتی پایین‌ترین انرژی (مساوی با $-\mu B\cos ۰ = -\mu B$) را دارد که گشتاور دوقطبی $\vec{\mu}$، با میدان مغناطیسی همسو و وقتی بالاترین انرژی (مساوی با $-\mu B\cos ۱۸۰^\circ = \mu B$) را دارد که $\vec{\mu}$ با میدان ناهمسو باشد (شکل ۲۹-۲۳).

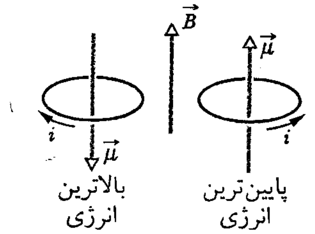
وقتی یک دوقطبی مغناطیسی از سمتگیری آغازی θ_i تا سمتگیری دیگر θ_f می‌چرخد، W، کار انجام شده بر روی دوقطبی توسط میدان مغناطیسی برابر است با:

$$W = -\Delta U = -(U_f - U_i) \qquad (۲۹\text{-}۳۹)$$

که در آن U_f و U_i با استفاده از معادلهٔ ۲۹-۳۸ محاسبه می‌شوند. اگر در حین تغییر سمتگیری دوقطبی، به آن یک گشتاور نیرو (ی ناشی از «یک عامل خارجی») وارد شود، این گشتاور نیرو بر روی دوقطبی کار W_a را انجام می‌دهد. هرگاه پیش و پس از تغییر سمتگیری دوقطبی ساکن باشد، در آن صورت، W_a برابر با کار انجام شده بر روی دوقطبی توسط میدان با علامت منفی، است:

$$W_a = -W = U_f - U_i \qquad (۲۹\text{-}۴۰)$$

تاکنون دوقطبی مغناطیسی را به صورت یک پیچهٔ حامل جریان شناختیم. اما یک آهن‌ربای میله‌ای ساده یا یک کرهٔ چرخان باردار نیز یک دوقطبی مغناطیسی است. خود زمین هم (تقریباً) یک دوقطبی مغناطیسی است. بالاخره، اغلب ذرات زیر اتمی، از جمله الکترون، پروتون و نوترون، دارای گشتاورهای دوقطبی مغناطیسی‌اند. چنانکه در فصل ۳۲ خواهیم دید، تمام این ذرات را می‌توان مانند حلقه‌های جریان در نظر گرفت. برخی مقادیر تقریبی گشتاورهای دوقطبی مغناطیسی به منظور مقایسه در جدول ۲۹-۲ درج شده‌اند.

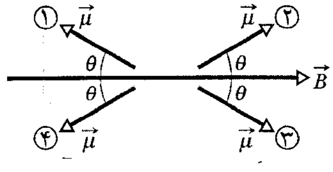


شکل ۲۹-۲۳ نمودار سمتگیری‌های متناظر با بالاترین و پایین‌ترین انرژی یک دوقطبی مغناطیسی (که در اینجا یک پیچهٔ حامل جریان است) در میدان مغناطیسی خارجی $\vec{B}$. جهت جریان i، جهت گشتاور دوقطبی مغناطیسی $\vec{\mu}$ را با استفاده از قاعدهٔ دست راست نشان داده شده برای $\vec{n}$ در شکل ۲۹-۲۱ ب، مشخص می‌کند.

جدول ۲۹-۲ برخی مقادیر گشتاورهای دوقطبی مغناطیسی

آهن‌ربای میله‌ای کوچک	5J/T
زمین	$۸٫۰\times ۱۰^{۲۲}$J/T
پروتون	$۱٫۴\times ۱۰^{-۲۶}$J/T
الکترون	$۹٫۳\times ۱۰^{-۲۴}$J/T

خودآزمایی ۶: شکل زیر، چهار سمتگیری تحت زاویهٔ θ را برای یک گشتاور دوقطبی مغناطیسی $\vec{\mu}$ در یک میدان مغناطیسی نشان می‌دهد. این سمتگیری‌ها را با توجه به (الف) بزرگی گشتاور نیروی وارد بر دوقطبی و (ب) انرژی پتانسیل دوقطبی، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.

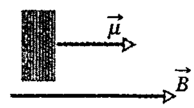


مسألهٔ نمونهٔ ۲۹ـ۸

شکل ۲۹ـ۲۴، یک پیچهٔ دایره‌ای با ۲۵۰ دور سیم، مساحت $A=۲٫۵۲\times۱۰^{-۴}\text{m}^۲$ و جریان $۱۰۰\mu\text{A}$ را نشان می‌دهد. این پیچه در یک میدان مغناطیسی یکنواخت به بزرگی $B=۰٫۸۵\text{T}$ ساکن است و در آغاز گشتاور دوقطبی مغناطیسی آن $\vec{\mu}$، با $\vec{B}$ همسو است.

(الف) در شکل ۲۹ـ۲۴، جهت جریان در پیچه چگونه است؟

حل: در اینجا **نکتهٔ کلیدی** استفاده از قاعدهٔ دست راست در مورد پیچه است: فرض کنید پیچه را با دست راست طوری می‌گیریم که انگشت شست در جهت $\vec{\mu}$ کشیده شده باشد. در این صورت، جهت انگشت‌های پیچیده شده حول پیچه، جهت جریان را در پیچه معین می‌کند.



شکل ۲۹ـ۲۴ مسألهٔ نمونهٔ ۲۹ـ۸. نمای جانبی یک پیچهٔ دایره‌ای حامل جریان. این پیچه طوری قرار گرفته است که گشتاور دوقطبی مغناطیسی آن، $\vec{\mu}$، با میدان مغناطیسی $\vec{B}$ همسو است.

بنابراین، در سیم‌های رویی پیچه ـ که در شکل ۲۹ـ۲۴ دیده می‌شوند ـ جریان از بالا به پایین است.

(ب) گشتاور نیروی اعمال شده توسط یک عامل خارجی چه مقدار کار باید بر روی پیچه انجام دهد تا آن را از سمتگیری آغازی به اندازهٔ ۹۰ درجه بچرخاند، به طوری که $\vec{\mu}$ بر $\vec{B}$ عمود باشد و پیچه باز هم ساکن شود.

حل: در اینجا **نکتهٔ کلیدی** این است که W_a، کار انجام شده توسط گشتاور نیروی اعمال شده باید با تغییر انرژی پتانسیل پیچه بر اثر تغییر سمتگیری آن، برابر باشد. با استفاده از معادلهٔ ۲۹ـ۴۰ $(W_a = U_f - U_i)$، داریم

$$W_a = U(۹۰^\circ) - U(۰)$$

$$W_a = -\mu B\cos ۹۰^\circ - (-\mu B\cos ۰^\circ) = ۰ + \mu B$$

$$W_a = \mu B$$

با جانشانی مقدار μ از معادلهٔ ۲۹ـ۳۵ $(\mu=NiA)$، خواهیم داشت

$$W_a = (NiA)B$$

$$W_a = (۲۵۰)(۱۰۰\times۱۰^{-۶}\text{A})(۲٫۵۲\times۱۰^{-۴}\text{m}^۲)(۰٫۸۵\text{T}) \Rightarrow$$

$$W_a = ۵٫۳۵۶\times۱۰^{-۶}\text{J} \approx ۵٫۴\mu\text{J} \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

مرور و خلاصهٔ مطالب فصل

میدان مغناطیسی $\vec{B}$ میدان مغناطیسی $\vec{B}$ برحسب $\vec{F}_B$، نیروی وارد بر ذرهٔ آزمون با بار q، که با سرعت $\vec{v}$ در میدان حرکت می‌کند، تعریف می‌شود:

$$\vec{F}_B = q\vec{v}\times\vec{B} \qquad (۲۹ـ۲)$$

یکای SI میدان $\vec{B}$ **تسلا** (با نماد T) است: $۱\text{T}=۱\text{N/(A.m)}=۱۰^۴\text{gauss}$

اثر هال هرگاه یک نوار رسانا به ضخامت l را که حامل جریان i است، در میدان مغناطیسی $\vec{B}$ قرار دهیم، برخی حامل‌های بار (با بار e) به سمت کناره‌های رسانا می‌روند و در پهنای نوار اختلاف پتانسیل V به وجود می‌آید. از روی قطبیت ولتاژ در کناره‌ها می‌توان علامت حامل‌های بار را معین کرد؛ چگالی عددی حامل‌های بار n، را از رابطهٔ زیر می‌توان حساب کرد:

$$n = \frac{Bi}{Vle} \qquad (۲۹ـ۱۲)$$

ذره باردار در حال دوران در میدان مغناطیسی مسیر یک ذرهٔ باردار به جرم m و بار الکتریکی به بزرگی q، که با سرعت $\vec{v}$ در راستای عمود بر میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ حرکت می‌کند، به صورت یک دایره است. با استفاده از قانون دوم نیوتون در مورد این حرکت دایره‌ای، داریم

$$qvB = \frac{mv^۲}{r} \qquad (۲۹ـ۱۵)$$

شعاع دایرهٔ حرکت برابر است با:

$$r = \frac{mv}{qB} \qquad (۲۹ـ۱۶)$$

بسامد دوران f، بسامد زاویه‌ای ω، و دورهٔ تناوب حرکت T، از معادله‌های زیر به دست می‌آیند.

$$f = \frac{\omega}{۲\pi} = \frac{۱}{T} = \frac{qB}{۲\pi m} \qquad (۲۹ـ۱۷، ۲۹ـ۱۸، ۲۹ـ۱۹)$$

سیکلوترون و سینکروترون سیکلوترون یک شتابدهندهٔ ذرات است که در آن از میدان مغناطیسی برای چرخاندن یک ذرهٔ باردار در روی یک مدار دایره‌ای با شعاع در حال افزایش، استفاده می‌شود؛ یک پتانسیل شتابدهندهٔ مناسب به طور مکرر به گونه‌ای به ذره اعمال می‌شود که ذره را به انرژی‌های بالا می‌رساند. چون ذرهٔ متحرک در تندی‌های نزدیک به تندی نور از همگامی با نوسانگر باز می‌ماند، در سیکلوترون برای انرژی قابل دستیابی حد بالایی وجود دارد. سینکروترون این مشکل را رفع می‌کند. در سینکروترون، B و بسامد نوسانگر f_{osc}، براساس یک برنامه‌ریزی، به طور چرخه‌ای به گونه‌ای تغییر می‌کنند که ذره نه تنها به انرژی‌های بالا می‌رسد، بلکه این عمل را می‌تواند در شعاع‌های مداری ثابت انجام دهد.

نیروی مغناطیسی وارد بر سیم حامل جریان یک سیم مستقیم حامل جریان در میدان مغناطیسی یکنواخت تحت تأثیر یک نیروی جانبی قرار می‌گیرد:

$$\vec{F}_B = i\,\vec{L}\times\vec{B} \qquad (۲۹ـ۲۶)$$

نیروی جانبی وارد بر عنصر جریان $id\vec{L}$ در یک میدان مغناطیسی برابر است با:

$$d\vec{F}_B = id\vec{L}\times\vec{B} \qquad (۲۹ـ۲۸)$$

بردار طول $\vec{L}$ یا $d\vec{L}$ با جریان i همسو است.

گشتاور نیروی وارد بر پیچهٔ حامل جریان یک پیچه (با مساحت A، جریان i و تعداد دورهای N) در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$، تحت تأثیر گشتاور نیروی $\vec{\tau}$ قرار می‌گیرد:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu}\times\vec{B} \qquad (۲۹\text{-}۳۷)$$

در اینجا $\vec{\mu}$ **گشتاور دوقطبی مغناطیسی** پیچه است که بزرگی‌اش $\mu=NiA$ است و جهتش با قاعدهٔ دست راست مشخص می‌شود.

انرژی سمتگیری دوقطبی مغناطیسی انرژی پتانسیل مغناطیسی یک دوقطبی مغناطیسی در میدان مغناطیسی برابر است با:

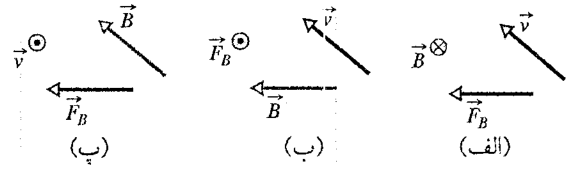
$$U(\theta) = -\vec{\mu}.\vec{B} \qquad (۲۹\text{-}۳۸)$$

اگر یک دوقطبی مغناطیسی از سمتگیری آغازی θ_i تا سمتگیری دیگر θ_f بچرخد، کار انجام شده توسط میدان مغناطیسی W، بر روی دوقطبی برابر است با:

$$W = -\Delta U = -(U_f - U_i) \qquad (۲۹\text{-}۳۹)$$

پرسش‌ها

۱. شکل ۲۹-۲۵، سه حالت را نشان می‌دهد که در آنها یک ذرهٔ مثبت با سرعت $\vec{v}$ در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ حرکت می‌کند و به آن نیروی مغناطیسی $\vec{F}_B$ وارد می‌شود. در هر حالت، مشخص کنید آیا سمتگیری‌های بردارها از نظر فیزیکی قابل قبول‌اند.



شکل ۲۹-۲۵ پرسش ۱.

۲. در چهار حالت زیر، سرعت حرکت یک پروتون $\vec{v}$، در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ داده شده است:

(الف) $\vec{v} = ۲\hat{i} - ۳\hat{j}$ و $\vec{B} = ۴\hat{k}$

(ب) $\vec{v} = ۳\hat{i} + ۲\hat{j}$ و $\vec{B} = -۴\hat{k}$

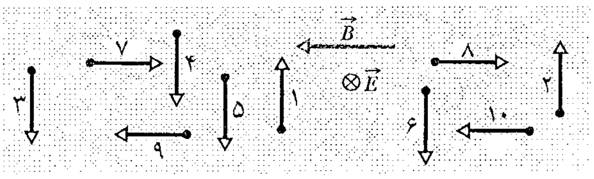
(پ) $\vec{v} = ۳\hat{j} - ۲\hat{k}$ و $\vec{B} = ۴\hat{i}$

(ت) $\vec{v} = ۲۰\hat{i}$ و $\vec{B} = -۴\hat{i}$

بدون انجام دادن محاسبهٔ کتبی، این حالت‌ها را با توجه به بزرگی نیروی مغناطیسی وارد بر پروتون، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.

۳. در بخش ۲۹-۳، در مورد ذرهٔ باردار در حال حرکت در میدان‌های متعامد و تحت تأثیر نیروهای مخالف $\vec{F}_E$ و $\vec{F}_B$ بحث کردیم. در آنجا متوجه شدیم که اگر تندی ذره از معادلهٔ ۲۹-۷ ($v=E/B$) به دست آید، ذره به خط راست حرکت می‌کند (یعنی هیچ یک از نیروها تأثیر غالبی بر روی حرکت ندارند). اگر تندی ذره، (الف) $v<E/B$ و (ب) $v>E/B$ باشد، کدام یک از این نیروها غالب است؟

۴. شکل ۲۹-۲۶، نمودار میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی یکنواخت و متعامد $\vec{E}$ و $\vec{B}$ و جدول ۲۹-۳ در لحظهٔ معینی بردارهای سرعت ۱۰ ذرهٔ باردار را نشان می‌دهد. (بردارها با مقیاس رسم نشده‌اند). این جدول علامت بارها و تندی ذره‌ها را به دست می‌دهد؛ تندی‌ها به صورت کوچکتر یا بزرگتر از E/B مشخص شده‌اند (پرسش ۳ را ببینید). پس از لحظهٔ نشان داده شده در شکل ۲۹-۲۶، کدام ذره در برون سوی صفحهٔ شکل و به سمت شما، حرکت می‌کند؟

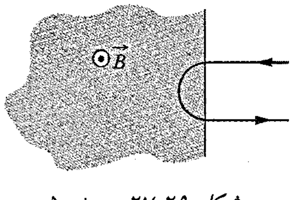


شکل ۲۹-۲۶ پرسش ۴.

جدول ۲۹-۳ پرسش ۴.

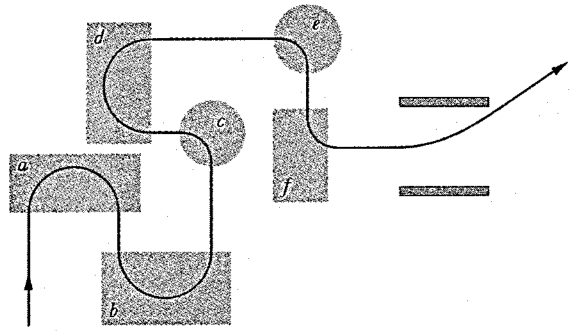
ذره	علامت بار	تندی	ذره	علامت بار	تندی
۱	+	کوچکتر	۶	−	بزرگتر
۲	+	بزرگتر	۷	+	کوچکتر
۳	+	کوچکتر	۸	+	بزرگتر
۴	+	بزرگتر	۹	−	کوچکتر
۵	−	کوچکتر	۱۰	−	بزرگتر

۵. در شکل ۲۹-۲۷، ذرهٔ بارداری با تندی v_0 به ناحیه‌ای شامل میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ وارد و پس از پیمودن یک مسیر نیمدایره‌ای در مدت زمان T_0 از ناحیهٔ میدان خارج می‌شود. (الف) آیا بار الکتریکی ذره مثبت است یا منفی؟ (ب) آیا تندی پایانی ذره نسبت به v_0 بیشتر است، کمتر است یا مساوی است؟ (پ) اگر تندی آغازی $0.5v_0$ می‌بود، آیا مدت زمان سپری شده در میدان $\vec{B}$ نسبت به T_0 بیشتر می‌شد، کمتر می‌شد یا مساوی می‌شد؟ (ت) در این صورت، آیا مسیر پیموده شده یک نیمدایره می‌شد، یا کمتر یا بیشتر از یک نیمدایره می‌شد؟



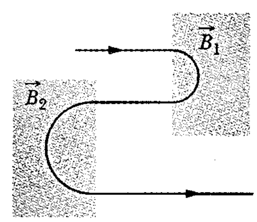
شکل ۲۹-۲۷ پرسش ۵.

۶. شکل ۲۹ـ۲۸، مسیر یک ذره را در شش ناحیهٔ شامل میدان مغناطیسی یکنواخت نشان می‌دهد که به صورت نیمدایره یا ربع دایره است. این ذره هنگام خارج شدن از آخرین ناحیه، به میان دو صفحهٔ موازی باردار می‌رسد و به طرف صفحهٔ با پتانسیل بالاتر منحرف می‌شود. جهت میدان‌های مغناطیسی در این شش ناحیه چگونه است؟



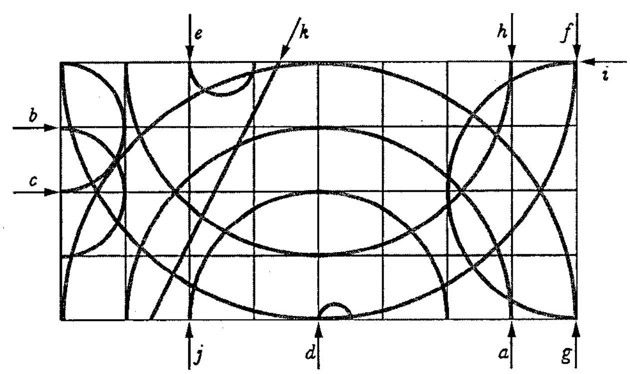
شکل ۲۹ـ۲۸ پرسش ۶.

۷. شکل ۲۹ـ۲۹، مسیر حرکت یک الکترون را هنگام عبور از دو ناحیهٔ شامل میدان‌های مغناطیسی یکنواخت با بزرگی‌های B_1 و B_2 نشان می‌دهد. مسیر الکترون در هر دو ناحیه به شکل نیمدایره است. (الف) کدام میدان شدیدتر است؟ (ب) جهت دو میدان چگونه است؟ (پ) آیا مدت زمان سپری شده توسط الکترون در ناحیهٔ $\vec{B}_1$ نسبت به ناحیهٔ $\vec{B}_2$ بیشتر است، کمتر است یا مساوی است؟



شکل ۲۹ـ۲۹ پرسش ۷.

۸. حرکت دور زدنی ذره. شکل ۲۹ـ۳۰، یازده مسیر را در یک ناحیهٔ شامل میدان مغناطیسی یکنواخت نشان می‌دهد. یکی از مسیرها خط راست و بقیهٔ مسیرها به شکل نیمدایره‌اند. جدول ۲۹ـ۴ جرم‌ها، بارهای الکتریکی و تندی‌های یازده ذره، که این مسیرها را در جهت‌های نشان داده شده، در این میدان پیموده‌اند، به دست می‌دهد. کدام مسیر ارائه شده در شکل متناظر با کدام ذرهٔ معرفی شده در جدول است؟

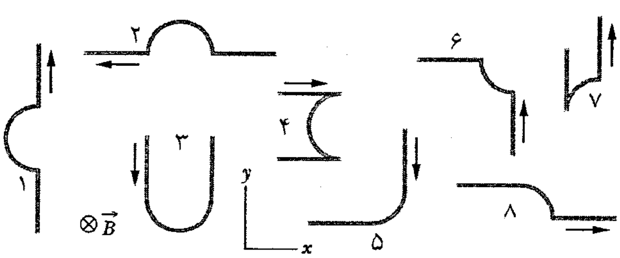


شکل ۲۹ـ۳۰ پرسش ۸.

جدول ۲۹ـ۴ پرسش ۸.

ذره	جرم	بار الکتریکی	تندی
۱	$۲m$	q	v
۲	m	$۲q$	v
۳	$m/۲$	q	$۲v$
۴	$۳m$	$۳q$	$۳v$
۵	$۲m$	q	$۲v$
۶	m	$-q$	$۲v$
۷	m	$-۴q$	v
۸	m	$-q$	v
۹	$۲m$	$-۲q$	$۸v$
۱۰	m	$-۲q$	$۸v$
۱۱	$۳m$	۰	$۳v$

۹. شکل ۲۹ـ۳۱، هشت سیم حامل جریان‌های یکسان را، که در میدان مغناطیسی یکنواخت یکسان (در درون سوی صفحهٔ شکل) واقع شده‌اند، در هشت آزمایش جداگانه نشان می‌دهد. هر سیم شامل دو بخش مستقیم (هر یک به طول L و موازی با محورهای x و y یا عمود بر آنها) و یک‌بخش خمیده (به شعاع خمیدگی R) است. جهت جریان‌های گذرنده از سیم‌ها با پیکان‌های واقع در کنار آنها نشان داده شده است. (الف) جهت نیروی مغناطیسی برایند وارد بر هر سیم را برحسب زاویه‌ای که نسبت به محور x مثبت در جهت پادساعتگرد سنجیده می‌شود، مشخص کنید. (ب) سیم‌های ۱ تا ۴ را با توجه به بزرگی نیروی مغناطیسی برایند وارد بر آنها، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید. (پ) همین کار را برای مرتب کردن سیم‌های ۵ تا ۸ انجام دهید.



شکل ۲۹ـ۳۱ پرسش ۹.

۱۰. (الف) در خودآزمایی ۶، اگر گشتاور دوقطبی مغناطیسی $\vec{\mu}$ از سمتگیری ۱ تا سمتگیری ۲ بچرخد، آیا کار انجام شده روی دوقطبی توسط میدان مغناطیسی، مثبت است، منفی است، یا صفر است؟ (ب) کار انجام شده روی دوقطبی توسط میدان مغناطیسی را برای چرخش دوقطبی از سمتگیری ۱ تا (۱) سمتگیری ۲، (۲) سمتگیری ۳، و (۳) سمتگیری ۴، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.

تمرین‌ها و مسأله‌ها

بخش ۲۹ـ۲ تعریف $\vec{B}$

۱ ت. یک ذرهٔ آلفا با سرعت $\vec{v}$ به بزرگی $550\,\mathrm{m/s}$ در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ به بزرگی $0.045\,\mathrm{T}$ حرکت می‌کند. (ذرهٔ آلفا دارای بار $+3.2\times10^{-19}\,\mathrm{C}$ و جرم $6.6\times10^{-27}\,\mathrm{kg}$ است). زاویهٔ میان $\vec{v}$ و $\vec{B}$، ۵۲ درجه است. بزرگی (الف) نیروی $\vec{F}_B$ وارد بر ذره از سوی میدان، و (ب) شتاب ذره تحت اثر $\vec{F}_B$ چقدر است؟ (پ) آیا تندی ذره افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد یا مساوی با $550\,\mathrm{m/s}$ باقی می‌ماند.

۲ ت. الکترونی در یک لامپ دوربین تلویزیونی با تندی $7.20\times10^{6}\,\mathrm{m/s}$ در میدان مغناطیسی $83.0\,\mathrm{mT}$ حرکت می‌کند. (الف) بدون دانستن جهت میدان مغناطیسی دربارهٔ بیشترین و کمترین مقدار نیروی وارد بر الکترون در این میدان چه می‌توانید بگویید؟ (ب) در نقطه‌ای از میدان بزرگی شتاب الکترون $4.90\times10^{14}\,\mathrm{m/s^2}$ است. زاویهٔ میان بردار سرعت الکترون و میدان مغناطیسی چندر است؟

۳ ت. پروتونی تحت زاویهٔ 23.0 درجه نسبت به یک میدان مغناطیسی به بزرگی $2.60\,\mathrm{mT}$ حرکت می‌کند و نیروی مغناطیسی $6.50\times10^{-17}\,\mathrm{N}$ به آن وارد می‌شود. مطلوب است محاسبهٔ، (الف) تندی پروتون، و (ب) انرژی جنبشی پروتون برحسب الکترون ـ ولت.

۴ م. بردار سرعت الکترونی به صورت زیر است

$$\vec{v} = (2.0\times10^{6}\,\mathrm{m/s})\hat{i}+(3.0\times10^{6}\,\mathrm{m/s})\hat{j}$$

این الکترون وارد میدان مغناطیسی $\vec{B}=(0.030\,\mathrm{T})\hat{i}-(0.15\,\mathrm{T})\hat{j}$ می‌شود. (الف) نیروی وارد بر الکترون را پیدا کنید. (ب) این محاسبه را دربارهٔ پروتونی با همان سرعت تکرار کنید.

۵ م. انرژی جنبشی هر الکترون در باریکهٔ الکترونی یک لامپ تلویزیونی $12.0\,\mathrm{keV}$ است. سمتگیری لامپ طوری است که الکترون‌ها به طور افقی ـ از جنوب مغناطیسی به سمت شمال مغناطیسی زمین حرکت می‌کنند. مؤلفهٔ قائم میدان مغناطیسی زمین به سمت پایین و دارای بزرگی $55.0\,\mu\mathrm{T}$ است. (الف) باریکهٔ الکترونی در چه جهتی منحرف می‌شود؟ (ب) شتاب یک تک الکترون تحت اثر میدان چیست؟ (پ) این باریکه در حین پیمودن مسافت $20.0\,\mathrm{cm}$ در درون لامپ تلویزیونی چه مقدار منحرف می‌شود؟

بخش ۲۹ـ۳ میدان‌های متعامد: کشف الکترون

۶ ت. پروتونی در میدان‌های مغناطیسی و الکتریکی یکنواخت حرکت می‌کند میدان مغناطیسی $\vec{B}=-2.5\hat{i}\,\mathrm{mT}$ و سرعت پروتون در یک لحظه $\vec{v}=2000\hat{j}\,\mathrm{m/s}$ است. در این لحظه بزرگی نیروی برایند وارد بر پروتون، در صورتی که میدان الکتریکی، (الف) $4.0\hat{k}\,\mathrm{kV/m}$، (ب) $-4.0\hat{k}\,\mathrm{kV/m}$، و (پ) $4.0\hat{i}\,\mathrm{V/m}$ باشد، چقدر است؟

۷ ت. الکترونی با انرژی جنبشی $2.5\,\mathrm{keV}$ در ناحیه‌ای از فضا به طور افقی حرکت می‌کند. در این ناحیه یک میدان الکتریکی رو به پایین به بزرگی $10\,\mathrm{kV/m}$ برقرار است. (الف) بزرگی و جهت کمترین میدان مغناطیسی یکنواختی که سبب می‌شود الکترون به حرکت افقی خود ادامه دهد، چیست؟ نیروی گرانشی را، که نسبتاً کم است، نادیده بگیرید. (ب) آیا ممکن است پروتون از این ترکیب میدان‌ها بدون انحراف عبور کند؟ اگر ممکن است، تحت چه شرایطی؟

۸ ت. الکترون متحرکی تحت اثر میدان الکتریکی $1.50\,\mathrm{kV/m}$ و میدان مغناطیسی $0.400\,\mathrm{T}$ قرار می‌گیرد و هیچ نیروی برایندی به آن وارد نمی‌شود. (الف) تندی کمینهٔ الکترون v، را حساب کنید. (ب) بردارهای $\vec{E}$، $\vec{B}$ و $\vec{v}$ را رسم کنید.

۹ م. الکترونی در اثر اختلاف پتانسیل $1.0\,\mathrm{kV}$ شتاب می‌گیرد و به ناحیه‌ای واقع در میان دو صفحهٔ موازی به فاصلهٔ جدایی $20\,\mathrm{mm}$ و دارای اختلاف پتانسیل $100\,\mathrm{V}$، وارد می‌شود. الکترون در حال حرکت به طور عمود بر راستای میدان الکتریکی به‌ناحیهٔ میان صفحه‌ها می‌رسد. میدان مغناطیسی یکنواخت به‌کار رفته به‌طور عمود بر مسیر الکترون و میدان الکتریکی، هر دو، چقدر باید باشند تا الکترون بدون انحراف و به‌خط راست حرکت کند؟

۱۰ م. الکترونی دارای سرعت آغازی $(12.0\hat{j} + 15.0\hat{k})\,\mathrm{km/s}$ و شتاب ثابت $(2.00\times10^{12}\,\mathrm{m/s^2})\hat{i}$ در ناحیه‌ای است، که در آن میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی یکنواخت وجود دارند. به ازای $\vec{B}=(400\,\mu\mathrm{T})\hat{i}$، میدان الکتریکی $\vec{E}$ را پیدا کنید.

۱۱ م. یک چشمهٔ یونی، یون‌های $^{6}\mathrm{Li}$ (جرم$=6.0\,\mathrm{u}$) تولید می‌کند و هر یون حامل بار $+e$ است. این یون‌ها تحت اثر اختلاف پتانسیل $10\,\mathrm{kV}$ شتاب می‌گیرند و به طور افقی از ناحیه‌ای که در آن میدان مغناطیسی قائم $B=1.2\,\mathrm{T}$ وجود دارد، می‌گذرند. کمترین مقدار میدان الکتریکی لازم که باید در این ناحیه برقرار شود تا یون‌های $^{6}\mathrm{Li}$ بدون انحراف از آنجا بگذرند، چقدر است؟

بخش ۲۹ـ۴ میدان‌های متعامد: اثر هال

۱۲ ت. یک نوار مسی به پهنای $150\,\mu\mathrm{m}$ در یک میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ به بزرگی $0.65\,\mathrm{T}$ و عمود بر نوار قرار دارد. از این نوار جریان

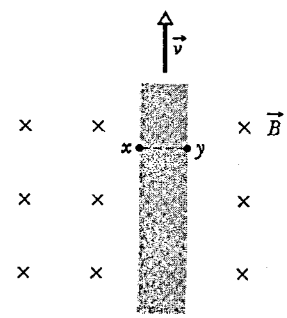
$i=$۲۳A طوری می‌گذرد که در بین کناره‌های آن اختلاف پتانسیل هال V، ظاهر می‌شود. V را حساب کنید. (تعداد حامل‌های بار در یکای حجم مس m^3/ الکترون $۸٫۴۷\times۱۰^{۲۸}$ است).

۱۳ م. (الف) در شکل ۲۹ـ۸، نشان دهید که نسبت میدان الکتریکی هال E به میدان الکتریکی E_C عامل حرکت دهندهٔ بارهای الکتریکی (جریان) در طول نوار برابر است با:

$$\frac{E}{E_C}=\frac{B}{ne\rho}$$

که در آن ρ مقاومت ویژهٔ ماده و n چگالی عددی حامل‌های بار است. (ب) مقدار عددی این نسبت را برای شرایط تمرین ۱۲ به دست آورید (جدول ۱ـ۲۷ را ببینید).

۱۴ م. یک نوار فلزی به طول ۶٫۵۰cm، پهنای ۰٫۸۵۰cm و ضخامت ۰٫۷۶۰mm با سرعت ثابت $\vec{v}$ در میدان مغناطیسی $B=$۱٫۲۰mT، که مطابق شکل ۲۹ـ۳۲، عمود بر نوار است حرکت می‌کند. اختلاف پتانسیل اندازه‌گیری شده بین نقطه‌های x و y در دو طرف نوار، ۳٫۹۰μV است. تندی v را حساب کنید.



شکل ۲۹ـ۳۲ مسألهٔ ۱۴.

بخش ۲۹ـ۵ ذرهٔ باردار در حال دوران

۱۵ ت. میدان مغناطیسی یکنواخت اعمال شده به طور عمود بر باریکه‌ای از الکترون‌های در حال حرکت با تندی $۱٫۳\times۱۰^{۶}$m/s چقدر باید باشد تا الکترون‌ها یک مسیر دایره‌ای به شعاع ۰٫۳۵m بپیمایند؟

۱۶ ت. الکترونی در اثر اختلاف پتانسیل ۳۵۰V از حال سکون شتاب پیدا می‌کند. سپس، این الکترون با سرعتی عمود بر میدان مغناطیسی یکنواخت با بزرگی ۲۰۰mT وارد میدان می‌شود. مطلوب است محاسبهٔ (الف) تندی الکترون، و (ب) شعاع الکترون در میدان مغناطیسی.

۱۷ ت. الکترونی با انرژی جنبشی ۱٫۲۰keV در صفحه‌ای عمود بر یک میدان مغناطیسی یکنواخت می‌چرخد. شعاع مدار حرکت ۲۵٫۰cm است. مطلوب است تعیین (الف) تندی الکترون، (ب) میدان مغناطیسی، (پ) بسامد دوران، و (ت) دورهٔ تناوب حرکت.

۱۸ ت. گوداشمیت[1] فیزیکدان، روشی پیشنهاد کرده است که با آن می‌توان جرم یون‌های سنگین را بر پایهٔ سنجش دورهٔ تناوب دوران یون‌ها در یک میدان مغناطیسی معلوم، اندازه‌گیری کرد. یون یک بار یونیدهٔ ید در میدان مغناطیسی ۴۵٫۰mT در مدت ۱٫۲۹ms، به اندازهٔ ۷٫۰۰ دور می‌چرخد. جرم این یون را برحسب یکای جرم اتمی یکی شده حساب کنید. (در واقع، با این روش می‌توان اندازه‌گیری‌های جرم را با دقتی خیلی بیشتر از این داده‌های تقریبی انجام داد).

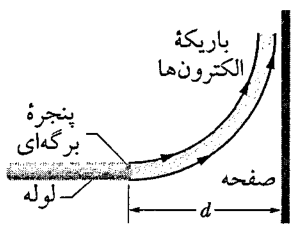
۱۹ ت. (الف) بسامد دوران یک الکترون با انرژی ۱۰۰eV را در میدان مغناطیسی یکنواخت ۳۵٫۰μT پیدا کنید. (ب) الکترون با سرعتی عمود بر میدان مغناطیسی حرکت می‌کند، شعاع مسیر آن را حساب کنید.

۲۰ ت. یک ذرهٔ آلفا ($q=+۲e$ ، $m=$۴٫۰۰u) در میدان مغناطیسی یکنواخت $B=$۱٫۲۰T در مسیری دایره‌ای به شعاع ۴٫۵۰cm حرکت می‌کند. مطلوب است محاسبهٔ (الف) تندی ذره، (ب) دورهٔ تناوب حرکت، (پ) انرژی جنبشی ذره برحسب الکترون ـ ولت، و (ت) اختلاف پتانسیلی که باید برای شتاب دادن به ذره اعمال شود تا آن را به این انرژی برساند.

۲۱ ت. باریکه‌ای از الکترون با انرژی جنبشی K از یک «پنجرهٔ» برگه‌ای نازک واقع در انتهای یک لولهٔ شتابدهنده خارج می‌شود. صفحه‌ای فلزی به فاصلهٔ d از این پنجره قرار دارد و بر راستای باریکهٔ خروجی عمود است (شکل ۲۹ـ۳۳). نشان دهید که با اعمال میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ به بزرگی:

$$B\geq\sqrt{\frac{۲mK}{e^{۲}d^{۲}}}$$

می‌توان از برخورد باریکهٔ الکترونی به صفحهٔ فلزی جلوگیری کرد. در این معادله m جرم و e بار الکترون است. سمتگیری میدان $\vec{B}$ چگونه است؟



شکل ۲۹ـ۳۳ تمرین ۲۱.

۲۲ م. یک چشمه، الکترونی با تندی $v=۱٫۵\times۱۰^{۷}$m/s را به ناحیهٔ شامل میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی $B=۱٫۰\times۱۰^{-۳}$T پرتاب می‌کند. بردار سرعت الکترون با میدان مغناطیسی زاویهٔ $\theta=۱۰^\circ$ تشکیل می‌دهد. فاصلهٔ d نقطه‌ای را که در آن الکترون بار دیگر خط میدان گذرنده از نقطهٔ پرتاب را قطع می‌کند، تا نقطهٔ پرتاب پیدا کنید.

۲۳ م. در یک آزمایش هسته‌ای، پروتونی با انرژی جنبشی ۱٫۰MeV در یک میدان مغناطیسی یکنواخت در مسیری دایره‌ای حرکت می‌کند. (الف) یک ذرهٔ آلفا ($q=+۲e$ ، $m=$۴٫۰u)، و (ب) یک دوترون ($q=+e$ ، $m=$۲٫۰u) چه مقدار انرژی باید داشته باشند تا بر روی یک مسیر دایره‌ای یکسان بچرخند؟

1. S.A.Goudsmit

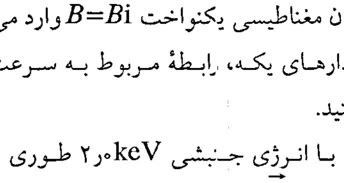
۲۴ م. یک پروتون، یک دوترون ($q=+e$ ، $m=$ ۲٫۰u) و یک ذرهٔ آلفا ($q=+2e$ ، $m=$ ۴٫۰u) با انرژی جنبشی یکسان به ناحیه‌ای شامل میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ وارد می‌شوند و به طور عمود بر میدان حرکت می‌کنند. شعاع مسیرهای دایره‌ای این ذرات را با هم مقایسه کنید.

۲۵ م. یک طیف‌سنج جرم تجارتی (مسألهٔ نمونهٔ ۲۹ـ۳ را ببینید) برای جدا کردن یون‌های اورانیوم با جرم 3.92×10^{-25}kg و بار الکتریکی 3.20×10^{-19}C از نمونه‌های مربوط به کار می‌رود. این یون‌ها در اثر اختلاف پتانسیل ۱۰۰kV شتاب پیدا می‌کنند و سپس با گذشتن از یک میدان مغناطیسی یکنواخت در مسیری دایره‌ای به شعاع ۱٫۰۰m خم می‌شوند. یون‌ها پس از انحراف به اندازهٔ ۱۸۰ درجه از شکافی به پهنای ۱٫۰۰mm و ارتفاع ۱٫۰۰cm عبور می‌کنند و در ظرفی جمع می‌شوند. (الف) بزرگی میدان مغناطیسی (عمودی) این جداکننده چقدر است؟ اگر این دستگاه برای جدا کردن ۱۰۰mg مادهٔ خالص در هر ساعت طراحی شده باشد، مطلوب است محاسبهٔ (ب) جریان یون‌های مورد نظر در دستگاه، و (پ) انرژی گرمایی تلف شده در ظرف در مدت یک ساعت.

۲۶ م. پروتونی با بار $+e$ و جرم m با سرعت آغازی $\vec{v}=v_{0x}\hat{i}+v_{0y}\hat{j}$ به ناحیهٔ شامل میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}=B\hat{i}$ وارد می‌شود. با استفاده از نمادگذاری بردارهای یکه، رابطهٔ مربوط به سرعت پروتون $\vec{v}$، را برحسب t پیدا کنید.

۲۷ م. پوزیترونی با انرژی جنبشی ۲٫۰keV طوری به درون میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ به بزرگی ۰٫۱۰T پرتاب می‌شود که بردار سرعتش با $\vec{B}$ زاویهٔ ۸۹ درجه می‌سازد. مطلوب است تعیین (الف) دورهٔ تناوب، (ب) گام p، و (پ) شعاع مسیر مارپیچ ذره r.

۲۸ م. در شکل ۲۹ـ۳۴، یک ذرهٔ باردار به ناحیه‌ای شامل میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ وارد و پس از پیمودن یک مسیر نیمدایره‌ای از آن ناحیه خارج می‌شود. این ذره پروتون یا الکترون است (باید انتخاب کنید کدام است). این ذره به مدت ۱۳۰ns در ناحیهٔ شامل میدان حضور دارد. (الف) بزرگی $\vec{B}$ چقدر است؟ (ب) اگر ذره دوباره با انرژی‌ای ۲٫۰۰ برابر انرژی جنبشی قبلی (در راستای همان مسیر اولی) به ناحیهٔ شامل میدان برگردد، چه مدت در میدان خواهد بود؟



شکل ۲۹ـ۳۴ مسألهٔ ۲۸.

۲۹ م. یک ذرهٔ خنثی در حال سکون در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ قرار دارد. در لحظهٔ $t=0$، این ذره به دو ذرهٔ باردار، هر کدام به جرم m، واپاشیده می‌شود. (الف) اگر بار یکی از ذرات $+q$ باشد، بار ذرهٔ دیگر چیست؟ (ب) این دو ذره در مسیرهای جداگانه‌ای که در صفحهٔ عمود بر $\vec{B}$ قرار دارند، حرکت می‌کنند و لحظه‌ای بعد با هم برخورد می‌کنند. مدت زمان میان واپاشی ذرات تا برخورد آنها را برحسب m، B و q بیان کنید.

بخش ۲۹ـ۶ سیکلوترون و سینکروترون

۳۰ ت. در سیکلوترونی یک پروتون روی دایره‌ای به شعاع ۰٫۵۰m حرکت می‌کند. بزرگی میدان مغناطیسی ۱٫۲T است. (الف) بسامد نوسانگر سیکلوترون، و (ب) انرژی جنبشی پروتون برحسب الکترون ـ ولت، چقدر است؟

۳۱ م. طول کل مسیر پیموده شده توسط یک دوترون در سیکلوترون مسألهٔ نمونهٔ ۲۹ـ۵ را در حین فرایند شتاب‌دار شدن (کامل) براورد کنید. پتانسیل شتابدهندهٔ میان دی‌ها را ۸۰kV در نظر بگیرید.

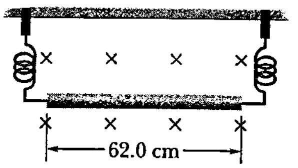
۳۲ م. بسامد نوسانگر سیکلوترون مسألهٔ نمونهٔ ۲۹ـ۵ برای شتاب دادن به دوترون‌ها ($q=+e$ ، $m=$ ۲٫۰u) تنظیم شده است. (الف) اگر به سیکلوترون به جای دوترون‌ها، پروتون‌ها تزریق شوند، با استفاده از همان بسامد نوسانگر پروتون‌ها را به چه انرژی جنبشی‌ای می‌توان رساند؟ (ب) میدان مغناطیسی لازم چیست؟ (پ) اگر میدان مغناطیسی همان مقدار به‌کار رفته برای دوترون‌ها باشد، پروتون‌ها با چه انرژی جنبشی‌ای تولید می‌شوند؟ (ت) در این صورت، بسامد نوسانگر چقدر باید باشد؟ (ث) به همین پرسش‌ها در مورد ذرات آلفا ($q=+2e$ ، $m=$ ۴٫۰u) پاسخ دهید.

بخش ۲۹ـ۷ نیروی مغناطیسی وارد بر سیم حامل جریان

۳۳ ت. در یک رسانای افقی که بخشی از یک خط انتقال برق است، جریان ۵۰۰۰A در جهت جنوب به شمال برقرار است. میدان مغناطیسی زمین (به بزرگی ۶۰٫۰μT) به سوی شمال است و نسبت به افق به سمت پایین زاویهٔ میل ۷۰ درجه تشکیل می‌دهد. بزرگی و جهت نیروی مغناطیسی وارد بر ۱۰۰m از رسانا از سوی میدان مغناطیسی زمین را پیدا کنید.

۳۴ ت. سیمی به طول ۱٫۸۰m حامل جریان ۱۳٫۰ است و با میدان مغناطیسی یکنواخت $B=$ ۱٫۵۰ T زاویهٔ ۳۵٫۰ درجه می‌سازد. نیروی مغناطیسی وارد بر سیم را حساب کنید.

۳۵ ت. سیمی به طول ۶۲٫۰cm و جرم ۱۳٫۰g توسط یک جفت سیم رابط انعطاف‌پذیر در میدان مغناطیسی یکنواخت با بزرگی ۰٫۴۴۰ T آویزان است (شکل ۲۹ـ۳۵). بزرگی و جهت جریان لازم برای خنثی کردن نیروی کشش در سیم‌های نگهدارنده چیست؟



شکل ۲۹ـ۳۵ تمرین ۳۵.

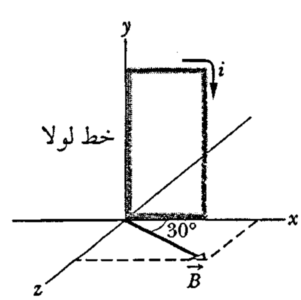
۳۶ م. سیمی به طول ۵۰cm در راستای محور x قرار دارد و از آن در جهت محور x مثبت جریان ۰ر۵۰A می‌گذرد. این سیم در میدان مغناطیسی $\vec{B}=(0.0030\,\text{T})\hat{j}+(0.010\,\text{T})\hat{k}$ واقع است. نیروی مغناطیسی وارد بر سیم را پیدا کنید.

۳۷ م. یک میلهٔ مسی به جرم ۱ر۰kg روی دو ریل افقی به فاصلهٔ ۱ر۰m از هم قرار دارد و حامل جریان ۵۰ آمپری از یک ریل تا ریل دیگر است. ضریب اصطکاک ایستایی میان میله و ریل‌ها ۰ر۶۰ است. کمترین میدان مغناطیسی لازم (که می‌تواند قائم هم نباشد) چه باید باشد تا باعث لغزیدن میله شود؟

۳۸ م. امکان طراحی جدیدی را برای ساختن یک قطار الکتریکی در نظر بگیرید. موتور قطار با نیروی حاصل از مؤلفهٔ قائم میدان مغناطیسی زمین، که به محور رسانای چرخ‌ها وارد می‌شود، کار می‌کند. برای تولید نیرو، جریان از طریق یکی از ریل‌ها به چرخ رسانا وارد می‌شود و پس از عبور از محور و چرخ دیگر رسانا، از طریق ریل دیگر به مولد برمی‌گردد. (الف) برای تولید نیروی مناسب ۱۰kN چه جریانی لازم است؟ مؤلفهٔ قائم میدان مغناطیسی زمین را ۱۰μT و طول محور را ۳ر۰m در نظر بگیرید. (ب) به ازای هر اهم از مقاومت ریل‌ها انرژی الکتریکی با چه آهنگی مصرف می‌شود؟ (پ) آیا چنین قطاری به طور کامل، یا تا حدی، غیرواقعی است؟

بخش ۲۹ـ۸ گشتاور نیروی وارد بر حلقهٔ جریان

۳۹ ت. شکل ۲۹ـ۳۶، یک پیچهٔ ۲۰ دوری مستطیل شکل به ضلع‌های ۱۰cm و ۵ر۰cm را نشان می‌دهد. این پیچه حامل یک جریان ۰ر۱۰A است و در امتداد یکی از ضلع‌ها به لولا متصل است. پیچه در صفحهٔ xy، که با میدان مغناطیسی یکنواخت ۰ر۵۰T زاویهٔ ۳۰ درجه می‌سازد، قرار دارد. بزرگی و جهت گشتاور نیروی وارد بر پیچه را نسبت به خط لولا پیدا کنید.



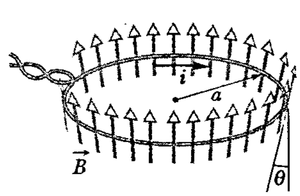
شکل ۲۹ـ۳۶ تمرین ۳۹.

۴۰ ت. یک حلقهٔ جریان تک دور به شکل مثلث راستگوشه با ضلع‌های ۵۰ر۰، ۱۲۰ و ۱۳۰ سانتی‌متر حامل یک جریان ۴ر۰۰ آمپری است. این حلقه در میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی ۷۵ر۰mT قرار دارد. میدان مغناطیسی با جریان گذرنده از ضلع ۱۳۰ سانتی‌متری حلقه موازی و همسو است. (الف) بزرگی نیروی مغناطیسی وارد بر هر یک از سه ضلع حلقه را پیدا کنید. (ب) نشان دهید که نیروی مغناطیسی کل وارد بر حلقه صفر است.

۴۱ ت. سیمی به طول L حامل جریان i است. نشان دهید که اگر سیم به شکل یک پیچهٔ دایره‌ای درآید، بیشینهٔ گشتاور نیروی وارد بر آن در یک میدان مغناطیسی معین وقتی حاصل می‌شود که پیچه فقط دارای یک دور باشد و بزرگی این مقدار بیشینه از رابطهٔ $\tau=L^2iB/4\pi$ به دست می‌آید.

۴۲ م. ثابت کنید که رابطهٔ $\tau=NiAB\sin\theta$ نه تنها در مورد حلقه‌های مستطیل شکل، نظیر شکل ۲۹ـ۲۱، بلکه در مورد هر حلقهٔ بسته‌ای با شکل اختیاری صادق است. (راهنمایی: حلقهٔ با شکل اختیاری را با مجموعه‌ای از حلقه‌های دراز و باریک مجاور و تقریباً مستطیل شکل هم‌ارز، با حلقهٔ با شکل اختیاری، تا جایی که توزیع جریان وجود دارد، جایگزین کنید).

۴۳ م. شکل ۲۹ـ۳۷، یک حلقهٔ سیم به شعاع a را نشان می‌دهد که بر راستای کلی یک میدان مغناطیسی واگرا و با تقارن شعاعی عمود است. میدان مغناطیسی در همه جای حلقه یکسان و دارای بزرگی B است و راستایش در همه جای حلقه با خط عمود بر صفحهٔ حلقه زاویهٔ θ می‌سازد. سیم‌های رابط با شکل پیچیده اثری در مسأله ندارند. اگر حلقه حامل جریان i باشد، بزرگی و جهت نیروی وارد بر حلقه از سوی میدان را پیدا کنید.



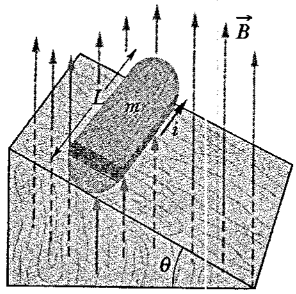
شکل ۲۹ـ۳۷ مسألهٔ ۴۳.

۴۴ م. حلقهٔ سیمی مسدودی که حامل جریان i است، در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ قرار دارد و صفحهٔ حلقه با میدان $\vec{B}$ زاویهٔ θ می‌سازد. نشان دهید که نیروی مغناطیسی کل وارد بر حلقه صفر است. آیا این نتیجه در مورد میدان مغناطیسی نایکنواخت نیز صادق است؟

۴۵ م. پیچهٔ یک گالوانومتر (مسألهٔ نمونهٔ ۲۹ـ۷ را ببینید) دارای مقاومت ۷۵ر۳Ω است؛ عقربهٔ این گالوانومتر وقتی به طور کامل منحرف می‌شود که از پیچه جریان ۱ر۶۲mA بگذرد. (الف) مطلوب است مقدار مقاومت کمکی لازم برای تبدیل کردن گالوانومتر به یک ولت‌سنج که در انحراف کامل عقربه ۱ر۰۰V را بخواند. این مقاومت چگونه باید در مدار بسته شود؟ (ب) مطلوب است مقدار مقاومت کمکی لازم برای تبدیل کردن گالوانومتر به یک آمپرسنج که در انحراف کامل عقربه ۵۰ر۰mA را بخواند. این مقاومت چگونه باید در مدار بسته شود؟

۴۶ م. ذره‌ای با بار q با تندی v در روی دایره‌ای به شعاع a حرکت می‌کند. با در نظر گرفتن این مسیر دایره‌ای به صورت یک حلقهٔ جریان با جریان ثابت و مساوی با جریان متوسط، گشتاور نیروی بیشینهٔ وارد بر حلقه از سوی یک میدان مغناطیسی یکنواخت با بزرگی B را پیدا کنید.

۴۷ م. شکل ۲۹ـ۳۸، یک استوانهٔ چوبی به جرم $m=$۰ر۲۵۰kg و طول $L=$۰ر۱۰۰m را نشان می‌دهد، که تعداد $N=$۱۰ر۰ دور سیم در امتداد طول به دور آن پیچیده شده است، به گونه‌ای که صفحهٔ پیچهٔ سیم محور استوانه را در برمی‌گیرد. کمترین جریان i در پیچه چقدر باید باشد تا مانع پایین غلتیدن استوانه بر روی سطح شیبداری با زاویهٔ شیب θ نسبت به راستای افقی، شود؟ سطح شیبدار در میدان مغناطیسی قائم ۰ر۵۰۰T قرار دارد. و صفحهٔ پیچهٔ سیم با این سطح موازی است.



شکل ۲۹ـ۳۸ مسألهٔ ۴۷.

بخش ۲۹ـ۹ گشتاور دوقطبی مغناطیسی

۴۸ ت. گشتاور دوقطبی مغناطیسی زمین ۸ر۰۰×۱۰^{۲۲}J/T است. فرض کنید که این گشتاور دوقطبی از بارهای الکتریکی جاری در لایهٔ خارجی هستهٔ مذاب زمین تولید می‌شود. اگر شعاع مسیر دایره‌ای این بارها ۳۵۰۰km باشد، جریان حاصل از بارها را حساب کنید.

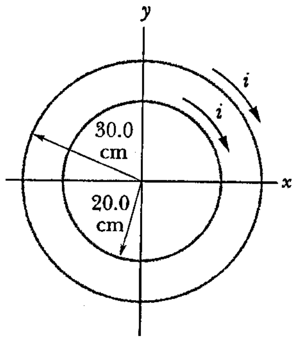
۴۹ ت. شعاع یک پیچهٔ دایره‌ای ۱۶۰ دوری، ۱ر۹cm است. (الف) جریانی را که باعث تولید گشتاور دوقطبی مغناطیسی ۲ر۳۰A.m^{۲} می‌شود، حساب کنید. (ب) گشتاور نیروی بیشینه‌ای را که به پیچهٔ حامل این جریان در میدان مغناطیسی یکنواخت ۳۵ر۰mT وارد می‌شود، پیدا کنید.

۵۰ ت. یک حلقهٔ سیمی دایره‌ای به شعاع ۱۵ر۰cm حامل جریان ۲ر۶۰A است. این حلقه طوری قرار گرفته است که خط عمود بر صفحهٔ آن با میدان مغناطیسی یکنواخت ۱۲ر۰T زاویهٔ ۴۱ر۰ درجه می‌سازد. (الف) گشتاور دوقطبی مغناطیسی حلقه را حساب کنید. (ب) گشتاور نیروی وارد بر حلقه چقدر است؟

۵۱ ت. یک حلقهٔ جریان به شکل مثلث راستگوشه با ضلع‌های ۳۰، ۴۰ و ۵۰ سانتی‌متر، حامل جریان ۵ر۰A است. این حلقه در میدان مغناطیسی یکنواخت با بزرگی ۸۰mT قرار دارد. میدان مغناطیسی با جریان گذرنده از ضلع ۵۰ سانتی‌متری حلقه موازی و همسو است. مطلوب است تعیین بزرگی (الف) گشتاور دوقطبی مغناطیسی حلقه و (ب) گشتاور نیروی وارد بر حلقه.

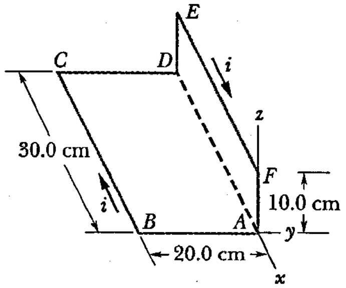
۵۲ ت. شعاع صفحهٔ دایره‌ای یک ساعت دیواری ساکن ۱۵cm است. در پیرامون این ساعت شش دور سیم پیچیده شده و سیم حامل جریان ۲ر۰A در جهت ساعتگرد است. این ساعت در جایی واقع است که میدان مغناطیسی خارجی ثابت و یکنواخت ۷۰mT وجود دارد (اما ساعت وقت صحیح را نشان می‌دهد). درست در ساعت ۱:۰۰ بعدازظهر عقربهٔ ساعت شمار در جهت میدان مغناطیسی خارجی قرار دارد. (الف) پس از چند دقیقه، عقربهٔ دقیقه شمار در جهت گشتاور نیروی وارد بر پیچه از سوی میدان مغناطیسی قرار خواهد گرفت؟ (ب) بزرگی این گشتاور نیرو را پیدا کنید.

۵۳ ت. دو حلقهٔ سیمی دایره‌ای هم مرکز به شعاع‌های ۲۰ر۰ و ۳۰ر۰ سانتی‌متر واقع در صفحهٔ xy حامل جریان ۷ر۰۰A در جهت ساعتگرد هستند (شکل ۲۹ـ۳۹). (الف) گشتاور دوقطبی مغناطیسی برایند این سیستم را پیدا کنید. (ب) اگر جهت جریان در حلقهٔ درونی عوض شود، گشتاور دوقطبی مغناطیسی برایند چقدر می‌شود؟



شکل ۲۹ـ۳۹ تمرین ۵۳.

۵۴ م. شکل ۲۹ـ۴۰، حلقهٔ جریان $ABCDEFA$ را نشان می‌دهد که حامل جریان $i=$۵ر۰۰A است. ضلع‌های حلقه با محورهای مختصات موازی‌اند و $AB=$۲۰ر۰cm، $BC=$۳۰ر۰cm و $FA=$۱۰ر۰cm. بزرگی و جهت گشتاور دوقطبی مغناطیسی این حلقه را معین کنید. (راهنمایی: دو جریان یکسان و مخالف را در پاره‌خط AD در نظر بگیرید و سپس مسأله را برای دو حلقهٔ مستطیل شکل $ABCDA$ و $ADEFA$ حل کنید).



شکل ۲۹ـ۴۰ مسألهٔ ۵۴.

۵۵ م. یک حلقهٔ سیم دایره‌ای به شعاع $۸٫۰\,\mathrm{cm}$ حامل جریان $۰٫۲۰\,\mathrm{A}$ است. بردار یکهٔ موازی با گشتاور دوقطبی حلقه، $\hat{\mu}$، برابر است با $۰٫۶۰\hat{i} - ۰٫۸۰\hat{j}$. این حلقه در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B} = (۰٫۲۵\mathrm{T})\hat{i} + (۰٫۳۰\mathrm{T})\hat{k}$ قرار می‌گیرد. مطلوب است تعیین (الف) گشتاور نیروی وارد بر حلقه (با استفاده از نمادگذاری بردارهای یکه)، و (ب) انرژی پتانسیل مغناطیسی حلقه.

مسأله‌های تکمیلی

۵۶. سیمی در راستای محور y از $y=۰$ تا $y=۰٫۲۵۰\,\mathrm{m}$ قرار دارد و از آن جریان $۲٫۰۰\,\mathrm{mA}$ در جهت محور y منفی می‌گذرد. این سیم در میدان مغناطیسی نایکنواخت زیر قرار دارد

$$\vec{B} = (۰٫۳۰۰\,\mathrm{T/m})y\hat{i} + (۰٫۴۰۰\,\mathrm{T/m})y\hat{j}$$

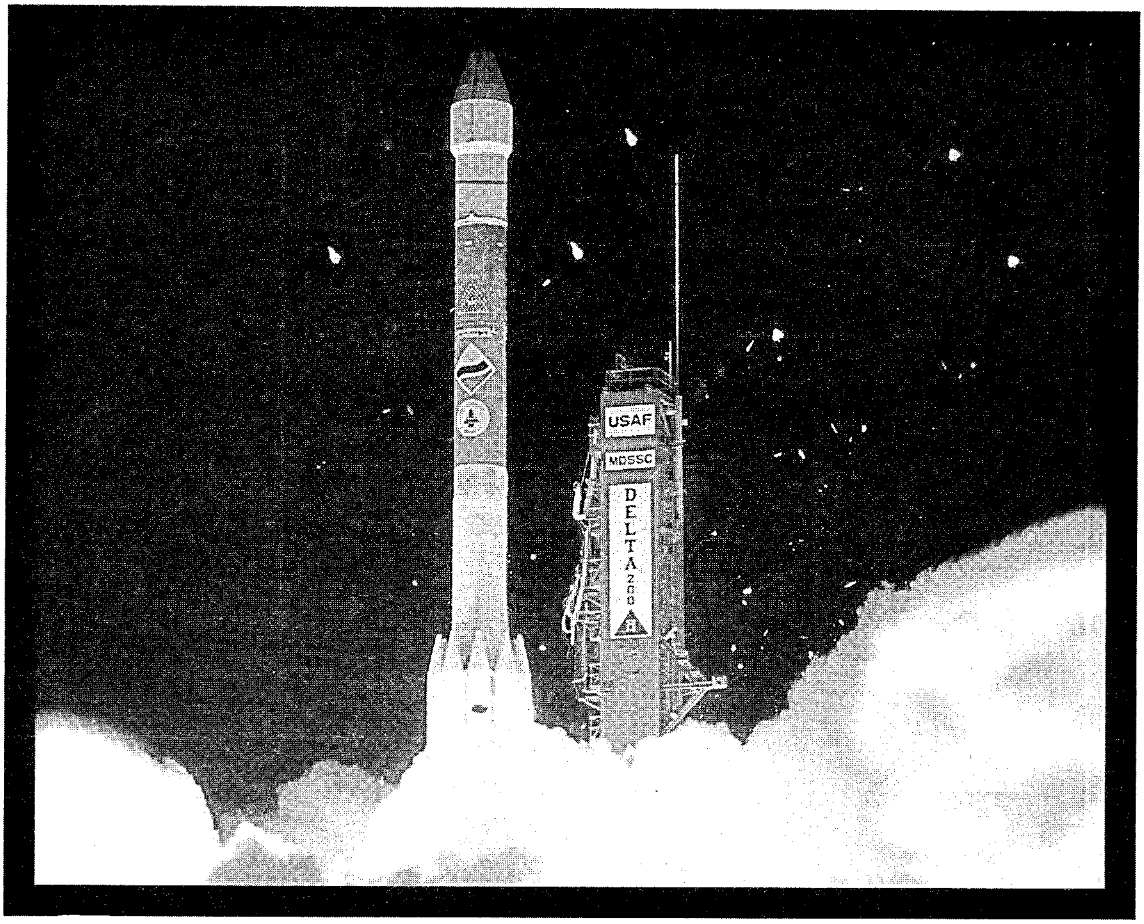
نیروی مغناطیسی وارد بر (الف) عنصر طول dy از سیم، واقع در مکان y و (ب) کل سیم، با استفاده از نمادگذاری بردارهای یکه، چیست؟

۵۷. پروتونی با سرعت ثابت $+۵۰۰\,\mathrm{m/s}$ در راستای محور x و تحت تأثیر میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی متعامد حرکت می‌کند. میدان مغناطیسی $\vec{B} = (۲٫۰\,\mathrm{mT})\hat{j}$ است. میدان الکتریکی چیست؟

۵۸. یک دوقطبی با گشتاور دوقطبی به بزرگی $۰٫۰۲۰\,\mathrm{J/T}$ از حال سکون در میدان مغناطیسی یکنواخت به بزرگی $۵۲\,\mathrm{mT}$ رها می‌شود. از دوران دوقطبی بر اثر نیروی مغناطیسی وارد بر آن، ممانعت نمی‌شود. وقتی دوقطبی در حالت سمتگیری گشتاور دوقطبی‌اش به طور موازی با میدان مغناطیسی دوران می‌کند، انرژی جنبشی‌اش $۰٫۸۰\,\mathrm{mJ}$ است. (الف) زاویهٔ آغازی میان گشتاور دوقطبی و میدان مغناطیسی چقدر است؟ (ب) وقتی دوقطبی به حالت سکون (لحظه‌ای) بعدی می‌رسد، این زاویه چقدر است؟

۵۹. الکترونی در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B} = B_x\hat{i} + (۳B_x)\hat{j}$ حرکت می‌کند. در لحظه‌ای خاص، سرعت الکترون $\vec{v} = (۲٫۰\hat{i} + ۴٫۰\hat{j})\,\mathrm{m/s}$ و نیروی مغناطیسی وارد بر آن $(۶٫۴ \times ۱۰^{-۱۹}\,\mathrm{N})\hat{k}$ است. B_x را پیدا کنید.

۳۰
میدان مغناطیسی ناشی از جریان الکتریکی

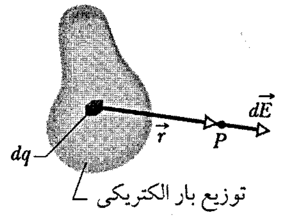


در آیندهٔ نزدیک با روشی که بیان خواهد شد اشیا را به فضا پرتاب خواهیم کرد. به هر حال، وقتی کاوش‌ها و استخراج سیارک‌ها را آغاز کنیم و چشمهٔ سوختی برای موشک‌های متعارف در اختیار نداشته باشیم، به روشی با کارایی بیشتر نیازمند خواهیم بود. در این صورت، شاید پرتاب کننده‌های الکترومغناطیسی پاسخگوی نیاز ما باشند. *تفنگ ریلی الکترومغناطیسی* نمونهٔ کوچکی از این وسایل است، که در مدت یک میلی ثانیه می‌تواند تندی یک پرتابه را از حال سکون به ۱۰ km/s (۳۶۰۰۰ km/h) برساند.

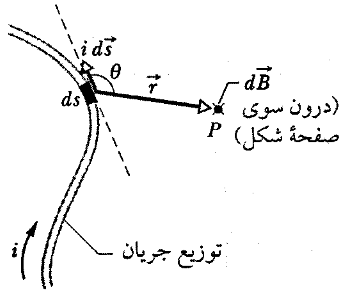
چگونه می‌توان چنین شتاب زیادی را ایجاد کرد؟

در این فصل به این پرسش پاسخ داده خواهد شد.

۱ـ۳۰ محاسبهٔ میدان مغناطیسی ناشی از جریان الکتریکی



(الف)



(ب)

شکل ۱ـ۳۰ (الف) عنصر بار الکتریکی dq در نقطهٔ P یک میدان الکتریکی دیفرانسیلی $d\vec{E}$ به وجود می‌آورد. (ب) عنصر طول ـ جریان $i d\vec{s}$ در نقطهٔ P یک میدان مغناطیسی دیفرانسیلی $d\vec{B}$ تولید می‌کند. نماد × (دُم پیکان) در محل خال مربوط به نقطهٔ P نشان می‌دهد که $d\vec{B}$ در درون سوی صفحهٔ شکل است.

همان‌طور که در بخش ۲۹ـ۱ دیدیم، برای تولید میدان مغناطیسی، یکی از راه‌ها حرکت دادن بارهای الکتریکی ـ یعنی استفاده از جریان الکتریکی، است. هدف ما در این فصل محاسبهٔ میدان مغناطیسی تولید شده توسط یک توزیع جریان معین است. در اینجا نیز از همان روش اساسی به کار رفته در فصل ۲۳ برای محاسبهٔ میدان الکتریکی تولید شده توسط توزیع معینی از ذرات باردار، استفاده می‌کنیم.

اکنون، این روش اساسی را به اختصار مرور می‌کنیم. نخست توزیع بار را به طور ذهنی به عنصرهای بار dq، چنانکه در مورد توزیع بار با شکل اختیاری در شکل ۱ـ۳۰ الف می‌بینیم، تقسیم می‌کنیم. سپس $d\vec{E}$، میدان حاصل از یک عنصر بار معین را در نقطه‌ای مانند P حساب می‌کنیم. چون میدان‌های الکتریکی حاصل از عنصرهای بار را می‌توان با هم جمع کرد، میدان برایند $\vec{E}$ در نقطهٔ P را با انتگرال گرفتن از $d\vec{E}$ روی تمام عنصرهای توزیع بار حساب می‌کنیم.

یادآوری می‌شود که بزرگی $d\vec{E}$ برابر است با:

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2} \qquad (۱ـ۳۰)$$

که در آن r فاصلهٔ عنصر بار dq تا نقطهٔ P است. برای یک عنصر با بار مثبت، $d\vec{E}$ با $\vec{r}$ همسو است و $\vec{r}$ برداری است که از عنصر بار dq به سوی نقطهٔ P امتداد دارد. با استفاده از بردار $\vec{r}$، معادلهٔ ۳۰ـ۱ را می‌توان به صورت برداری زیر نوشت

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^3}\vec{r} \qquad (۲ـ۳۰)$$

این معادله نشان می‌دهد که جهت $d\vec{E}$، میدان الکتریکی حاصل از یک عنصر با بار مثبت همان جهت $\vec{r}$ است. توجه کنید که معادلهٔ ۳۰ـ۲ با وجود داشتن نمای ۳ در مخرج، باز هم بیان کنندهٔ یک قانون عکس مجذوری است (چون $d\vec{E}$ به عکس r^2 بستگی دارد). این نما به این جهت در معادله وارد شده که در صورت کسر عاملی با بزرگی r افزوده شده است.

اکنون، از همین روش اساسی برای محاسبهٔ میدان مغناطیسی ناشی از جریان الکتریکی استفاده می‌کنیم. شکل ۳۰ـ۱ ب، سیمی به شکل دلخواه را نشان می‌دهد که از آن جریان i می‌گذرد. می‌خواهیم میدان مغناطیسی $\vec{B}$ را در حوالی نقطهٔ P پیدا کنیم. نخست سیم را در ذهن خود به عنصرهای دیفرانسیلی ds تقسیم می‌کنیم و سپس برای هر عنصر یک بردار طول $d\vec{s}$ چنان تعریف می‌کنیم که طول آن ds و با جریان گذرنده از ds همسو باشد. اکنون می‌توانیم عنصر طول ـ جریان $i d\vec{s}$ را تعریف و $d\vec{B}$، میدان مغناطیسی تولید شده در نقطهٔ P توسط این عنصر طول ـ جریان را حساب کنیم. به تجربه در می‌یابیم که میدان‌های مغناطیسی، مانند میدان‌های الکتریکی، برای تعیین میدان برایند می‌توانند برهم نهاده شوند. بنابراین، با انتگرال‌گیری از $d\vec{B}$ روی تمام عنصرهای طول ـ جریان می‌توان میدان برایند $\vec{B}$ در نقطهٔ P را حساب کرد. اما به خاطر وجود پیچیدگی، این جمع کردن مشکل‌تر از جمع کردن میدان‌های الکتریکی است؛ چون در آنجا dq، عنصر بار تولیدکنندهٔ میدان الکتریکی کمیتی نرده‌ای بود، در حالی که $i d\vec{s}$، عنصر طول ـ جریان به وجود آورندهٔ میدان مغناطیسی از حاصل‌ضرب کمیتی نرده‌ای در یک بردار به دست می‌آید.

بزرگی میدان $d\vec{B}$، تولید شده در نقطهٔ P توسط عنصر طول ـ جریان $i d\vec{s}$، برابر است با:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\,ds\,\sin\theta}{r^2} \qquad (۳ـ۳۰)$$

در این معادله θ زاویهٔ میان بردارهای $d\vec{s}$ و $\vec{r}$ و بردار $\vec{r}$ ممتد از ds به سوی P است. μ_0 یک مقدار ثابت، به نام ثابت تراوایی است و مقدار آن بنا به تعریف، دقیقاً برابر است با:

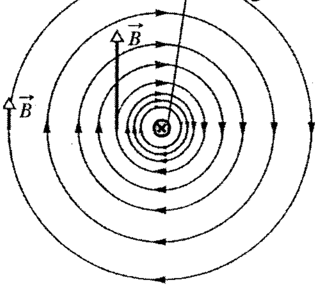
$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\text{T.m/A} \approx 1{,}26 \times 10^{-6}\,\text{T.m/A} \qquad (۴ـ۳۰)$$ ■

در شکل ۳۰ـ۱ ب، $d\vec{B}$ در درون سوی صفحهٔ شکل و با حاصل‌ضرب برداری $d\vec{s}\times\vec{r}$ همسو است. بنابراین،

معادلهٔ ۳۰ـ۳ را می‌توان به صورت برداری زیر نوشت

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{id\vec{s}\times\vec{r}}{r^3} \quad \text{(قانون بیو ـ ساوار)} \quad (۳۰\text{ـ}۵)$$

این معادلهٔ برداری و صورت نرده‌ای آن معادلهٔ ۳۰ـ۳، به نام **قانون بیو**[1] **و ساوار**[2] معروف است. این قانون، که به طور تجربی به دست آمده یک قانون عکس مجذوری است (نمای ۳ در مخرج معادلهٔ ۳۰ـ۵ فقط به خاطر وجود عامل $\vec{r}$ در صورت، وارد شده است). از این قانون برای محاسبهٔ میدان مغناطیسی برایند $\vec{B}$ که در یک نقطه توسط توزیع‌های مختلف جریان تولید می‌شود، استفاده خواهد شد.



شکل ۳۰ـ۲ خط‌های میدان مغناطیسی تولید شده توسط جریان i گذرنده از یک سیم مستقیم دراز در پیرامون سیم دایره‌های هم‌مرکز تشکیل می‌دهند. در اینجا جریان در درون سوی صفحهٔ شکل است، که با × نشان داده شده است.

میدان مغناطیسی ناشی از جریان یک سیم مستقیم دراز

اکنون، قانون بیو و ساوار را به طور ساده برای اثبات این موضوع که بزرگی میدان مغناطیسی در فاصلهٔ عمودی R از یک سیم مستقیم (بی‌نهایت) دراز حامل جریان i، از معادلهٔ زیر به دست می‌آید، به کار می‌بریم:

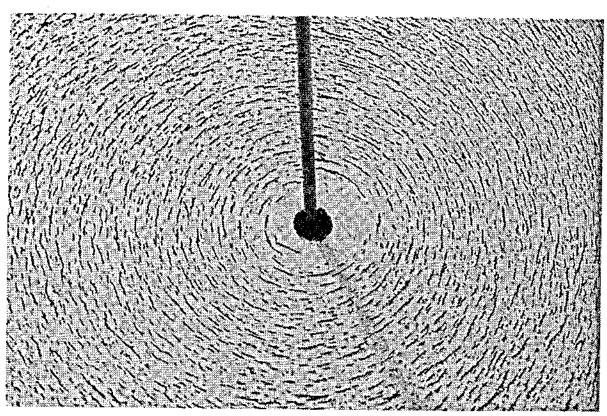
$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \quad \text{(سیم مستقیم دراز)} \quad (۳۰\text{ـ}۶)$$

بزرگی میدان B در معادلهٔ ۳۰ـ۶ فقط به جریان و فاصلهٔ R از سیم بستگی دارد. بعداً نشان خواهیم داد که خط‌های میدان $\vec{B}$، در پیرامون سیم دایره‌های هم مرکزی، مانند شکل ۳۰ـ۲ و مانند براده‌های آهن در شکل ۳۰ـ۳، تشکیل می‌دهند. زیاد شدن فاصلهٔ میان خط‌ها در شکل ۳۰ـ۲ با افزایش فاصلهٔ نقاط از سیم، نشان می‌دهد که بزرگی $\vec{B}$ طبق معادلهٔ ۳۰ـ۶، متناسب با $1/R$ کاهش می‌یابد. طول‌های دو بردار $\vec{B}$ در شکل هم متناسب بودن میدان با $1/R$ را نشان می‌دهند.

در اینجا قاعدهٔ سادهٔ دست راست را برای پیدا کردن جهت میدان مغناطیسی حاصل از یک عنصر طول ـ جریان، نظیر بخشی از یک سیم دراز، بیان می‌کنیم:

◀ *قاعدهٔ دست راست:* عنصر طول را در دست راست خود طوری بگیرید که انگشت شست در جهت جریان باشد. در این صورت، انگشت‌های دیگر در حالی که طبیعتاً به دور سیم می‌پیچند، جهت خط‌های میدان مغناطیسی حاصل از آن عنصر را نشان خواهند داد.

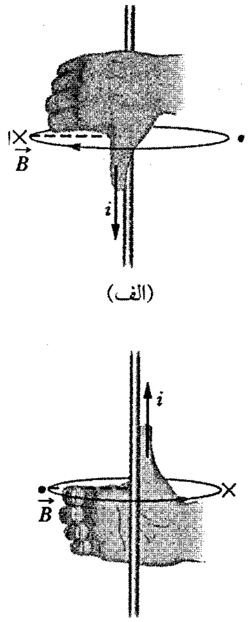
نتیجهٔ به کار بردن قاعدهٔ دست راست در مورد جریان گذرنده از سیم مستقیم شکل ۳۰ـ۲، در شکل ۳۰ـ۴ الف، به طور جانبی نشان داده شده است. برای تعیین جهت $\vec{B}$، میدان مغناطیسی تولید شده در هر نقطهٔ خاص



شکل ۳۰ـ۳ براده‌های آهن پاشیده شده بر روی مقوا هنگام عبور جریان از سیم، دایره‌های هم‌مرکز تشکیل می‌دهند. عامل قرارگرفتن براده‌ها در طول خط‌های میدان همان میدان مغناطیسی تولید شده توسط جریان است.

1. Biot 2. Savart

توسط این جریان، انگشت‌های دست راست را در ذهن خود به دور سیم طوری بپیچید که انگشت شست در جهت جریان باشد. اکنون کاری بکنید که نوک انگشت‌ها از آن نقطه بگذرند؛ در این صورت، انگشت‌ها جهت میدان در آن نقطه را نشان خواهند داد. در نمودار شکل ۳۰ـ۲، $\vec{B}$ در هر نقطه بر خط میدان مغناطیسی مماس است؛ در نمودار شکل ۳۰ـ۴، $\vec{B}$ بر خط‌چین شعاعی وصل کنندهٔ نقطه به سیم حامل جریان عمود است.



(الف)

(ب)

شکل ۳۰ـ۴ قاعدهٔ دست راست جهت میدان مغناطیسی ناشی از جریان گذرنده از یک سیم را به دست می‌دهد. (الف) نمودار وضعیت شکل ۳۰ـ۲، که به طور جانبی مشاهده شده است. میدان مغناطیسی $\vec{B}$ در هر نقطهٔ واقع در سمت چپ سیم، بر خط‌چین شعاعی عمود و در درون سوی صفحهٔ شکل در جهت انگشت‌هاست، که با × نشان داده شده است. (ب) اگر جهت جریان عوض شود، $\vec{B}$ در هر نقطهٔ سمت چپ سیم، باز هم بر خط‌چین شعاعی عمود است اما در این حالت در برون سوی صفحهٔ شکل است، که با خال نشان داده شده است.

اثبات معادلهٔ ۳۰ـ۶

شکل ۳۰ـ۵، درست مانند شکل ۳۰ـ۱ ب است، با این تفاوت که در اینجا سیم مستقیم و بی‌نهایت دراز است. این شکل چگونگی کار در دست انجام دادن را نشان می‌دهد؛ ما می‌خواهیم میدان $\vec{B}$ در نقطهٔ P، واقع در فاصلهٔ عمودی R از سیم، را پیدا کنیم. بزرگی میدان مغناطیسی دیفرانسیلی در نقطهٔ P، که از عنصر طول ـ جریان $i\vec{ds}$، به فاصلهٔ r از نقطهٔ P، ناشی می‌شود، از معادلهٔ ۳۰ـ۳ به دست می‌آید:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{i\,ds\,\sin\theta}{r^2}$$

جهت $d\vec{B}$ در شکل ۳۰ـ۵ همان جهت بردار $\vec{ds}\times\vec{r}$، یعنی در درون سوی صفحهٔ شکل است.

توجه کنید که برای تمام عنصرهای طول ـ جریان که سیم می‌تواند به آنها تقسیم شود، $d\vec{B}$ در نقطهٔ P دارای همین جهت است. بنابراین، بزرگی میدان مغناطیسی تولید شده در نقطهٔ P توسط عنصرهای طول ـ جریان در نیمهٔ بالایی سیمی به طول بی‌نهایت، با انتگرال‌گیری از dB در معادلهٔ ۳۰ـ۳ از صفر تا ∞ به دست می‌آید.

اکنون یک عنصر طول ـ جریان را در نیمهٔ پایینی سیم در نظر می‌گیریم؛ فاصلهٔ این عنصر در پایین نقطهٔ P به اندازهٔ فاصلهٔ $\vec{ds}$ در بالای نقطهٔ P است. با توجه به معادلهٔ ۳۰ـ۵، میدان مغناطیسی تولید شده در نقطهٔ P توسط این عنصر طول ـ جریان، همان بزرگی و جهت میدان حاصل از عنصر $i\vec{ds}$ در شکل ۳۰ـ۵ را دارد. علاوه بر این، میدان مغناطیسی تولید شده توسط نیمهٔ پایینی سیم، دقیقاً مساوی با میدان مغناطیسی تولید شده توسط نیمهٔ بالایی سیم است. برای پیدا کردن بزرگی میدان مغناطیسی کل $\vec{B}$ در نقطهٔ P، فقط کافی است که حاصل انتگرال‌گیری را در ۲ ضرب کنیم. در نتیجه، خواهیم داشت

$$B = 2\int_0^\infty dB = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\theta\,ds}{r^2} \qquad (۳۰\text{ـ}۷)$$

در این معادله متغیرهای θ، s و r مستقل از هم نیستند، بلکه به صورت زیر به هم مربوط‌اند (شکل ۳۰ـ۵ را ببینید).

$$r = \sqrt{s^2+R^2}$$

و

$$\sin\theta = \sin(\pi-\theta) = \frac{R}{\sqrt{s^2+R^2}}$$

با جانشانی این مقادیر و با استفاده از انتگرال ۱۹ در پیوست ث کتاب، نتیجهٔ معادلهٔ ۳۰ـ۷ چنین به‌دست می‌آید:

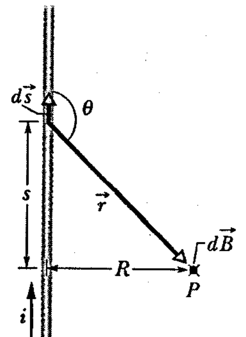
$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\int_0^\infty \frac{R\,ds}{(s^2+R^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}\left[\frac{s}{(s^2+R^2)^{\frac{1}{2}}}\right]_0^\infty = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \qquad (۳۰\text{ـ}۸)$$

این، همان رابطه‌ای است که اثبات آن مورد نظر بود. توجه کنید که میدان مغناطیسی حاصل از نیمهٔ پایینی یا نیمهٔ بالایی سیم نامتناهی شکل ۳۰ـ۵ برابر با نصف این مقدار است؛ یعنی

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \quad \text{(سیم مستقیم نیم ـ نامتناهی)} \qquad (۳۰\text{ـ}۹)$$

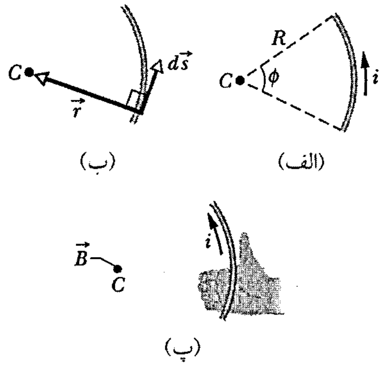
■



شکل ۳۰ـ۵ نمودار مربوط به محاسبهٔ میدان مغناطیسی حاصل از جریان i گذرنده از یک سیم مستقیم دراز. میدان $d\vec{B}$ در نقطهٔ P که از عنصر طول ـ جریان $i\vec{ds}$ حاصل شده است، مطابق شکل، در درون سوی صفحهٔ شکل است.

میدان مغناطیسی ناشی از جریان سیمی به شکل کمان دایره‌ای

برای پیدا کردن میدان مغناطیسی تولید شده در هر نقطه توسط جریان گذرنده از یک سیم خمیده باز هم باید از معادلهٔ ۳۰ـ۳ استفاده کرد. برای این کار، بزرگی میدان تولید شده توسط یک عنصر طول ـ جریان را می‌نویسیم و از آن انتگرال می‌گیریم تا میدان برایند تولید شده توسط تمام عنصرهای طول ـ جریان به دست آید. این انتگرال‌گیری، بسته به شکل سیم، ممکن است مشکل باشد؛ اما وقتی سیم به شکل یک کمان دایره‌ای است و نقطه در مرکز خمیدگی قرار دارد، مسأله تا اندازه‌ای ساده می‌شود.



شکل ۳۰ـ۶ (الف) نمودار سیمی به شکل کمان دایره‌ای با مرکز C، که حاصل جریان i است. (ب) برای هر عنصری از سیم که بر روی کمان قرار دارد، زاویهٔ میان بردارهای $d\vec{s}$ و $\vec{r}$ برابر با ۹۰ درجه است. (پ) چگونگی تعیین جهت میدان مغناطیسی ناشی از جریان گذرنده از سیم در مرکز C؛ این میدان در برون سوی صفحهٔ شکل و در جهت نوک انگشت‌هاست، که در نقطهٔ C با یک خال مشخص شده است.

شکل ۳۰ـ۶ الف، سیمی به شکل یک کمان دایره‌ای با زاویهٔ مرکزی ϕ، شعاع R، و مرکز C را، که حامل جریان i است نشان می‌دهد. در نقطهٔ C، هر عنصر طول ـ جریان $id\vec{s}$ از سیم یک میدان مغناطیسی تولید می‌کند که بزرگی‌اش dB، از معادلهٔ ۳۰ـ۳ به دست می‌آید. علاوه بر این، همان طور که شکل ۳۰ـ۶ ب نشان می‌دهد، انتخاب محل عنصر بر روی سیم اهمیتی ندارد و θ، زاویهٔ میان بردارهای $d\vec{s}$ و $\vec{r}$ برابر با ۹۰ درجه است؛ در ضمن، $r=R$. بنابراین، با قرار دادن R به جای r و θ برابر با ۹۰ درجه و با استفاده از معادلهٔ ۳۰ـ۳، داریم

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{ids \sin 90^\circ}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{ids}{R^2} \qquad (۳۰ـ۱۰)$$

این، بزرگی میدان ناشی از هر عنصر طول ـ جریان کمان دایره‌ای در نقطهٔ C است.

کاربرد قاعدهٔ دست راست در هر نقطه از طول سیم (مانند شکل ۳۰ـ۶ پ) نشان می‌دهد که تمام میدان‌های دیفرانسیلی $d\vec{B}$ در نقطهٔ C همسوی‌اند ـ یعنی، در برون سوی صفحهٔ شکل هستند. بنابراین، میدان کل در نقطهٔ C از مجموع تمام میدان‌های دیفرانسیلی $d\vec{B}$ (از طریق انتگرال‌گیری) به دست می‌آید. با استفاده از اتحاد $ds=Rd\phi$ متغیر انتگرال‌گیری را از ds به $d\phi$ تغییر می‌دهیم. با توجه به معادلهٔ ۳۰ـ۱۰، داریم

$$B = \int dB = \int_0^{\phi} \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{iRd\phi}{R^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi R}\int_0^{\phi} d\phi$$

پس از انتگرال‌گیری از این معادله نتیجهٔ زیر به دست می‌آید

$$B = \frac{\mu_0 i\phi}{4\pi R} \qquad \text{(در مرکز کمان دایره‌ای)} \qquad (۳۰ـ۱۱)$$ ■

توجه کنید که این معادله فقط میدان مغناطیسی را در مرکز خمیدگی یک کمان دایره‌ای حامل جریان به‌دست می‌دهد. هنگام قرار دادن داده‌ها در این معادله باید دقت کنیم که ϕ را به جای درجه، برحسب رادیان بنویسیم. به عنوان مثال، برای پیدا کردن بزرگی میدان مغناطیسی در مرکز یک سیم دایره‌ای حامل جریان باید در معادلهٔ ۳۰ـ۱۱ به جای ϕ مقدار $2\pi\,\text{rad}$ را قرار داد:

$$B = \frac{\mu_0 i(2\pi)}{4\pi R} = \frac{\mu_0 i}{2R} \qquad \text{(در مرکز دایرهٔ کامل)} \qquad (۳۰ـ۱۲)$$

مسألهٔ نمونهٔ ۳۰ـ۱

در شکل ۳۰ـ۷ الف، سیم حامل جریان i شامل یک کمان دایره‌ای به شعاع R با زاویهٔ مرکزی $\pi/2\,\text{rad}$، و دو بخش مستقیم است که یکدیگر را در مرکز کمان C، قطع می‌کنند. $\vec{B}$، میدان مغناطیسی حاصل از این جریان در مرکز C چیست؟

حل: یک **نکتهٔ کلیدی** این است که میدان مغناطیسی $\vec{B}$ در نقطهٔ C را با کاربرد قانون بیو ـ ساوار در مورد سیم، طبق معادلهٔ ۳۰ـ۵، به دست آوریم. **نکتهٔ کلیدی** دیگر این است که کاربرد معادلهٔ ۳۰ـ۵ در مورد سه بخش مجزای سیم ـ یعنی (۱) بخش مستقیم سیم در سمت چپ، (۲) بخش مستقیم سیم در سمت راست و (۳) کمان دایره‌ای، می‌تواند تعیین میدان $\vec{B}$ را آسان کند.

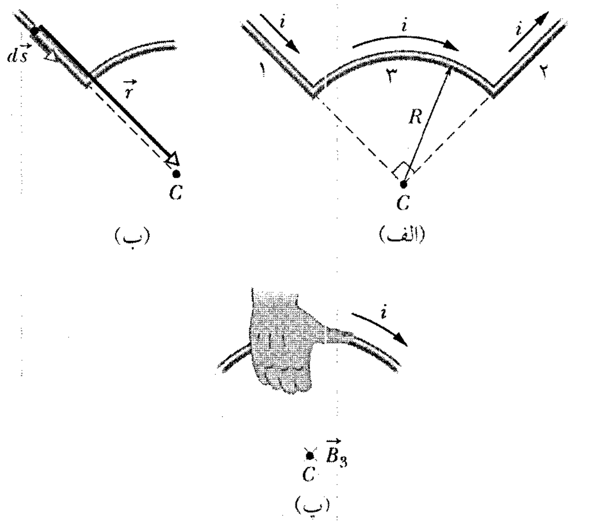
بخش‌های مستقیم سیم. برای هر عنصر طول ـ جریان در بخش ۱، θ، زاویهٔ میان $d\vec{s}$ و $\vec{r}$ صفر است (شکل ۳۰ـ۷ ب). در نتیجه، با استفاده از معادلهٔ ۳۰ـ۳، داریم

$$dB_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{ids \sin\theta}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{ids \sin 0}{r^2} = 0$$

بنابراین، جریان در تمام سیم بخش مستقیم ۱، هیچ اثری روی میدان مغناطیسی در نقطهٔ C ندارد:

$$B_1 = 0$$

همین نتیجه در مورد بخش مستقیم ۲ هم، که در آن θ، زاویهٔ میان $d\vec{s}$ و $\vec{r}$ برای هر عنصر طول ـ جریان برابر با ۱۸۰ درجه است، صادق است. پس



شکل ۳۰-۷ مسألهٔ نمونهٔ ۳۰-۱. (الف) سیمی شامل دو بخش مستقیم (۱ و ۲) و یک کمان دایره‌ای (۳) است، که حامل جریان i است. (ب) برای عنصر طول ـ جریان در بخش ۱، زاویهٔ میان $\vec{ds}$ و $\vec{r}$ صفر است. (پ) نمودار تعیین جهت میدان مغناطیسی $B_۳$ در نقطهٔ C، که از جریان در کمان دایره‌ای ناشی می‌شود؛ میدان مغناطیسی در درون سوی صفحهٔ شکل است.

می‌توان نوشت

$$B_۲ = ۰$$

کمان دایره‌ای. در اینجا **نکتهٔ کلیدی** این است که کاربرد قانون بیو ـ ساوار برای محاسبهٔ میدان مغناطیسی در مرکز کمان دایره‌ای منجر به استفاده از معادلهٔ ۳۰-۱۱ ($B=\mu_۰ i\phi/۴\pi R$) می‌شود. در اینجا زاویهٔ مرکزی کمان برابر است با $\phi=\pi/۲$rad. پس، با استفاده از معادلهٔ ۳۰-۱۱ بزرگی میدان مغناطیسی $\vec{B}_۳$، در مرکز کمان C، چنین به دست می‌آید:

$$B_۳ = \frac{\mu_۰ i(\pi/۲)}{۴\pi R} = \frac{\mu_۰ i}{۸R}$$

برای مشخص کردن جهت $\vec{B}_۳$ از قاعدهٔ دست راست نشان داده شده در شکل ۳۰-۴، استفاده می‌کنیم. در ذهن خود با دست راست کمان دایره‌ای را، مطابق شکل ۳۰-۷ پ، طوری می‌گیریم که انگشت شست در جهت جریان باشد. جهت پیچش انگشت‌های دیگر به دور سیم، جهت خط‌های میدان مغناطیسی را در پیرامون سیم نشان می‌دهد. چون در ناحیهٔ نقطهٔ C (درون کمان دایره‌ای)، نوک انگشت‌ها در درون سوی صفحهٔ شکل است، پس، $\vec{B}_۳$ در درون سوی صفحهٔ شکل است.

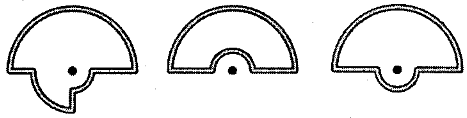
میدان برایند. به‌طور کلی، وقتی دو یا چند میدان مغناطیسی را با هم ترکیب می‌کنیم تا میدان مغناطیسی برایند را به دست آوریم باید میدان‌ها را به‌طور برداری با هم جمع کنیم و نباید فقط بزرگی آنها را جمع کرد. اما در اینجا کمان دایره‌ای است که در نقطهٔ C میدان مغناطیسی تولید می‌کند. بنابراین، بزرگی میدان برایند $\vec{B}$ را می‌توان چنین نوشت:

$$B = B_۱ + B_۲ + B_۳ = ۰ + ۰ + \frac{\mu_۰ i}{۸R} \Rightarrow$$

$$B = \frac{\mu_۰ i}{۸R} \qquad \text{(پاسخ)}$$

جهت $\vec{B}$ همان جهت $\vec{B}_۳$ ـ یعنی در درون سوی صفحهٔ شکل ۳۰-۷ است.

خودآزمایی ۱: شکل زیر، سه مدار شامل کمان‌های دایره‌ای هم مرکز (به صورت نیمدایره، یا ربع دایره، با شعاع‌های r، $۲r$ و $۳r$) و طول‌های شعاعی را نشان می‌دهد. جریان در این مدارها یکسان است. این مدارها را با توجه به بزرگی میدان مغناطیسی تولید شده در مرکز خمیدگی (خال سیاه)، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



مسألهٔ نمونهٔ ۳۰-۲

شکل ۳۰-۸ الف، دو سیم موازی دراز را نشان می‌دهد که از آنها جریان‌های $i_۱$ و $i_۲$ در جهت‌های مخالف می‌گذرند. بزرگی جهت میدان مغناطیسی برایند در نقطهٔ P چیست؟ فرض کنید: $i_۱=۱۵$A، $i_۲=۳۲$A و $d=۵{,}۳$cm.

حل: یک **نکتهٔ کلیدی** این است که میدان مغناطیسی $\vec{B}$ در نقطهٔ P برابر با جمع برداری میدان‌های مغناطیسی ناشی از جریان‌های دو سیم است. **نکتهٔ کلیدی** دیگر این است که میدان مغناطیسی ناشی از هر جریان را با استفاده از قانون بیو ـ ساوار می‌توان به دست آورد. برای نقطه‌های نزدیک به یک سیم مستقیم دراز حامل جریان این قانون به صورت معادلهٔ ۳۰-۶ نوشته می‌شود.

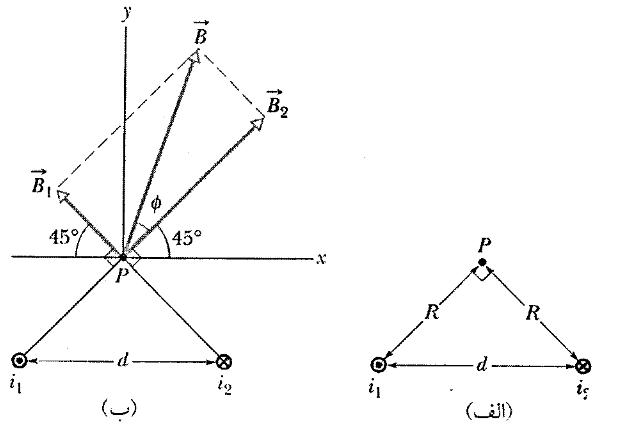
در شکل ۳۰-۸ الف، نقطهٔ P از هر دو سیم حامل جریان‌های $i_۱$ و $i_۲$ به فاصلهٔ R قرار دارد. بنابراین، معادلهٔ ۳۰-۶ نشان می‌دهد که در نقطهٔ P این جریان‌ها میدان‌های مغناطیسی $\vec{B}_۱$ و $\vec{B}_۲$ را با بزرگی‌های زیر تولید می‌کنند:

$$B_۱ = \frac{\mu_۰ i_۱}{۲\pi R} \quad \text{و} \quad B_۲ = \frac{\mu_۰ i_۲}{۲\pi R}$$

توجه کنید که در مثلث راستگوشهٔ شکل ۳۰-۸ الف، هر دو زاویهٔ قاعده (بین ضلع‌های R و d) ۴۵ درجه هستند. پس، می‌توان نوشت $\cos ۴۵° = R/d$ و به جای R مقدار $d\cos ۴۵°$ را قرار داد. در نتیجه، بزرگی‌های میدان $B_۱$ و $B_۲$ برابرند با:

$$B_۱ = \frac{\mu_۰ i_۱}{۲\pi d\cos ۴۵°} \quad \text{و} \quad B_۲ = \frac{\mu_۰ i_۲}{۲\pi d\cos ۴۵°}$$

اکنون، می‌خواهیم $\vec{B}_۱$ و $\vec{B}_۲$ را با هم ترکیب کنیم تا جمع برداری آن‌ها، که میدان برایند در نقطهٔ P است، به دست آید. برای تعیین جهت‌های $\vec{B}_۱$ و $\vec{B}_۲$ قاعدهٔ دست راست شکل ۳۰-۴ را در مورد هر یک از جریان‌های شکل ۳۰-۸ الف، به کار می‌بریم. برای سیم ۱، که جریانش در برون سوی صفحهٔ



شکل ۳۰ـ۸ مسألهٔ نمونهٔ ۳۰ـ۲. (الف) دو سیم حامل جریان‌های مخالف i_1 و i_2 (در برون سو و درون سوی صفحهٔ شکل) هستند. به زاویهٔ قائمه در نقطهٔ P توجه کنید. (ب) میدان‌های مجزای $\vec{B}_1$ و $\vec{B}_2$ با هم به طور برداری ترکیب شده‌اند تا میدان برایند $\vec{B}$ به دست آید.

شکل است، در ذهن خود سیم را طوری در دست راست می‌گیریم که انگشت شست در برون سوی صفحهٔ شکل باشد. در نتیجه، انگشت‌های پیچیده نشان می‌دهد که خط‌های میدان در جهت پادساعتگرد قرار دارند. به ویژه، در حوالی نقطهٔ P، این خط‌ها به سمت بالا و چپ هستند. یادآوری می‌شود که در هر نقطهٔ نزدیک به یک سیم دراز و مستقیم حامل جریان میدان مغناطیسی بر خط شعاعی بین نقطه و سیم عمود است. پس $\vec{B}_1$، مطابق شکل ۳۰ـ۸ ب، باید به سمت بالا و چپ باشد. (به نماد زاویهٔ قائمه در بین بردار $\vec{B}_1$ و خط واصل نقطهٔ P و سیم ۱ به دقت توجه کنید).

با تکرار کردن این تحلیل برای جریان گذرنده از سیم ۲، معلوم می‌شود که $\vec{B}_2$، مطابق شکل ۳۰ـ۸ ب، به سمت بالا و راست است. (به نماد زاویهٔ قائمه در بین بردار $\vec{B}_2$ و خط واصل نقطهٔ P و سیم ۲ توجه کنید).

اکنون $\vec{B}_1$ و $\vec{B}_2$ را به صورت برداری با هم جمع می‌کنیم تا میدان مغناطیسی برایند $\vec{B}$ در نقطهٔ P به دست آید. برای این کار می‌توان از یک ماشین ویژهٔ محاسبه‌های برداری یا تجزیه کردن بردارها به مؤلفه‌ها و سپس ترکیب کردن مؤلفه‌های $\vec{B}$، استفاده کرد. اما در شکل ۳۰ـ۸ ب، روش سومی هم وجود دارد: چون $\vec{B}_1$ و $\vec{B}_2$ بر هم عمودند ضلع‌های یک مثلث راستگوشه را تشکیل می‌دهند که $\vec{B}$ وتر آن مثلث است. بنابراین، با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس، داریم

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \frac{\mu_0}{2\pi d \cos 45^\circ}\sqrt{i_1^2 + i_2^2}$$

$$B = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{T.m/A})\sqrt{(15\mathrm{A})^2 + (32\mathrm{A})^2}}{(2\pi)(5.3 \times 10^{-2}\,\mathrm{m})(\cos 45^\circ)} \Rightarrow$$

$$B = 1.89 \times 10^{-4}\,\mathrm{T} \approx 190\,\mu\mathrm{T}$$ (پاسخ)

ϕ، زاویهٔ میان بردارهای $\vec{B}$ و $\vec{B}_2$ در شکل ۳۰ـ۸ ب، چنین به دست می‌آید:

$$\phi = \tan^{-1}\frac{B_1}{B_2}$$

به ازای مقادیر معلوم B_1 و B_2، داریم

$$\phi = \tan^{-1}\frac{i_1}{i_2} = \tan^{-1}\frac{15\mathrm{A}}{32\mathrm{A}} = 25^\circ$$

پس، زاویهٔ میان $\vec{B}$ و محور x نشان داده شده در شکل ۳۰ـ۸ ب، برابر است با:

$$\phi + 45^\circ = 25^\circ + 45^\circ = 70^\circ$$ (پاسخ)

روشهای مسأله حل کردن

روش ۱: قاعده‌های دست راست

برای کمک به بررسی قاعده‌های دست راست که تاکنون دیده‌ایم (و آنهایی که بعداً خواهیم دید)، آنها را مرور می‌کنیم.

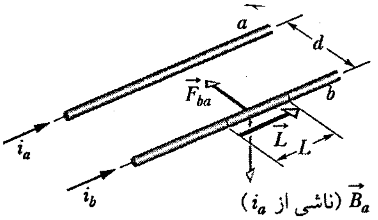
قاعدهٔ دست راست در ضرب برداری. این قاعده که در بخش ۳ـ۷ (مبانی فیزیک، جلد اول) معرفی شد، راهی برای تعیین جهت بردار حاصل از ضرب برداری است. با انگشت‌های دست راست خود در جهتی اشاره کنید که بردار اول ضرب برداری را به سوی بردار دوم و تحت زاویهٔ کوچکتر بین آنها، جارو کند. در این صورت، انگشت شست به حالت کشیده جهت بردار حاصل از ضرب برداری را نشان خواهد داد. از قاعدهٔ دست راست، در فصل ۱۲ برای پیدا کردن جهت بردارهای گشتاور نیرو و تکانهٔ زاویه‌ای، و در فصل ۲۹ برای پیدا کردن جهت نیروی وارد بر یک سیم حامل جریان در یک میدان مغناطیسی استفاده کردیم.

قاعده‌های دست راست پیچ خورده ـ مستقیم برای مغناطیس. در بسیاری موارد مربوط به مغناطیس، لازم است ارتباط میان یک عنصر «پیچ‌خورده» و یک عنصر «مستقیم» را بدانیم. این کار را می‌توان با انگشت‌ها (ی پیچیده) و شست (مستقیم) دست راست خود انجام داد. پیشتر در مثالی در بخش ۲۹ـ۸ دیدیم که جریان یک حلقه (عنصر پیچ خورده) را به $\vec{n}$، بردار عمود بر حلقه (عنصر مستقیم) ارتباط دادیم: اگر انگشت‌های دست راست خود را در جهت جریان گذرنده از حلقه بپیچیم، در این صورت، انگشت شست به حالت کشیده جهت $\vec{n}$ را نشان خواهد داد. این جهت، جهت گشتاور دوقطبی مغناطیسی حلقه، $\vec{\mu}$، را نیز نشان می‌دهد.

در این بخش با یک قاعدهٔ دست راست پیچ‌خورده ـ مستقیم دیگری آشنا شدید. برای تعیین جهت خط‌های میدان مغناطیسی پیرامون یک عنصر طول ـ جریان، انگشت خود را به حالت کشیده در جهت جریان قرار دهید. در این صورت انگشت‌های پیچ‌خورده حول عنصر طول ـ جریان، جهت خط‌های میدان مغناطیسی را نشان خواهند داد.

۳۰-۲ نیروی میان دو سیم موازی حامل جریان

دو سیم موازی دراز حامل جریان به هم نیرو وارد می‌کنند. شکل ۳۰-۹ دو سیم را نشان می‌دهد که به فاصلهٔ d از هم قرار دارند و از آنها جریان‌های i_a و i_b می‌گذرند. می‌خواهیم نیروهایی را که این سیم‌ها به هم وارد می‌کنند مورد بررسی قرار دهیم.



شکل ۳۰-۹ دو سیم موازی حامل جریان‌های همسو یکدیگر را جذب می‌کنند. $\vec{B}_a$، میدان مغناطیسی تولید شده در محل سیم b توسط جریان گذرنده از سیم a است. $\vec{F}_{ab}$، نیرویی است که در میدان $\vec{B}_a$ به سیم حامل جریان b وارد می‌شود.

نخست نیروی حاصل از جریان گذرنده از سیم a را که به سیم b در شکل ۳۰-۹ وارد می‌شود، پیدا می‌کنیم. این جریان یک میدان مغناطیسی $\vec{B}_a$ تولید می‌کند و همین میدان است که، به واقع، نیروی مورد بررسی ما را ایجاد می‌کند. برای پیداکردن این نیرو باید بزرگی و جهت میدان $\vec{B}_a$ را در محل سیم b بدانیم. بزرگی $\vec{B}_a$ در هر نقطه از سیم b، از معادلهٔ ۳۰-۶ به دست می‌آید:

$$B_a = \frac{\mu_\circ i_a}{2\pi d} \qquad (۳۰\text{-}۱۳)$$

قاعدهٔ دست راست (پیچ‌خورده ـ مستقیم) نشان می‌دهد که جهت $\vec{B}_a$ در سیم b، مطابق شکل ۳۰-۹، به سمت پایین است.

اکنون که میدان در دست است می‌توان نیرویی را که به سیم b وارد می‌شود پیدا کرد. معادلهٔ ۲۹-۲۷ نشان می‌دهد که $\vec{F}_{ba}$، نیروی وارد شده به طول L از سیم b از سوی میدان خارجی $\vec{B}_a$، برابر است با:

$$\vec{F}_{ba} = i_b\vec{L} \times \vec{B}_a \qquad (۳۰\text{-}۱۴)$$

که در آن $\vec{L}$ بردار طول سیم است. در شکل ۳۰-۹، بردارهای $\vec{L}$ و $\vec{B}_a$ برهم عمودند، در نتیجه، با استفاده از معادلهٔ ۳۰-۱۳، می‌توان نوشت

$$F_{ba} = i_b L B_a \sin 90^\circ = \frac{\mu_\circ L i_a i_b}{2\pi d} \qquad (۳۰\text{-}۱۵)$$

جهت $\vec{F}_{ba}$ همان جهت حاصل‌ضرب برداری $\vec{L}\times\vec{B}_a$ است. با کاربرد قاعدهٔ دست راست برای حاصل‌ضرب برداری $\vec{L}$ در $\vec{B}_a$ در شکل ۳۰-۹، مشاهده می‌کنیم که $\vec{F}_{ba}$، مطابق شکل، به سمت سیم a است.

روش کلی برای تعیین نیروی وارد بر یک سیم حامل جریان، چنین است:

> ◀ برای تعیین نیروی وارد بر یک سیم حامل جریان، که از یک سیم حامل جریان دیگر حاصل می‌شود، نخست میدان مغناطیسی ناشی از سیم دوم در محل سیم اول را پیدا کنید. سپس، نیروی وارد بر سیم اول را که از میدان ناشی می‌شود، به دست آورید.

اکنون، با استفاده از این روش می‌توان نیرویی را که جریان گذرنده از سیم b به سیم حامل جریان a وارد می‌کند، حساب کرد. در اینجا در می‌یابیم که جهت این نیرو به سمت سیم b است. پس، دو سیم موازی حامل جریان‌های همسو یکدیگر را جذب می‌کنند. به همین ترتیب، اگر جریان‌ها در دو سیم ناهمسو باشند، می‌توان نشان داد که دو سیم یکدیگر را دفع می‌کنند. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که:

> ◀ سیم‌های موازی حامل جریان‌های همسو یکدیگر را جذب و سیم‌های موازی حامل جریان‌های ناهمسو یکدیگر را دفع می‌کنند.

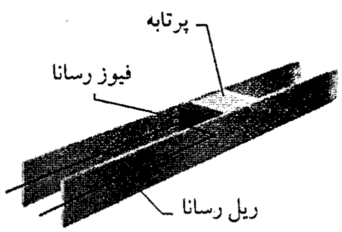
نیروی مؤثر در بین دو سیم موازی حامل جریان اساس تعریف آمپر است، که یکی از هفت یکای اصلی SI است. این تعریف که در سال ۱۹۴۶/۱۳۲۵ پذیرفته شده چنین است:

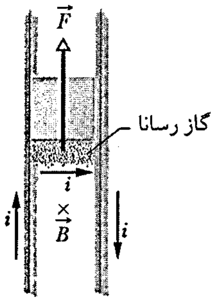
آمپر، جریان ثابتی است که اگر از دو سیم مستقیم موازی به طول بی‌نهایت و سطح مقطع دایره‌ای ناچیز، به فاصلهٔ یک متر از هم در خلاء بگذرد، میان سیم‌ها برای هر متر طول نیرویی برابر با 2×10^{-7} نیوتون ایجاد می‌شود.

تفنگ ریلی

تفنگ ریلی وسیله‌ای است که در آن یک نیروی مغناطیسی در مدتی کوتاه می‌تواند پرتابه‌ای را تا تندی‌های بالا شتاب دهد. اساس کار تفنگ ریلی در شکل ۳۰ـ۱۰ الف، نشان داده شده است. در این وسیله به یکی از دو ریل رسانای موازی جریان زیادی وارد می‌شود. این جریان پس از عبور از یک «فیوز» رسانای عرضی (مانند قطعه‌ای باریک از مس) واقع در بین ریل‌ها، از طریق ریل دیگر به چشمهٔ جریان بر می‌گردد. پرتابه‌ای که باید شلیک شود به وجه جلوی فیوز تکیه و به صورت تقریباً شُل در بین ریل‌ها قرار می‌گیرد. پس از برقرار شدن جریان عنصر فیوز بی‌درنگ بخار می‌شود و یک گاز رسانا در میان ریل‌ها و در محل فیوز، تولید می‌کند.

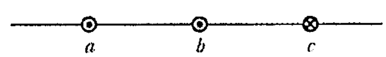
کاربرد قاعدهٔ دست راست پیچ‌خورده ـ مستقیم شکل ۳۰ـ۴، نشان می‌دهد که جهت میدان‌های مغناطیسی حاصل از جریان‌های ریل‌های شکل ۳۰ـ۱۰ الف، در بین ریل‌ها به سمت پایین است. میدان مغناطیسی برایند $\vec{B}$ به خاطر عبور جریان i از گاز (شکل ۳۰ـ۱۰ ب) به آن یک نیروی $\vec{F}$ وارد می‌کند. با استفاده از معادلهٔ ۳۰ـ۱۴ و قاعدهٔ دست راست برای حاصل‌ضرب برداری معلوم می‌شود که $\vec{F}$ در طول ریل‌ها و به سمت بیرون است. گاز در حین رانده شدن در طول ریل‌ها به سمت بیرون پرتابه را می‌راند و به آن شتاب زیادی تا حد $5\times10^6 g$ می‌دهد و آنگاه در حالی که همهٔ این مرحله‌ها ۱ms طول می‌کشد، گاز پرتابه را با تندی ۱۰km/s پرتاب می‌کند.





شکل ۳۰ـ۱۰ (الف) نمودار یک تفنگ ریلی، وقتی که جریان i از آن عبور می‌کند. این جریان باعث می‌شود فیوز رسانا به سرعت تبخیر شود. (ب) این جریان در بین ریل‌ها میدان مغناطیسی $\vec{B}$ را تولید می‌کند، و میدان باعث می‌شود به گاز رسانا، که بخشی از مسیر جریان است، نیروی $\vec{F}$ وارد شود. گاز پرتابه را در راستای ریل‌ها به پیش می‌راند و آن را پرتاب می‌کند.

خودآزمایی ۲: شکل زیر، سه سیم مستقیم دراز موازی با فاصلهٔ یکسان را نشان می‌دهد که از آنها یک جریان مشابه در درون سو یا برون سوی صفحهٔ شکل می‌گذرد. این سیم‌ها را با توجه به بزرگی نیروی وارد بر هر یک از آنها که از سوی جریان‌های دو سیم دیگر ناشی می‌شود، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



۳۰ـ۳ قانون آمپر

میدان الکتریکی برایند ناشی از هر توزیع بار را می‌توان با کاربرد قانون عکس مجذوری مربوط به میدان دیفرانسیلی $d\vec{E}$ (معادلهٔ ۳۰ـ۲)، پیدا کرد، اما اگر توزیع بار پیچیده باشد، باید از یک رایانه استفاده کرد. در عین حال یادآوری می‌شود که اگر توزیع بار دارای تقارن صفحه‌ای، استوانه‌ای، یا کروی باشد، میدان الکتریکی برایند را با زحمت کمتری می‌توان با استفاده از قانون گاؤس به دست آورد.

به همین ترتیب، میدان مغناطیسی برایند ناشی از هر توزیع جریان را هم با استفاده از قانون عکس مجذوری مربوط به میدان دیفرانسیلی $d\vec{B}$ (معادلهٔ ۳۰ـ۵)، می‌توان پیدا کرد. در اینجا هم برای توزیع پیچیدهٔ جریان مجبوریم از رایانه استفاده کنیم. اما اگر توزیع جریان دارای تقارن باشد، برای تعیین میدان مغناطیسی ممکن است با زحمت کمتری بتوانیم **قانون آمپر** را به کار ببریم. این قانون، که می‌تواند از قانون بیو ـ ساوار استنتاج شود، به طریق مرسوم به نام **آندره ماری آمپر**[1] (۱۸۳۶/۱۲۱۵ـ۱۷۷۵/۱۱۵۴) ثبت شده و یکای SI جریان نیز به نام اوست. در واقع، این قانون توسط جیمز کلرک ماکسول، فیزیکدان انگلیسی، تکامل یافته است.

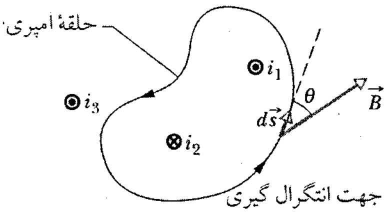
قانون آمپر با فرمول زیر بیان می‌شود

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{enc} \quad \text{(قانون آمپر)} \quad (۳۰\text{ـ}۱۶)$$

در اینجا حلقهٔ روی نشانهٔ انتگرال به این معناست که انتگرال حاصل‌ضرب نرده‌ای (یا نقطه‌ای) $\vec{B}\cdot d\vec{s}$ باید روی پیرامون یک حلقهٔ بسته، به نام حلقهٔ آمپری، گرفته شود. جریان i_{enc} در طرف راست معادله، جریان خالص احاطه شده توسط آن حلقه است.

1. André Marie Ampère

برای درک معنای حاصل‌ضرب نرده‌ای $\vec{B}.\vec{ds}$ و انتگرال آن، نخست قانون آمپر را برای شرایط کلی شکل ۳۰-۱۱ به کار می‌بریم. این شکل مقطع‌های سه سیم دراز مستقیم را نشان می‌دهد که از آنها جریان‌های i_1، i_2 و i_3 در درون سو یا برون سوی صفحهٔ شکل می‌گذرند. حلقهٔ آمپری اختیاری واقع در صفحهٔ شکل شامل دو جریان است، اما جریان سوم را در برنمی‌گیرد. جهت پادساعتگرد مشخص شده در حلقه جهت اختیاری انتخاب شده برای انتگرال‌گیری در معادلهٔ ۳۰-۱۶ را نشان می‌دهد.



شکل ۳۰-۱۱ نمایش کاربرد قانون آمپر در مورد یک حلقهٔ آمپری اختیاری، که دو سیم دراز مستقیم در درون و سیم سومی در بیرون آن قرار گرفته است. به جهت جریان‌ها توجه کنید.

برای استفاده از قانون آمپر، حلقه را در ذهن خود به عنصرهای برداری دیفرانسیلی $\vec{ds}$، که همه جا بر حلقه مماس و در جهت انتگرال‌گیری هستند، تقسیم می‌کنیم، فرض کنید در محل عنصر $\vec{ds}$ نشان داده شده در شکل ۳۰-۱۱، میدان مغناطیسی برایند ناشی از سه جریان، $\vec{B}$ است. چون سیم‌ها بر صفحهٔ شکل عمودند، می‌دانیم که میدان مغناطیسی ناشی از هر جریان در محل $\vec{ds}$ در صفحهٔ شکل ۳۰-۱۱ قرار دارد؛ بنابراین، میدان مغناطیسی برایند $\vec{B}$ در محل $\vec{ds}$ هم باید در این صفحه واقع شود. اما نمی‌دانیم سمتگیری $\vec{B}$ در این صفحه چگونه است. در شکل ۳۰-۱۱، $\vec{B}$ به اختیار تحت زاویهٔ θ نسبت به $\vec{ds}$ رسم شده است.

حاصل‌ضرب نرده‌ای $\vec{B}.\vec{ds}$ در طرف چپ معادلهٔ ۳۰-۱۶ برابر است با $B\cos\theta ds$. بنابراین، قانون آمپر را می‌توان چنین نوشت:

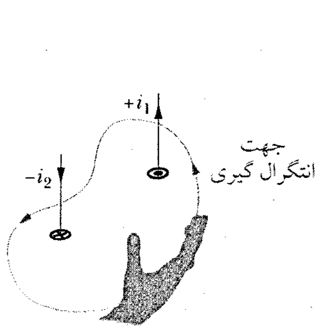
$$\oint \vec{B}.\vec{ds} = \oint B\cos\theta ds = \mu_0 i_{\text{enc}} \qquad (۳۰\text{-}۱۷)$$

اکنون می‌توانیم ضرب نرده‌ای $\vec{B}.\vec{ds}$ را به صورت حاصل‌ضرب طول ds از حلقهٔ آمپری در $B\cos\theta$، مؤلفه مماس بر حلقهٔ میدان، در نظر بگیریم. در این صورت، انتگرال‌گیری را می‌توان به صورت جمع کردن تمام حاصل‌ضرب‌ها در کل طول حلقه بیان کرد.

وقتی این انتگرال‌گیری را می‌توانیم در عمل انجام دهیم نیازی به دانستن جهت $\vec{B}$ پیش از انتگرال‌گیری نداریم. در این حالت، به اختیار فرض می‌کنیم که $\vec{B}$ باید به طور کلی در جهت انتگرال‌گیری (مانند شکل ۳۰-۱۱) باشد. سپس، برای نسبت دادن علامت مثبت یا منفی به هر یک از جریان‌های سهیم در ایجاد جریان خالص احاطه شدهٔ i_{enc}، قاعدهٔ دست راست پیچ‌خورده ـ مستقیم زیر را به کار می‌بریم:

◄ اگر دست راست خود را حول حلقهٔ آمپری طوری بپیچید که انگشت‌های شما در جهت انتگرال‌گیری قرار گیرد، علامت جریان گذرنده از حلقه در جهت انگشت شست به حالت کشیده مثبت و علامت جریان گذرنده در جهت مخالف منفی خواهد بود.

اکنون، معادلهٔ ۳۰-۱۷ را برای تعیین بزرگی $\vec{B}$ حل می‌کنیم. اگر حاصل برای B مثبت باشد جهت فرض شده برای $\vec{B}$ درست است. اما اگر حاصل منفی باشد، علامت منفی را نادیده می‌گیریم و $\vec{B}$ را در جهت مخالف رسم می‌کنیم.



شکل ۳۰-۱۲ نمایش کاربرد قاعدهٔ دست راست مربوط به قانون آمپر برای تعیین علامت جریان‌های محصور شده در یک حلقهٔ آمپری. وضعیت در اینجا مانند شکل ۳۰-۱۱ است.

در شکل ۳۰-۱۲، قاعدهٔ پیچ‌خورده ـ مستقیم را برای قانون آمپر در وضعیت شکل ۳۰-۱۱، به کار می‌بریم. با توجه به جهت پادساعتگرد نشان داده شده برای انتگرال‌گیری، جریان خالص احاطه شده توسط حلقه برابر است با:

$$i_{\text{enc}} = i_1 - i_2$$

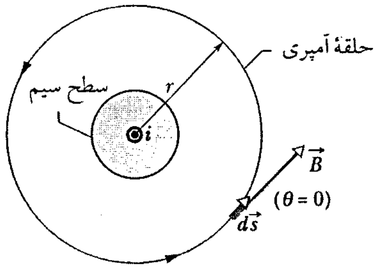
(جریان i_3 توسط حلقه احاطه نشده است). بنابراین معادلهٔ ۳۰-۱۷ را می‌توان دوباره چنین نوشت:

$$\oint B\cos\theta ds = \mu_0 (i_1 - i_2) \qquad (۳۰\text{-}۱۸)$$

حتماً از خود می‌پرسید که چرا جریان i_3، با آنکه در بزرگی میدان مغناطیسی B، واقع در طرف چپ معادلهٔ ۳۰-۱۸ سهیم است، نیازی به وجودش در طرف راست آن معادله نیست. پاسخ این است که سهم جریان i_3 در میدان مغناطیسی بدین جهت حذف شده که در معادلهٔ ۳۰-۱۸ انتگرال‌گیری روی پیرامون حلقهٔ کامل صورت گرفته است. در مقابل، سهم جریان احاطه شده در میدان مغناطیسی از میان نمی‌رود.

بزرگی میدان مغناطیسی B را با استفاده از معادلهٔ ۳۰ـ۱۸ نمی‌توان به دست آورد، زیرا در وضعیت شکل ۳۰ـ۱۱، اطلاعات کافی برای ساده کردن و حل کردن انتگرال نداریم. با وجود این، نتیجهٔ انتگرال‌گیری را می‌دانیم؛ این نتیجه باید با مقدار $\mu_0(i_1-i_2)$، که جریان خالص گذرنده از حلقه است، برابر باشد.

اکنون، می‌توانیم قانون آمپر را برای دو وضعیت زیر که در آنها تقارن ساده‌سازی و حل کردن انتگرال را امکان‌پذیر می‌سازد، به کار ببریم و در نتیجه، میدان مغناطیسی را به دست آوریم.



شکل ۳۰ـ۱۳ نمایش کاربرد قانون آمپر برای تعیین میدان مغناطیسی ناشی از جریان i در یک سیم مستقیم دراز. حلقهٔ آمپری دایره‌ای هم‌مرکز است که سیم را احاطه کرده است.

میدان مغناطیسی در بیرون یک سیم مستقیم دراز حامل جریان

شکل ۳۰ـ۱۳، مقطع یک سیم مستقیم دراز حامل جریان i را نشان می‌دهد که در آن جریان در برون سوی صفحهٔ شکل است. معادلهٔ ۳۰ـ۶ نشان می‌دهد که بزرگی میدان مغناطیسی $\vec{B}$ ناشی از جریان در تمام نقطه‌های به فاصلهٔ مساوی r از سیم، یکسان است؛ یعنی، میدان $\vec{B}$ حول سیم دارای تقارن استوانه‌ای است. اگر سیم با یک حلقهٔ آمپری دایره‌ای هم‌مرکز به شعاع r، مطابق شکل ۳۰ـ۱۳، احاطه شود با استفاده از مزیت تقارن می‌توان انتگرال موجود در قانون آمپر (معادله‌های ۳۰ـ۱۶ و ۳۰ـ۱۷) را ساده کرد. در این صورت، میدان مغناطیسی $\vec{B}$ در هر نقطه از حلقه دارای بزرگی یکسان B است. اگر انتگرال‌گیری را در جهت پادساعتگرد انجام دهیم، $d\vec{s}$ دارای جهت نشان داده شده در شکل ۳۰ـ۱۳ خواهد بود.

با توجه به اینکه $\vec{B}$ در هر نقطه‌ای در طول حلقه، مانند $d\vec{s}$، بر حلقه مماس است کمیت $B\cos\theta$ در معادلهٔ ۳۰ـ۱۷ را می‌توان ساده کرد. بنابراین، $\vec{B}$ و $d\vec{s}$ در هر نقطه از حلقه همسو یا ناهمسوی‌اند و به اختیار می‌توانیم حالت همسو را در نظر بگیریم. پس، در هر نقطه، زاویهٔ θ میان $d\vec{s}$ و $\vec{B}$ صفر است و در نتیجه، داریم $\cos\theta=\cos 0°=1$. بنابراین، انتگرال معادلهٔ ۳۰ـ۱۷ به صورت زیر در می‌آید

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \oint B\cos\theta\, ds = B \oint ds = B(2\pi r)$$

توجه کنید که انتگرال $\oint ds$ در بالا برابر با مجموع تمام پاره‌خط‌های ds حول حلقهٔ دایره‌ای است، که به آسانی محیط حلقه $2\pi r$، را به دست می‌دهد.

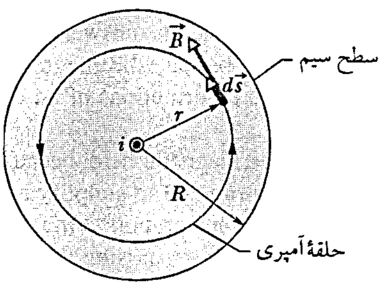
طبق قاعدهٔ دست راست علامت جریان در شکل ۳۰ـ۱۳ مثبت است. پس، طرف راست معادلهٔ قانون آمپر برابر با $+\mu_0 i$ است و داریم

$$B(2\pi r) = \mu_0 i$$

یا

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \qquad (۳۰ـ۱۹)$$

با اندکی تغییر در نمادگذاری متوجه می‌شویم که این، همان معادلهٔ ۳۰ـ۶ است، که پیش از این با کوشش بیشتر و با استفاده از قانون بیو و ساوار به دست آمده بود. علاوه بر این، چون میدان B مثبت است، در می‌یابیم که جهت درست $\vec{B}$ باید همان جهت نشان داده شده در شکل ۳۰ـ۱۳ باشد.



شکل ۳۰ـ۱۴ نمایش کاربرد قانون آمپر برای تعیین میدان مغناطیسی ناشی از جریان i در درون یک سیم مستقیم دراز با مقطع دایره‌ای. جریان در سطح مقطع سیم به‌طور یکنواخت توزیع شده و در برون سوی صفحهٔ شکل است. در درون سیم یک حلقهٔ آمپری رسم شده است.

میدان مغناطیسی در درون یک سیم مستقیم دراز حامل جریان

شکل ۳۰ـ۱۴، مقطع یک سیم مستقیم دراز به شعاع R را نشان می‌دهد که حامل جریان با توزیع یکنواخت i، در برون سوی صفحهٔ شکل است. چون جریان در سطح مقطع سیم به طور یکنواخت توزیع شده است باید $\vec{B}$، میدان مغناطیسی حاصل از آن تقارن استوانه‌ای داشته باشد. بنابراین، برای تعیین میدان مغناطیسی در نقاط درونی سیم باز هم می‌توانیم، مطابق شکل ۳۰ـ۱۴، از حلقهٔ آمپری به شعاع r، که در آن $r<R$، استفاده کنیم. تقارن نشان می‌دهد که $\vec{B}$، مطابق شکل، بر حلقه مماس است. پس، برای طرف چپ معادلهٔ قانون آمپر، داریم

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = B \oint ds = B(2\pi r) \qquad (۳۰ـ۲۰)$$

برای پیدا کردن طرف راست معادلهٔ قانون آمپر، باید توجه داشت که چون توزیع جریان یکنواخت است جریان

احاطه شده توسط حلقه i_{enc}، با مساحت سطح احاطه شده متناسب است؛ یعنی

$$i_{enc} = i\,\frac{\pi r^2}{\pi R^2} \qquad (۳۰\text{-}۲۱)$$

با توجه به قاعدهٔ دست راست علامت i_{enc} مثبت است. بنابراین، با استفاده از قانون آمپر، داریم

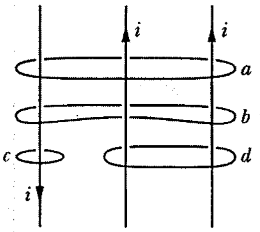
$$B(2\pi r) = \mu_0 i\,\frac{\pi r^2}{\pi R^2}$$

یا

$$B = \left(\frac{\mu_0 i}{2\pi R^2}\right) r \qquad (۳۰\text{-}۲۲)$$

بنابراین، در درون سیم، B، بزرگی میدان مغناطیسی با r متناسب است؛ بزرگی میدان در مرکز سیم صفر و در سطح به ازای $r=R$، بیشینه است. توجه کنید که با معادله‌های ۳۰-۱۹ و ۳۰-۲۲ به ازای $r=R$، برای B مقدار یکسانی به دست می‌آید؛ یعنی، رابطه‌های مربوط به میدان مغناطیسی در بیرون و در درون سیم برای سطح سیم نتیجهٔ یکسانی به دست می‌دهند.

خودآزمایی ۳: شکل زیر، سه سیم حامل جریان یکسان i (دو جریان همسو و یک جریان ناهمسو) و چهار حلقهٔ آمپری را نشان می‌دهد. این حلقه‌ها را با توجه به بزرگی $\oint \vec{B}\cdot d\vec{s}$ در طول هر حلقه، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.

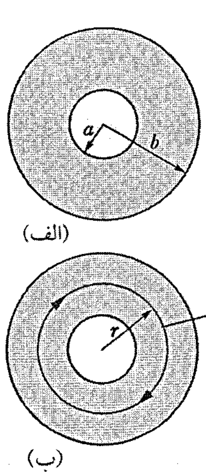


مسألهٔ نمونهٔ ۳۰-۳

شکل ۳۰-۱۵ الف، مقطع یک استوانهٔ رسانای دراز با شعاع درونی $a=2.0\,\text{cm}$ و شعاع بیرونی $b=4.0\,\text{cm}$ را نشان می‌دهد. استوانه حامل جریانی در برون سوی صفحهٔ شکل است و چگالی جریان در مقطع آن از رابطهٔ $J=cr^2$ به دست می‌آید، که $c=3.0\times10^6\,\text{A/m}^4$ و r برحسب متر است. میدان مغناطیسی $\vec{B}$ در نقطه‌ای به فاصلهٔ $3.0\,\text{cm}$ از محور استوانه چیست؟

حل: نقطه‌ای که در آن محاسبهٔ $\vec{B}$ مورد نظر است در درون مادهٔ استوانهٔ رسانا، در میان شعاع‌های درونی و بیرونی قرار دارد. توجه کنید که توزیع جریان دارای تقارن استوانه‌ای است (جریان در تمام نقاط مقطع با یک شعاع معین، یکسان است). بنابراین، در اینجا **نکتهٔ کلیدی** این است که به خاطر وجود تقارن، برای تعیین $\vec{B}$ در هر نقطه می‌توان از قانون آمپر استفاده کرد. نخست حلقهٔ آمپری نشان داده شده در شکل ۳۰-۱۵ ب را رسم می‌کنیم. این حلقه با استوانه هم‌مرکز و دارای شعاع $r=3.0\,\text{cm}$، است. می‌خواهیم $\vec{B}$ را در این فاصله از محور استوانه پیدا کنیم.

اکنون، باید i_{enc}، جریان احاطه شده توسط حلقهٔ آمپری را حساب کنیم. اما **نکتهٔ کلیدی** دوم این است که ما نمی‌توانیم از تناسبی مانند معادلهٔ ۳۰-۲۱ استفاده کنیم، زیرا جریان در مقطع استوانه به طور یکنواخت توزیع نشده



شکل ۳۰-۱۵ مسألهٔ نمونهٔ ۳۰-۳. (الف) نمودار مقطع یک استوانهٔ رسانا به شعاع درونی a و شعاع بیرونی b. (ب) نمودار یک حلقهٔ آمپری به شعاع r، که برای محاسبهٔ میدان مغناطیسی در نقاط واقع در فاصلهٔ r از محور استوانه رسم شده‌است.

است. در این حالت، با دنبال کردن روش مسألهٔ نمونهٔ ۲۷-۲ ب، باید از چگالی جریان از شعاع درونی استوانه a، تا شعاع حلقه r، انتگرال بگیریم:

$$i_{enc} = \int J dA = \int_a^r c r^2 (2\pi r\, dr)$$

$$i_{enc} = 2\pi c \int_a^r r^3 dr = 2\pi c \left[\frac{r^4}{4}\right]_a^r \Rightarrow$$

$$i_{enc} = \frac{\pi c (r^4 - a^4)}{2}$$

جهت (اختیاری) انتگرال‌گیری نشان داده شده در شکل ۳۰-۱۵ ب، ساعتگرد است. با کاربرد قاعدهٔ دست راست برای قانون آمپر در مورد حلقهٔ مورد نظر، در می‌یابیم که باید i_{enc} را منفی بگیریم، چون جریان در برون سوی صفحهٔ شکل است، در حالی که انگشت شست در درون سوی صفحهٔ شکل است.

اکنون، طرف چپ معادلهٔ قانون آمپر را دقیقاً مانند آنچه در شکل ۳۰-۱۴ انجام شده است، حساب می‌کنیم و بار دیگر معادلهٔ ۳۰-۲۰ را به دست می‌آوریم. در این صورت، با استفاده از قانون آمپر:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{enc}$$

داریم

$$B(2\pi r) = -\frac{\mu_0 \pi c}{2}(r^4 - a^4)$$

این معادله را نسبت به B حل و داده‌های معلوم را جانشانی می‌کنیم:

$$B = -\frac{\mu_0 c}{4r}(r^4 - a^4)$$

$$B = -\frac{(4\pi\times 10^{-7}\,\mathrm{T.m/A})(3.0\times 10^{6}\,\mathrm{A/m^4})}{4(0.030\,\mathrm{m})} \times [(0.030\,\mathrm{m})^4 - (0.020\,\mathrm{m})^4] = -2.0\times 10^{-5}\,\mathrm{T}$$

بنابراین، بزرگی میدان مغناطیسی $\vec{B}$ در نقطه‌ای به فاصلهٔ ۳٫۰cm از محور استوانه برابر است با:

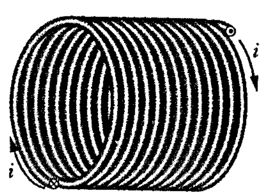
$$B = 2.0\times 10^{-5}\,\mathrm{T}$$ **(پاسخ)**

جهت خط‌های میدان مغناطیسی برخلاف جهت انتگرال‌گیری، یعنی پادساعتگرد، در شکل ۳۰-۱۵ ب است.

۳۰-۴ سیملوله‌ها و چنبره‌ها

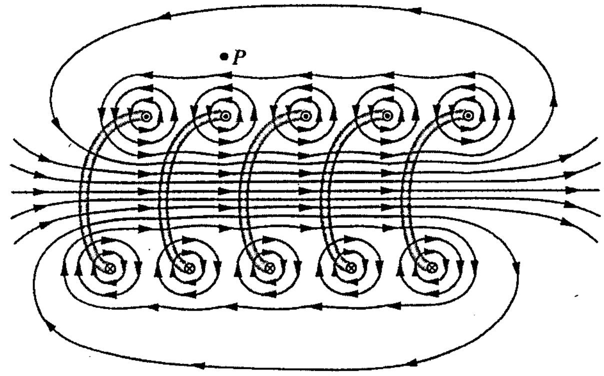
میدان مغناطیسی سیملوله

اکنون، به وضعیت دیگری که کاربرد قانون آمپر را مفید جلوه می‌دهد توجه می‌کنیم. این وضعیت مربوط به میدان مغناطیسی ناشی از جریان سیم‌های تنگ هم پیچیده در یک پیچهٔ دراز است. چنین پیچه‌ای را **سیملوله** می‌نامند (شکل ۳۰-۱۶). در اینجا فرض می‌کنیم که طول سیملوله در مقایسه با قطر آن بسیار زیاد است.



شکل ۳۰-۱۶ نمودار یک سیملولهٔ حامل جریان i.

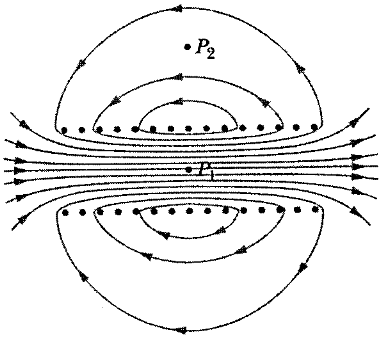
شکل ۳۰-۱۷، بخشی از یک سیملوله «امتداد دار» را نشان می‌دهد. میدان مغناطیسی سیملوله برابر با جمع برداری میدان‌های ناشی از هر کدام از دورهای (حلقه‌های) سیم تشکیل دهندهٔ سیملوله است. در نقاط نزدیک به هر دور پیچه سیم از نظر مغناطیسی تقریباً مانند یک سیم مستقیم دراز رفتار می‌کند و خط‌های میدان $\vec{B}$ تقریباً دایره‌هایی هم‌مرکزند. شکل ۳۰-۱۷ نشان می‌دهد که میدان‌ها در میان دورهای سیم‌ها میل به خنثی کردن



شکل ۳۰-۱۷ نمایش مقطع قائم گذرنده از محور یک سیملولهٔ «امتداد دار». بخش‌های پشتی پنج دور و هم‌چنین خط‌های میدان مغناطیسی ناشی از جریان گذرنده از سیملوله نشان داده شده‌اند. هر دور سیم در نقاط نزدیک خود خط‌های میدان مغناطیسی دایره‌ای تولید می‌کند. در نزدیکی محور سیملوله خط‌های میدان با هم به صورت میدان مغناطیسی برایند ترکیب می‌شوند و در راستای محور هستند. نزدیک به هم بودن میدان معرف یک میدان مغناطیسی قوی است. در بیرون سیملوله، فاصلهٔ خط‌های میدان از هم زیاد و در آنجا میدان بسیار ضعیف است.

یکدیگر دارند. هم‌چنین، شکل نشان می‌دهد که در نقاط درونی سیملوله و در فاصله‌های به نسبت دور از سیم‌ها، $\vec{B}$ تقریباً با محور (مرکزی) سیملوله موازی است. در حالت حدی مربوط به یک سیملولهٔ آرمانی، که بی‌نهایت دراز و شامل سیم‌های با مقطع مربع و تنگ هم (چسبیده به هم) پیچیده شده است، میدان مغناطیسی در درون پیچه یکنواخت و با محور سیملوله موازی است.

در نقاط بالای سیملوله، مانند نقطهٔ P در شکل ۳۰-۱۷، میدان ناشی از بخش‌های بالایی دورهای سیملوله (مشخص شده با نشانهٔ ⊙) به سمت چپ است (چنانکه در نزدیکی نقطهٔ P رسم شده است) و میل دارد میدان ناشی از بخش‌های پایینی دورهای سیملوله (مشخص شده با نشانهٔ ⊗) را که به سمت راست است (و رسم نشده است)، خنثی کند. در حالت حدی یک سیملولهٔ آرمانی، میدان مغناطیسی در بیرون سیملوله صفر است. صفر انگاشتن میدان بیرونی فرض بسیار خوبی برای یک سیملولهٔ حقیقی است، به شرط آنکه طول سیملوله خیلی زیادتر از قطرش باشد و نقاط بیرونی مورد نظر، مانند نقطهٔ P، دور از دو انتهای سیملوله باشند. جهت میدان مغناطیسی در طول محور سیملوله با قاعدهٔ دست راست پیچ خورده ـ مستقیم مشخص می‌شود: اگر سیملوله را در دست راست خود طوری بگیرید که انگشت‌ها در جهت جریان سیم پیچ‌ها باشند، در این صورت، انگشت شست به حالت کشیده، جهت میدان مغناطیسی محوری را نشان خواهد داد.



شکل ۳۰-۱۸ نمودار خط‌های میدان مغناطیسی مربوط به یک سیملولهٔ حقیقی با طول متناهی. میدان مغناطیسی در نقاط درونی سیملوله، مانند نقطهٔ P_1، قوی و یکنواخت و در نقاط بیرونی مانند نقطهٔ P_2، نسبتاً ضعیف است.

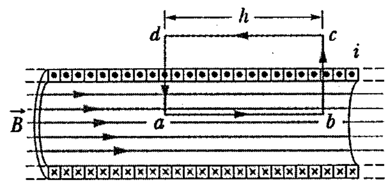
شکل ۳۰-۱۸، خط‌های میدان مغناطیسی $\vec{B}$ را برای یک سیملولهٔ حقیقی نشان می‌دهد. فاصلهٔ میان خط‌های $\vec{B}$ در ناحیهٔ مرکزی نشان می‌دهد که میدان در درون و در سرتاسر مقطع پیچه نسبتاً قوی و یکنواخت است. اما میدان بیرونی نسبتاً ضعیف است. اکنون، از قانون آمپر:

$$\oint \vec{B}.\vec{ds} = \mu_\circ i_{\text{enc}} \qquad (۳۰\text{-}۲۳)$$

برای حلقهٔ آمپری مستطیل شکل $abcda$ در سیملولهٔ آرمانی شکل ۳۰-۱۹، که در آن میدان $\vec{B}$ در درون سیملوله یکنواخت و در بیرون آن صفر است، استفاده می‌کنیم. انتگرال $\oint \vec{B}.\vec{ds}$ را به صورت مجموع چهار انتگرال، برای هر بخش حلقه یک انتگرال، می‌نویسیم:

$$\oint \vec{B}.\vec{ds} = \int_a^b \vec{B}.\vec{ds} + \int_b^c \vec{B}.\vec{ds} + \int_c^d \vec{B}.\vec{ds} + \int_d^a \vec{B}.\vec{ds} \qquad (۳۰\text{-}۲۴)$$

مقدار انتگرال اول در طرف راست معادلهٔ ۳۰-۲۴ برابر با Bh است، که B بزرگی میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ در درون سیملوله و h طول مسیر (اختیاری) از a تا b است. انتگرال‌های دوم و چهارم صفر هستند، زیرا برای هر عنصر ds از این بخش‌ها، $\vec{B}$ بر $\vec{ds}$ عمود یا صفر است، و از این رو، حاصل‌ضرب $\vec{B}.\vec{ds}$ صفر است. انتگرال سوم که در طول بخش واقع در بیرون سیملوله گرفته می‌شود صفر است، زیرا در تمام نقاط بیرونی، داریم $B=\circ$. بنابراین، مقدار $\oint \vec{B}.\vec{ds}$ برای کل حلقهٔ مستطیل شکل برابر با Bh است.



شکل ۳۰-۱۹ نمایش کاربرد قانون آمپر در مورد بخشی از یک سیملولهٔ آرمانی دراز حامل جریان i. مربع مستطیل $abcd$ حلقهٔ آمپری را تشکیل می‌دهد.

جریان خالص احاطه شدهٔ i_{enc}، توسط حلقهٔ آمپری مستطیلی در شکل ۳۰-۱۹، با i، جریان گذرنده از سیم‌پیچ‌های سیملوله برابر نیست، زیرا تعداد دورهای سیم محصور شده در حلقه از یک بیشتر است. فرض می‌کنیم n تعداد دورهای سیم در یکای طول سیملوله باشد. در این صورت، حلقه شامل nh دور سیم است و می‌توان نوشت

$$i_{\text{enc}} = i(nh)$$

بنابراین، با استفاده از قانون آمپر، داریم

$$Bh = \mu_\circ inh$$

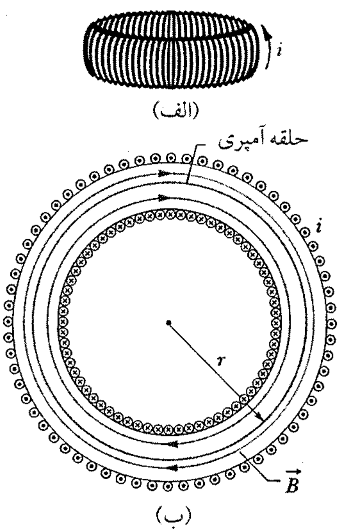
یا

$$B = \mu_\circ in \qquad \text{(سیملولهٔ آرمانی)} \qquad (۳۰\text{-}۲۵)$$

■

اگرچه معادلهٔ ۳۰-۲۵ برای یک سیملولهٔ آرمانی بی‌نهایت دراز به دست آمد، این معادله برای سیملوله‌های

حقیقی هم کاملاً صادق است، به شرط آنکه فقط برای نقاط درونی و دور از دو انتهای سیملوله مورد استفاده قرار گیرد. معادلهٔ ۳۰ـ۲۵، با این واقعیت تجربی سازگار است که بزرگی میدان مغناطیسی B، به قطر یا به طول سیملوله بستگی ندارد و در تمام نقاط مقطع سیملوله یکنواخت است. بنابراین، سیملوله وسیله‌ای عملی برای تولید میدان مغناطیسی یکنواخت و معین در کاربردهای آزمایشگاهی است، همان گونه که خازن صفحه ـ موازی وسیله‌ای عملی برای تولید میدان الکتریکی یکنواخت و معین است.



شکل ۳۰ـ۲۰ (الف) نمودار یک چنبرهٔ حامل جریان i. (ب) نمودار مقطع افقی چنبره. میدان مغناطیسی درونی (درون لوله‌ای به شکل تیوب باد شده) را می‌توان با به کار بستن قانون آمپر در مورد حلقهٔ آمپری نشان داده شده، به دست آورد.

میدان مغناطیسی چنبره

شکل ۳۰ـ۲۰ الف، یک **چنبره** را، که به صورت سیملولهٔ خم شده‌ای به شکل تیوب باد شدهٔ چرخ اتومبیل است، نشان می‌دهد. $\vec{B}$، میدان مغناطیسی تولید شده در نقاط درونی (درون بخش توخالی تیوب) چیست؟ میدان مغناطیسی را می‌توان با استفاده از قانون آمپر و نکات مربوط به تقارن به دست آورد.

با توجه به تقارن، ملاحظه می‌شود که در درون خطهای $\vec{B}$، مطابق شکل ۳۰ـ۲۰ ب، دایره‌های هم‌مرکز تشکیل می‌دهند. یکی از دایره‌های هم‌مرکز به شعاع r را به عنوان حلقهٔ آمپری انتخاب می‌کنیم و آن را به طور ساعتگرد دور می‌زنیم. با استفاده از قانون آمپر (معادلهٔ ۳۰ـ۱۶)، داریم

$$(B)(2\pi r) = \mu_0 iN$$

که در آن i جریان گذرنده از سیم‌پیچ‌های چنبره (که برای سیم‌پیچ‌های محصور شده توسط حلقهٔ آمپری مثبت است) و N تعداد کل دورهای سیم است. در نتیجه، داریم

$$B = \frac{\mu_0 iN}{2\pi}\frac{1}{r} \qquad \text{(چنبره)} \qquad (۳۰ـ۲۶)$$

برخلاف سیملوله، در نقاط مختلف مقطع چنبره B ثابت نیست. با استفاده از قانون آمپر به راحتی می‌توان نشان داد که در بیرون یک چنبرهٔ آرمانی (چنبره‌ای که از یک سیملولهٔ آرمانی ساخته شده باشد)، داریم $B=0$.

جهت میدان مغناطیسی در درون چنبره از قاعدهٔ دست راست پیچ خورده ـ مستقیم معین می‌شود: هرگاه چنبره را در دست راست خود طوری بگیرید که انگشت‌ها در جهت جریان سیم‌پیچ‌ها باشد، در این صورت انگشت شست به حالت کشیده جهت میدان مغناطیسی را نشان خواهد داد.

مسألهٔ نمونهٔ ۳۰ـ۴

سیملوله‌ای به طول $L=1{,}23\text{m}$ و قطر درونی $d=3{,}55\text{cm}$، حامل جریان $i=5{,}57\text{A}$ است. این سیملوله شامل پنج لایهٔ سیم تنگ هم پیچیده است که تعداد دورهای هر لایه در طول L برابر با ۸۵۰ است. مقدار B در مرکز این سیملوله چقدر است؟

حل: یک **نکتهٔ کلیدی** این است که B، بزرگی میدان مغناطیسی در مرکز سیملوله، مطابق معادلهٔ ۳۰ـ۲۵ به جریان سیملوله i، و تعداد دورهای سیم در یکای طول n، بستگی دارد. **نکتهٔ کلیدی** دیگر این است که B به قطر سیم‌پیچ‌ها بستگی ندارد. در نتیجه، مقدار n برای هر پنج لایه مشابه و پنج برابر مقدار آن برای یک لایه است. بنابراین، با استفاده از معادلهٔ ۳۰ـ۲۵، داریم

$$B = \mu_0 in = (4\pi\times10^{-7}\text{T.m/A})(5{,}57\text{A})\,\frac{5\times850\ \text{دور}}{1{,}23\text{m}} \Rightarrow$$

$$B = 2{,}42\times10^{-2}\text{T} = 24{,}2\text{mT} \qquad \text{(پاسخ)}$$

۳۰ـ۵ پیچهٔ حامل جریان به عنوان دوقطبی مغناطیسی

تا اینجا میدان مغناطیسی ناشی از جریان گذرنده از سیم مستقیم دراز، سیملوله، و چنبره را بررسی کردیم. اکنون، به مطالعهٔ میدان مغناطیسی ناشی از یک پیچهٔ حامل جریان می‌پردازیم. در بخش ۲۹ـ۹ دیدیم که یک پیچهٔ حامل جریان مانند یک دوقطبی مغناطیسی رفتار می‌کند، زیرا اگر پیچه را در میدان مغناطیسی خارجی $\vec{B}$ قرار دهیم به آن گشتاور نیروی $\vec{\tau}$، وارد می‌شود:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu}\times\vec{B} \qquad (۳۰ـ۲۷)$$

در این معادله $\vec{\mu}$، گشتاور دوقطبی مغناطیسی پیچه با بزرگی NiA است، که در آن N تعداد دورها (یا حلقه‌ها) ی سیم، i جریان گذرنده از هر دور، و A مساحت محصور شده توسط هر دور است.

یادآوری می‌شود که جهت $\vec{\mu}$ با استفاده از قاعدهٔ دست راست پیچ خورده ـ مستقیم معین می‌شود: هرگاه انگشت‌های پیچیدهٔ دست راست خود را در جهت جریان پیچه قرار دهید، انگشت شست به حالت کشیده جهت گشتاور دوقطبی، $\vec{\mu}$، را نشان خواهد داد.

میدان مغناطیسی یک پیچه

اکنون جنبهٔ دیگری از یک پیچهٔ حامل جریان به عنوان دوقطبی مغناطیسی را در نظر می‌گیریم. میدان مغناطیسی ناشی از دوقطبی مغناطیسی در فضای پیرامون دوقطبی چیست؟ در این مسأله تقارن کافی وجود ندارد که در آن استفاده از قانون آمپر مفید واقع شود. در نتیجه، باید قانون بیو و ساوار را به کار برد. برای سهولت کار، ابتدا یک پیچهٔ تک حلقه‌ای دایره‌ای و نقاط واقع بر محور مرکزی آن را، که منطبق بر محور z فرض می‌شود، در نظر می‌گیریم. بعداً نشان خواهیم داد که بزرگی میدان مغناطیسی در چنین نقاطی از معادلهٔ زیر به دست می‌آید

$$B(z) = \frac{\mu_0 i R^2}{2(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad (۲۸\text{-}۳۰)$$

که در آن R شعاع حلقهٔ دایره‌ای و z فاصلهٔ نقطهٔ مورد نظر تا مرکز حلقه است. علاوه بر این، جهت میدان مغناطیسی $\vec{B}$ همان جهت گشتاور دوقطبی مغناطیسی حلقه $\vec{\mu}$، است.

برای نقاط محوری دور از حلقه در معادلهٔ ۳۰-۲۸، داریم $z \gg R$. با این تقریب، معادلهٔ ۳۰-۲۸ به صورت زیر ساده می‌شود

$$B(z) \approx \frac{\mu_0 i R^2}{2z^3}$$

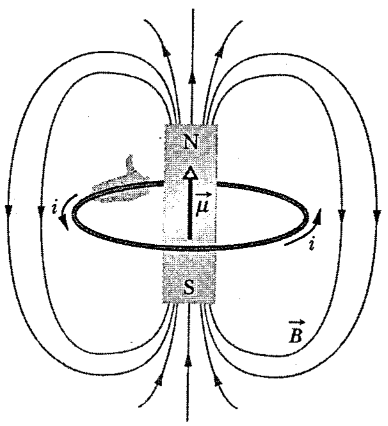
یادآوری می‌شود که πR^2 مساحت حلقه A، است و اگر نتیجهٔ بالا را برای یک حلقهٔ شامل N دور تعمیم دهیم معادلهٔ بالا به صورت زیر در می‌آید.

$$B(z) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{NiA}{z^3}$$

علاوه بر این، چون $\vec{B}$ و $\vec{\mu}$ همسوی‌اند، با استفاده از تساوی $\mu = NiA$، معادلهٔ بالا را می‌توان چنین نوشت:

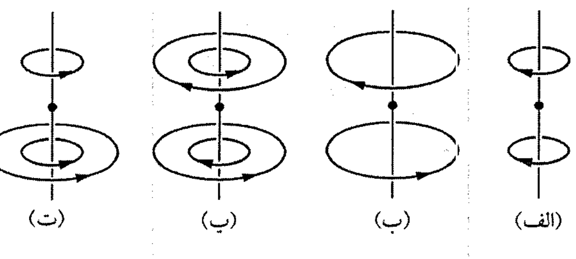
$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\vec{\mu}}{z^3} \qquad \text{(پیچهٔ حامل جریان)} \qquad (۲۹\text{-}۳۰)$$ ■

بنابراین، یک پیچهٔ حامل جریان را از دو راه می‌توان به عنوان یک دوقطبی مغناطیسی در نظر گرفت: (۱) به پیچهٔ واقع در یک میدان مغناطیسی خارجی گشتاور نیرو وارد می‌شود؛ (۲) برای نقاط دور واقع در طول محور، پیچه خود یک میدان مغناطیسی ذاتی تولید می‌کند، که از معادلهٔ ۳۰-۲۹ به دست می‌آید. شکل ۳۰-۲۱ میدان مغناطیسی یک حلقهٔ جریان را نشان می‌دهد؛ یک طرف حلقه مانند قطب شمال (سَر بردار $\vec{\mu}$) و طرف دیگر آن مانند قطب جنوب (دُم بردار $\vec{\mu}$) عمل می‌کند و در شکل ۳۰-۲۱ حلقه به صورت یک آهن‌ربا رسم شده است.

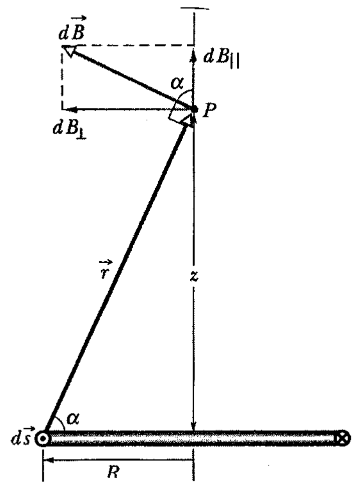


شکل ۳۰-۲۱ حلقهٔ جریان یک میدان مغناطیسی، مانند میدان مغناطیسی آهن‌ربای میله‌ای، تولید می‌کند و از این رو می‌توان به آن قطب‌های شمال و جنوب نسبت داد. جهت گشتاور دوقطبی مغناطیسی حلقه $\vec{\mu}$، که از قاعدهٔ دست راست پیچ‌خورده ـ مستقیم معین می‌شود، از قطب جنوب به سمت قطب شمال و در جهت میدان $\vec{B}$ است.

خودآزمایی ۴: شکل زیر، چهار آرایش از حلقه‌های دایره‌ای به شعاع r یا $2r$، را که حامل جریان‌های مشابه در جهت‌های مشخص شده هستند، نشان می‌دهد. مرکزهای این حلقه‌ها روی محورهای قائم (عمود بر حلقه‌ها) قرار دارند. این آرایش‌ها را با توجه به بزرگی میدان مغناطیسی برایند در محل خال سیاه، واقع در فاصلهٔ بین حلقه‌ها و روی محور مرکزی، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



اثبات معادلهٔ ۳۰ـ۲۸



شکل ۳۰ـ۲۲ نمودار یک حلقهٔ جریان به شعاع R. صفحهٔ حلقه بر صفحهٔ شکل عمود و فقط نیمهٔ پشتی حلقه نشان داده شده است. برای پیدا کردن میدان مغناطیسی در نقطهٔ P واقع بر محور مرکزی حلقه از قانون بیو و ساوار استفاده می‌کنیم.

شکل ۳۰ـ۲۲، نیمهٔ پشتی یک حلقهٔ دایره‌ای به شعاع R و حامل جریان i را نشان می‌دهد. نقطهٔ P را روی محور حلقه و به فاصلهٔ z از صفحهٔ حلقه در نظر می‌گیریم. اکنون قانون بیو و ساوار را در مورد عنصر دیفرانسیلی ds، واقع در طرف چپ حلقه، به کار می‌بریم. بردار طولی $d\vec{s}$ مربوط به این عنصر در برون سو و عمود بر صفحهٔ شکل است. θ، زاویهٔ میان $d\vec{s}$ و $\vec{r}$ در شکل ۳۰ـ۲۲، برابر با ۹۰ درجه است. صفحهٔ تشکیل شده از این دو بردار بر صفحهٔ شکل عمود و شامل هر دو بردار $\vec{r}$ و $d\vec{s}$ است. با توجه به قانون بیو و ساوار (و قاعدهٔ دست راست) $d\vec{B}$، میدان دیفرانسیلی حاصل از جریان این عنصر در نقطهٔ P، بر این صفحه عمود است و از این رو، در صفحهٔ شکل قرار دارد. این میدان، همان طور که شکل ۳۰ـ۲۲ نشان می‌دهد، بر $\vec{r}$ عمود است.

اکنون بردار $d\vec{B}$ را به صورت دو مؤلفهٔ $dB_{\|}$ در راستای محور حلقه، و $dB_{\perp}$ در راستای عمود محور تجزیه می‌کنیم. با توجه به وجود تقارن، جمع برداری تمام مؤلفه‌های عمودی $dB_{\perp}$ ناشی از تمام عنصرهای حلقه‌ای ds، صفر است. بنابراین، فقط مؤلفه‌های محوری $dB_{\|}$ باقی می‌مانند و داریم

$$B = \int dB_{\|}$$

برای عنصر $d\vec{s}$ در شکل ۳۰ـ۲۲، با استفاده از قانون بیو و ساوار (معادلهٔ ۳۰ـ۳) معلوم می‌شود که میدان مغناطیسی در فاصلهٔ r برابر است با:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{ids\sin 90^\circ}{r^2}$$

هم‌چنین، داریم

$$dB_{\|} = dB\cos\alpha$$

از ترکیب این دو رابطه، خواهیم داشت

$$dB_{\|} = \frac{\mu_0 i\cos\alpha ds}{4\pi r^2} \qquad (۳۰ـ۳۰)$$

شکل ۳۰ـ۲۲ نشان می‌دهد که r و α از هم مستقل نیستند و به هم وابسته‌اند. این دو کمیت را برحسب متغیر z، فاصلهٔ نقطهٔ P از مرکز حلقه، بیان می‌کنیم. در نتیجه، داریم

$$r = \sqrt{R^2 + z^2} \qquad (۳۰ـ۳۱)$$

و

$$\cos\alpha = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}} \qquad (۳۰ـ۳۲)$$

با جانشانی معادله‌های ۳۰ـ۳۱ و ۳۰ـ۳۲ در معادلهٔ ۳۰ـ۳۰، داریم

$$dB_{\|} = \frac{\mu_0 iR}{4\pi(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}ds$$

توجه کنید که مقادیر i، R و z برای تمام عنصرهای ds روی حلقه یکسان‌اند و در نتیجه، با انتگرال‌گیری از این معادله، داریم

$$B = \int dB_{\|} = \frac{\mu_0 iR}{4\pi(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\int ds$$

چون انتگرال $\int ds$ برابر با محیط حلقه $2\pi R$ است، خواهیم داشت

$$B(z) = \frac{\mu_0 iR^2}{2(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

این، همان معادلهٔ ۳۰ـ۲۸، یعنی رابطه‌ای است که در پی اثبات آن بودیم.

مرور و خلاصهٔ مطالب فصل

قانون بیو ـ ساوار میدان مغناطیسی ناشی از یک رسانای حامل جریان را می‌توان با استفاده از قانون بیو ـ ساوار به دست آورد. بنا به این قانون، عنصر میدان مغناطیسی $d\vec{B}$ ناشی از عنصر طول ـ جریان $id\vec{s}$ در نقطهٔ P، به فاصلهٔ r از عنصر جریان، برابر است با:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_\circ}{۴\pi}\frac{id\vec{s}\times\vec{r}}{r^۳} \qquad \text{(قانون بیو ـ ساوار)} \qquad (۵\text{-}۳۰)$$

در اینجا $\vec{r}$ برداری است که جهت آن از عنصر جریان به سمت نقطهٔ P است. کمیت $\mu_\circ$، که ثابت تراوایی نام دارد، دارای مقدار $۴\pi\times۱۰^{-۷}\text{T.m/A}\approx۱{,}۲۶\times۱۰^{-۶}\text{T.m/A}$ است.

میدان مغناطیسی یک سیم مستقیم دراز بزرگی میدان مغناطیسی در فاصلهٔ R از یک سیم مستقیم دراز حامل جریان i، طبق قانون بیو ـ ساوار برابر است با:

$$B = \frac{\mu_\circ i}{۲\pi R} \qquad \text{(سیم مستقیم دراز)} \qquad (۶\text{-}۳۰)$$

میدان مغناطیسی یک کمان دایره‌ای بزرگی میدان مغناطیسی در مرکز یک کمان دایره‌ای به شعاع R و زاویهٔ مرکزی ϕ (برحسب رادیان)، که حامل جریان i است، برابر است با:

$$B = \frac{\mu_\circ i\phi}{۴\pi R} \qquad \text{(در مرکز کمان دایره‌ای)} \qquad (۱۱\text{-}۳۰)$$

نیروی میان سیم‌های موازی حامل جریان سیم‌های موازی حامل جریان‌های همسو یکدیگر را جذب و سیم‌های موازی حامل جریان‌های ناهمسو یکدیگر را دفع می‌کنند. بزرگی نیروی وارد بر طول L از هر سیم، برابر است با:

$$F_{ba} = i_b L B_a \sin ۹۰^\circ = \frac{\mu_\circ L i_a i_b}{۲\pi d} \qquad (۱۵\text{-}۳۰)$$

که در آن d فاصلهٔ میان سیم‌هاست و i_a و i_b جریان‌های گذرنده از سیم‌ها هستند.

قانون آمپر قانون آمپر چنین بیان می‌شود:

$$\oint \vec{B}.d\vec{s} = \mu_\circ i_{\text{enc}} \qquad \text{(قانون آمپر)} \qquad (۱۶\text{-}۳۰)$$

در این معادله انتگرال خطی در طول یک حلقهٔ بسته به نام حلقهٔ آمپری، گرفته می‌شود. جریان i جریان خالص احاطه شده توسط حلقه است. برای محاسبهٔ میدان مغناطیسی ناشی از برخی توزیع‌های جریان، به کار بردن معادلهٔ ۳۰-۱۶ آسان‌تر از معادلهٔ ۳۰-۵ است.

میدان سیملوله و میدان چنبره در یک سیملولهٔ دراز حامل جریان i در نقاط درونی دور از دو انتهای سیملوله، بزرگی میدان مغناطیسی B، برابر است با:

$$B = \mu_\circ in \qquad \text{(سیملولهٔ آرمانی)} \qquad (۲۵\text{-}۳۰)$$

که در آن n تعداد دورهای سیم در یکای طول است. در نقاط درون یک چنبره بزرگی میدان مغناطیسی B، برابر است با:

$$B = \frac{\mu_\circ iN}{۲\pi}\frac{۱}{r} \qquad \text{(چنبره)} \qquad (۲۶\text{-}۳۰)$$

که در آن r فاصلهٔ نقطهٔ مورد نظر تا مرکز چنبره است.

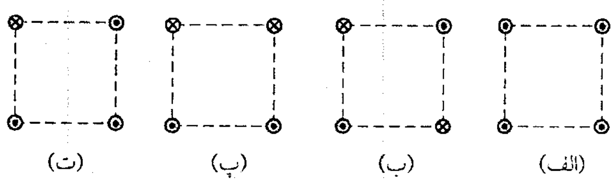
میدان دوقطبی مغناطیسی میدان مغناطیسی ناشی از یک پیچهٔ حامل جریان، که یک دوقطبی مغناطیسی است، در نقطهٔ P واقع بر محور مرکزی و به فاصلهٔ z از مرکز پیچه، در راستای محور است و از معادلهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_\circ}{۲\pi}\frac{\vec{\mu}}{z^۳} \qquad (۲۹\text{-}۳۰)$$

که در آن $\vec{\mu}$ گشتاور دوقطبی مغناطیسی پیچه است. این معادله تنها موقعی به‌کار می‌رود که z خیلی بزرگتر از ابعاد پیچه باشد.

پرسش‌ها

۱. شکل ۳۰-۲۳، چهار آرایش را نشان می‌دهد که در آن سیم‌های موازی دراز در گوشه‌های مربع‌های مشابه قرار گرفته‌اند و از آنها جریان‌های یکسان در درون سو یا در برون سوی صفحهٔ شکل عبور می‌کنند. این آرایش‌ها را با توجه به بزرگی میدان مغناطیسی برایند در مرکز مربع، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



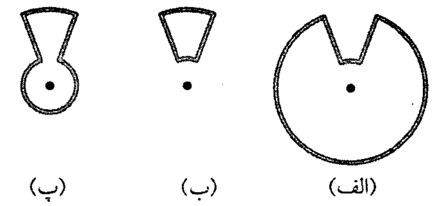
شکل ۳۰-۲۳ پرسش ۱.

۲. شکل ۳۰-۲۴، مقطع‌های دو سیم مستقیم دراز را نشان می‌دهد؛ سیم سمت چپ حامل جریان $i_۱$ در برون‌سوی صفحهٔ شکل است. می‌خواهیم میدان مغناطیسی برایند ناشی از دو جریان در نقطهٔ P صفر باشد. (الف) آیا جریان $i_۲$ در سیم سمت راست باید در درون سو یا برون سوی صفحهٔ شکل باشد، و (ب) آیا $i_۲$ نسبت به $i_۱$ باید بزرگتر، کوچکتر یا مساوی باشد؟



شکل ۳۰-۲۴ پرسش ۲.

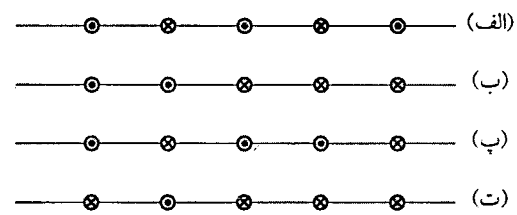
۳. شکل ۳۰-۲۵، سه مدار را نشان می‌دهد، که هر یک شامل دو کمان دایره‌ای هم‌مرکز، یکی به شعاع r و دیگری به شعاع بزرگتر R، و دو طول



شکل ۳۰ـ۲۵ پرسش ۳.

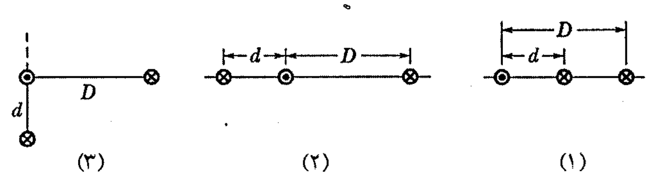
شعاعی هستند. در این مدارها جریان یکسانی برقرار است و زاویهٔ میان طول‌های شعاعی یکسان است. این مدارها را با توجه به بزرگی میدان مغناطیسی برایند در مرکز، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.

۴. شکل ۳۰ـ۲۶، چهار آرایش را نشان می‌دهد که در آنها سیم‌های دراز موازی و به فاصلهٔ مساوی از یکدیگر، حامل جریان‌های یکسان در درون سو یا در برون سوی صفحهٔ شکل هستند. این آرایش‌ها را با توجه به بزرگی نیروی برایند وارد بر سیم مرکزی از سوی جریان سیم‌های دیگر، از بیشترین تا کمترین مقدار مرتب کنید.



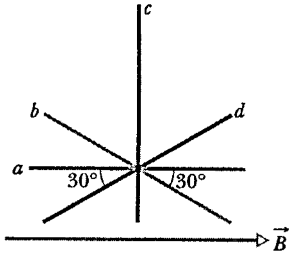
شکل ۳۰ـ۲۶ پرسش ۴.

۵. شکل ۳۰ـ۲۷، سه آرایش از سه سیم مستقیم دراز را نشان می‌دهد که حامل جریان‌های یکسان در درون سو یا در برون سوی صفحهٔ شکل هستند. (الف) این آرایش‌ها را با توجه به بزرگی نیروی برایند وارد بر سیم با جریان برون سوی صفحهٔ شکل از سوی جریان سیم‌های دیگر، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید. (ب) در آرایش ۳ آیا زاویهٔ میان نیروی برایند وارد بر این سیم و خط‌چین نسبت به ۴۵ درجه مساوی، کمتر یا بیشتر است؟



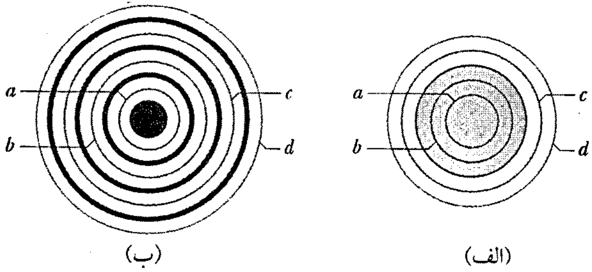
شکل ۳۰ـ۲۷ پرسش ۵.

۶. شکل ۳۰ـ۲۸، میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ را با چهار مسیر مستقیم با طول‌های مساوی نشان می‌دهد. این مسیرها را با توجه به بزرگی انتگرال $\int \vec{B}.d\vec{s}$ که بر روی مسیرها گرفته می‌شود، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب‌کنید.



شکل ۳۰ـ۲۸ پرسش ۶.

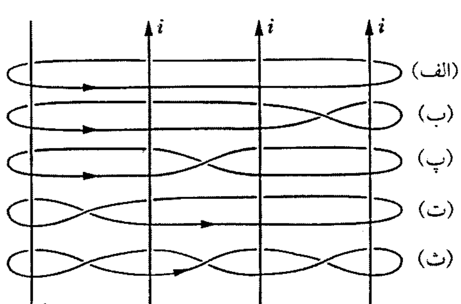
۷. شکل ۳۰ـ۲۹ الف، چهار حلقهٔ آمپری دایره‌ای هم‌مرکز را با سیمی حامل جریان برون سوی صفحهٔ شکل، نشان می‌دهد. جریان در سرتاسر مقطع دایره‌ای سیم یکنواخت است. این حلقه‌ها را با توجه به بزرگی انتگرال $\oint \vec{B}.d\vec{s}$ که روی هر حلقه گرفته می‌شود، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



شکل ۳۰ـ۲۹ پرسش‌های ۷ و ۸.

۸. شکل ۳۰ـ۲۹ ب، چهار حلقهٔ آمپری دایره‌ای (دایره‌های نازک) و مقطع چهار رسانای دایره‌ای دراز (دایره‌های پررنگ) را که همه هم مرکزند، نشان می‌دهد. سه تا از این رساناها استوانه‌هایی توخالی هستند و رسانای مرکزی یک استوانهٔ توپر است. جریان در این رساناها، از کمترین شعاع تا بیشترین شعاع، ۴A در برون سو، ۹A در درون سو، ۵A در برون سو، و ۳A در درون سوی صفحهٔ شکل، است. این حلقه‌ها را با توجه به بزرگی انتگرال $\oint \vec{B}.d\vec{s}$ که روی هر حلقه گرفته می‌شود، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.

۹. شکل ۳۰ـ۳۰، چهار جریان یکسان i و پنج مسیر آمپری احاطه کنندهٔ جریان‌ها را نشان می‌دهد. این مسیرها را با توجه به مقدار انتگرال $\oint \vec{B}.d\vec{s}$



شکل ۳۰ـ۳۰ پرسش ۹.

که در جهت‌های نشان داده شده گرفته می‌شود، از مثبت‌ترین تا منفی‌ترین، مرتب کنید.

۱۰. جدول زیر، تعداد دورهای سیم در یکای طول، n، و جریان i گذرنده از شش سیملولهٔ آرمانی با شعاع‌های مختلف را نشان می‌دهد. می‌خواهیم چند سیملوله را به طور هم‌مرکز به گونه‌ای ترکیب کنیم که میدان مغناطیسی برایند تولید شده در راستای محور مرکزی صفر باشد. این کار با چند سیملوله می‌تواند انجام شود، (الف) دو سیملوله، (ب) سه سیملوله، (پ) چهار سیملوله، و (ت) پنج سیملوله؟ پاسخ را با مشخص کردن شمارهٔ سیملوله‌های مورد استفاده و جهت جریان‌ها در سیملوله‌ها در جدولی درج کنید.

سیملوله :	۱	۲	۳	۴	۵	۶
n :	۵	۴	۳	۲	۱۰	۸
i :	۵	۳	۷	۶	۲	۳

تمرین‌ها و مسأله‌ها

بخش ۳۰-۱ محاسبهٔ میدان مغناطیسی ناشی از جریان الکتریکی

۱ ت. نقشه‌برداری در فاصلهٔ ۱٫۶ متری زیر یک خط انتقال برق، که از آن جریان ۱۰۰A عبور می‌کند، از قطب‌نما استفاده می‌کند. (الف) میدان مغناطیسی ناشی از جریان خط انتقال در محل قطب‌نما چقدر است؟ (ب) آیا این موضوع بر اندازه‌گیری قطب‌نما اثر جدی دارد؟ مؤلفهٔ افقی میدان مغناطیسی زمین در محل، ۲۰μT است.

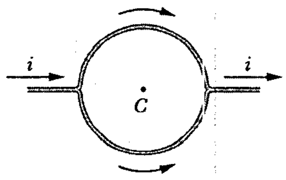
۲ ت. تفنگ الکترونی یک لامپ تلویزیونی معمولی الکترون‌های با انرژی جنبشی ۲۵keV را به صورت باریکه‌ای به قطر ۰٫۲۲mm به سمت صفحهٔ تصویر شلیک می‌کند و در هر ثانیه $۵٫۶ \times ۱۰^{۱۴}$ الکترون به صفحه می‌رسد. مطلوب است محاسبهٔ میدان مغناطیسی ناشی از این باریکه در نقطه‌ای به فاصلهٔ ۱٫۵mm از محور باریکه.

۳ ت. در ناحیهٔ خاصی از کشور فیلیپین میدان مغناطیسی زمین، با بزرگی ۳۹μT، افقی است و جهتش به سمت شمال است. فرض کنید میدان مغناطیسی برایند درست در فاصلهٔ ۸٫۰ سانتی‌متری بالای یک سیم مستقیم دراز افقی و حامل جریان ثابت، صفر است. (الف) بزرگی جریان و (ب) جهت جریان را معین کنید.

۴ ت. سیم درازی که حامل جریان ۱۰۰A است در میدان مغناطیسی خارجی یکنواخت ۵٫۰mT قرار دارد. راستای این سیم بر میدان مغناطیسی عمود است. نقاطی را معین کنید که در آنها میدان مغناطیسی برایند صفر باشد.

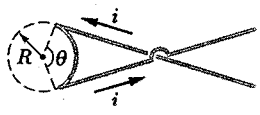
۵ ت. ذره‌ای با بار مثبت q در فاصلهٔ d از یک سیم مستقیم دراز و حامل جریان i، با تندی v در راستای عمود بر سیم حرکت می‌کند. مطلوب است تعیین بزرگی و جهت نیروی وارد بر ذره در حالتی که (الف) ذره به سیم نزدیک می‌شود، و (ب) ذره از سیم دور می‌شود.

۶ ت. یک رسانای مستقیم حامل جریان i، مطابق شکل ۳۰-۳۱، به دو کمان نیم‌دایره‌ای مشابه تقسیم شده است. میدان مغناطیسی حاصل در نقطهٔ C، مرکز حلقهٔ دایره‌ای چیست؟



شکل ۳۰-۳۱ تمرین ۶.

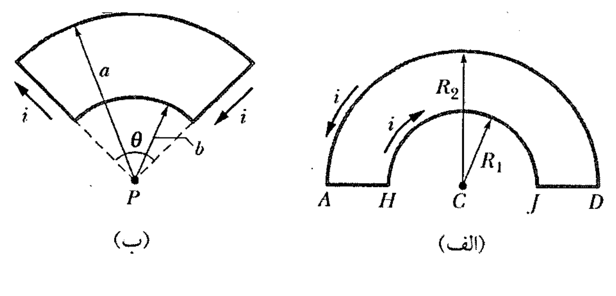
۷ م. یک سیم حامل جریان i به صورت پیکربندی شکل ۳۰-۳۲ درآمده است. دو نیم‌خط مستقیم مماس بر یک دایره از طریق یک کمان دایره‌ای به زاویهٔ مرکزی θ، واقع در روی محیط دایره به هم وصل شده‌اند و تمام این اجزا در یک صفحه قرار دارند. مقدار θ چقدر باید باشد تا B در مرکز دایره صفر شود؟



شکل ۳۰-۳۲ مسألهٔ ۷.

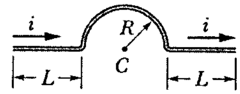
۸ م. با استفاده از قانون بیو ـ ساوار، میدان مغناطیسی $\vec{B}$ را در نقطهٔ C، مرکز مشترک کمان‌های نیمدایره‌ای AD و HJ در شکل ۳۰-۳۳ الف، حساب کنید. این کمان‌ها، که دارای شعاع‌های، به ترتیب، R_2 و R_1 هستند بخشی از مدار $ADJHA$ را تشکیل می‌دهند.

۹ م. در مدار شکل ۳۰-۳۳ ب، بخش‌های خمیده کمان‌هایی از دایره‌های با شعاع‌های a و b و مرکز مشترک P هستند. خط‌های مستقیم در راستای شعاع‌ها قرار دارند. با فرض آنکه مدار حامل جریان i است میدان مغناطیسی $\vec{B}$ در نقطهٔ P را پیدا کنید.



شکل ۳۰-۳۳ مسأله‌های ۸ و ۹.

۱۰ م. سیم نشان داده شده در شکل ۳۰ـ۳۴ حامل جریان i است. میدان مغناطیسی $\vec{B}$ را در نقطهٔ C، مرکز نیمدایره، که از (الف) هر بخش مستقیم سیم به طول L، (ب) بخش نیمدایره‌ای به شعاع R و (پ) کل سیم، حاصل می‌شود، پیدا کنید.

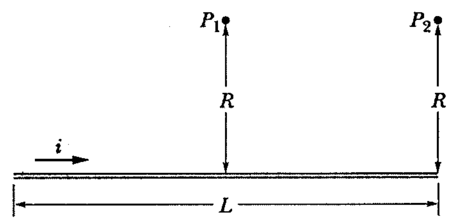


شکل ۳۰ـ۳۴ مسألهٔ ۱۰.

۱۱ م. در شکل ۳۰ـ۳۵، قطعه سیم مستقیم به طول L حامل جریان i است. نشان دهید که بزرگی میدان مغناطیسی $\vec{B}$ حاصل از این سیم در نقطهٔ P_1، واقع بر عمودمنصف و به فاصلهٔ R از سیم، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$B=\frac{\mu_0 i}{2\pi R}\frac{L}{(L^2+4R^2)^{\frac{1}{2}}}$$

نشان دهید که در حالت $L\longrightarrow\infty$، این رابطه به یک نتیجهٔ مورد انتظار منجر می‌شود.



شکل ۳۰ـ۳۵ مسأله‌های ۱۱ و ۱۳.

۱۲ م. حلقهٔ سیمی مربع شکلی به ضلع a حامل جریان i است. با استفاده از مسألهٔ ۱۱ نشان دهید که بزرگی میدان مغناطیسی ناشی از جریان در مرکز حلقه، از رابطه زیر به دست می‌آید

$$B=\frac{2\sqrt{2}\mu_0 i}{\pi a}$$

۱۳ م. در شکل ۳۰ـ۳۵، یک سیم مستقیم به طول L حامل جریان i است. نشان دهید که رابطهٔ زیر:

$$B=\frac{\mu_0 i}{4\pi R}\frac{L}{(L^2+R^2)^{\frac{1}{2}}}$$

بزرگی میدان مغناطیسی $\vec{B}$ ناشی از جریان سیم در نقطهٔ P_2 به فاصلهٔ R از یک انتهای سیم را به دست می‌دهد.

۱۴ م. با استفاده از مسألهٔ ۱۱، نشان دهید که بزرگی میدان مغناطیسی در مرکز یک حلقهٔ سیم مستطیل شکل به طول L و پهنای W و حامل جریان i، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

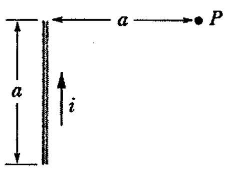
$$B=\frac{2\mu_0 i}{\pi}\frac{(L^2+W^2)^{\frac{1}{2}}}{LW}$$

۱۵ م. حلقهٔ سیمی مربع شکلی به ضلع a حامل جریان i است. با استفاده از مسألهٔ ۱۱ نشان دهید که بزرگی میدان مغناطیسی تولید شده در نقطه‌ای واقع بر محور حلقه و به فاصلهٔ x از مرکز آن، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$B(x)=\frac{4\mu_0 i a^2}{\pi(4x^2+a^2)(4x^2+2a^2)^{\frac{1}{2}}}$$

ثابت کنید که این نتیجه با نتیجهٔ مسألهٔ ۱۲ سازگار است.

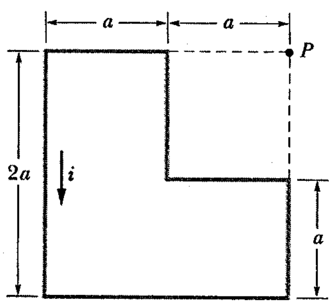
۱۶ م. در شکل ۳۰ـ۳۶، یک قطعه سیم مستقیم به طول a حامل جریان i است. نشان دهید که بزرگی میدان مغناطیسی ناشی از این جریان در نقطهٔ P، برابر است با $B=\sqrt{2}\mu_0 i/8\pi a$.



شکل ۳۰ـ۳۶ مسألهٔ ۱۶.

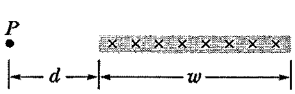
۱۷ م. دو سیم، هر یک به طول L، یکی به شکل دایره و دیگری به شکل مربع است و هر دو سیم حامل جریان i هستند. نشان دهید که میدان مغناطیسی حاصل از جریان در مرکز هر شکل برای مربع بیش از دایره است. (مسألهٔ ۱۲ را ببینید).

۱۸ م. در شکل ۳۰ـ۳۷، میدان مغناطیسی $\vec{B}$ را در نقطهٔ P پیدا کنید. (مسألهٔ ۱۶ را ببینید).



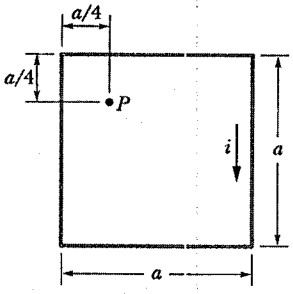
شکل ۳۰ـ۳۷ مسألهٔ ۱۸.

۱۹ م. شکل ۳۰ـ۳۸، بخشی از یک نوار دراز و نازک به پهنای w را نشان می‌دهد که حامل جریان کل با توزیع یکنواخت i در درون سوی صفحهٔ شکل است. بزرگی و جهت میدان مغناطیسی $\vec{B}$ را در نقطهٔ P، واقع در صفحهٔ نوار و به فاصلهٔ d از لبهٔ آن، حساب کنید. (راهنمایی: فرض کنید که نوار از تعدادی سیم‌های دراز نازک و موازی تشکیل شده است).



شکل ۳۰ـ۳۸ مسألهٔ ۱۹.

۲۰ م. در شکل ۳۰ـ۳۹، میدان مغناطیسی $\vec{B}$ را در نقطهٔ P به ازای $i=$ ۱۰A و $a=$ ۸٫۰cm، پیدا کنید. (مسأله‌های ۱۳ و ۱۶ را ببینید).



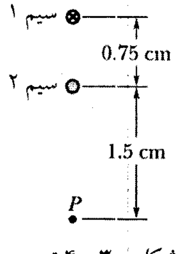
شکل ۳۰ـ۳۹ مسألهٔ ۲۰.

بخش ۳۰ـ۲ نیروی میان دو سیم موازی حامل جریان

۲۱ ت. دو سیم موازی دراز به فاصلهٔ ۸٫۰cm از هم قرار دارند. چه جریان‌های یکسانی باید از این سیم‌ها بگذرد تا بزرگی میدان مغناطیسی در وسط فاصلهٔ میان آنها ۳۰۰μT باشد؟ جریان‌ها را (الف) همسو، و (ب) ناهمسو، در نظر بگیرید.

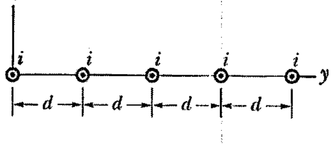
۲۲ ت. دو سیم موازی دراز به فاصلهٔ d از یکدیگر قرار دارند و حامل جریان‌های همسوی i و $3i$ هستند. نقطه یا نقاطی را معین کنید که در آنجا میدان‌های مغناطیسی ناشی از جریان همدیگر را خنثی کنند.

۲۳ ت. دو سیم موازی مستقیم و دراز به فاصلهٔ ۰٫۷۵cm از هم قرار دارند و راستای سیم‌ها، مطابق شکل ۳۰ـ۴۰، بر صفحهٔ شکل عمود است. سیم ۱ حامل جریان ۶٫۵A در درون سوی صفحهٔ شکل است. جریان گذرنده (از لحاظ بزرگی و جهت) از سیم ۲ چه باید باشد تا میدان مغناطیسی براینددر نقطهٔ P صفر باشد؟



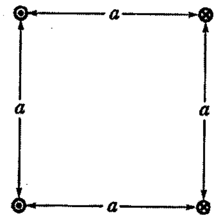
شکل ۳۰ـ۴۰ تمرین ۲۳.

۲۴ ت. شکل ۳۰ـ۴۱، پنج سیم موازی دراز واقع در صفحهٔ xy را نشان می‌دهد. هر سیم حامل جریان $i=$ ۳٫۰۰A در جهت مثبت محور x است. فاصلهٔ میان هر دو سیم مجاور $d=$ ۸٫۰۰A است. نیروی مغناطیسی وارد بر هر متر از این پنج سیم از سوی سیم‌های دیگر را برحسب نمادگذاری برداری یکه پیدا کنید.



شکل ۳۰ـ۴۱ تمرین ۲۴.

۲۵ م. چهار سیم مسی دراز با هم موازی‌اند و مقطع‌های آنها گوشه‌های مربعی به ضلع $a=$ ۲۰cm تشکیل می‌دهد. هر سیم حامل جریان ۲۰ آمپری در جهت نشان داده شده در شکل ۳۰ـ۴۲ است. بزرگی و جهت میدان مغناطیسی $\vec{B}$ در مرکز مربع چیست؟



شکل ۳۰ـ۴۲ مسأله‌های ۲۵، ۲۶ و ۲۷.

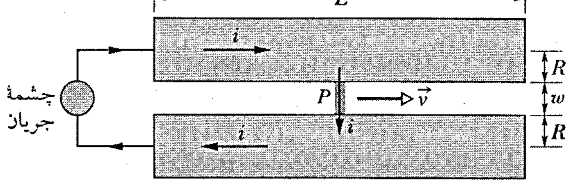
۲۶ م. چهار سیم مشابه موازی حامل جریان i طوری آرایش یافته‌اند، که مطابق شکل ۳۰ـ۴۲، مربعی به ضلع a تشکیل می‌دهند، جز آنکه همهٔ جریان‌ها در برون سوی صفحهٔ شکل هستند. نیروی وارد بر یکای طول هر یک از سیم‌ها (از لحاظ بزرگی و جهت) چیست؟

۲۷ م. در شکل ۳۰ـ۴۲، نیروی وارد بر یکای طول سیم پایینی سمت چپ (از لحاظ بزرگی و جهت) که در آن جهت جریان مطابق شکل است، چیست؟ همهٔ سیم‌ها حامل جریان i هستند.

۲۸ م. شکل ۳۰ـ۴۳، نمودار آرمانی یک تفنگ ریلی را نشان می‌دهد. پرتابهٔ P در میان دو ریل پهن با سطح مقطع دایره‌ای قرار می‌گیرد. چشمهٔ جریانی، جریان ریل‌ها و خود پرتابه (رسانا) را تأمین می‌کند (از فیوز استفاده نشده است). (الف) فرض کنید فاصلهٔ میان ریل‌ها w، شعاع ریل‌ها R و جریان ریل‌ها i است. نشان دهید که نیروی وارد بر پرتابه به سمت راست و در راستای ریل‌هاست و مقدار تقریبی آن برابر است با:

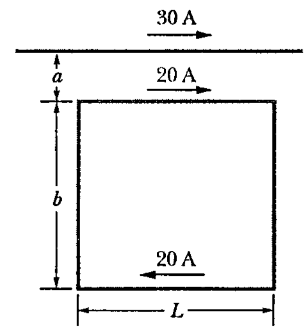
$$F = \frac{i^2\mu_0}{2\pi}\ln\frac{w+R}{R}$$

(ب) اگر پرتابه از انتهای سمت چپ ریل از حال سکون شروع به حرکت کند تندی آن v، را در هنگام خروج از انتهای سمت راست پیدا کنید. فرض کنید $i=$ ۴۵۰kA، $w=$ ۱۲mm، $R=$ ۶٫۷cm، $L=$ ۴٫۰m و جرم پرتابه $m=$ ۱۰g است.



شکل ۳۰ـ۴۳ مسألهٔ ۲۸.

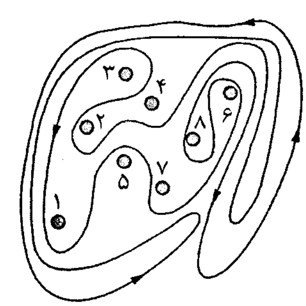
۲۹ م. در شکل ۳۰-۴۴، سیم مستقیم دراز حامل جریان ۳۰A و حلقهٔ مستطیل شکل حامل جریان ۲۰A است. نیروی برایند وارد بر حلقه را حساب کنید. فرض کنید $a=$ ۱٫۰cm، $b=$ ۸٫۰cm و $L=$ ۳۰cm.



شکل ۳۰-۴۴ مسألهٔ ۲۹.

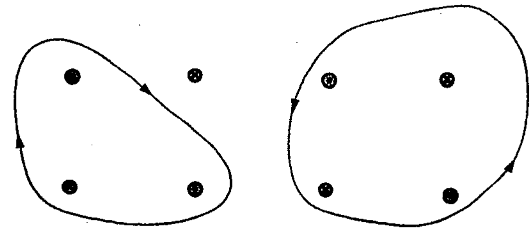
بخش ۳۰-۳ قانون آمپر

۳۰ ت. در شکل ۳۰-۴۵، هشت سیم صفحهٔ شکل را در نقاط نشان داده شده به‌طور عمود قطع می‌کنند. سیمی‌که با عدد درست k $(k=$ ۱, ۲,...,۸$)$ نشانه‌گذاری شده حامل جریان ki است. به ازای kهای فرد، جریان در برون سو و به ازای kهای زوج جریان در درون سوی صفحهٔ شکل است. مقدار انتگرال $\oint \vec{B}.\vec{ds}$ را در طول مسیر بسته و در جهت نشان داده شده حساب کنید.



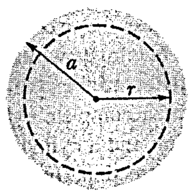
شکل ۳۰-۴۵ تمرین ۳۰.

۳۱ ت. هر یک از هشت رسانای نشان داده شده در شکل ۳۰-۴۶ حامل جریان ۲٫۰A در درون سو یا در برون سوی صفحهٔ شکل هستند. برای انتگرال خطی $\oint \vec{B}.\vec{ds}$ دو مسیر نشان داده شده است. مقدار انتگرال برای مسیر (الف) سمت چپ و (ب) سمت راست، چقدر است؟



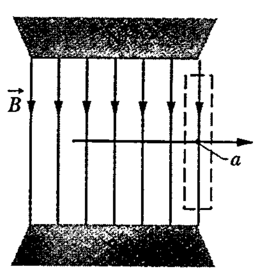
شکل ۳۰-۴۶ تمرین ۳۱.

۳۲ ت. شکل ۳۰-۴۷، مقطع یک رسانای استوانه‌ای دراز به شعاع a را نشان می‌دهد که حامل جریان با توزیع یکنواخت i است. با فرض $a=$ ۲٫۰cm و $i=$ ۱۰۰A، منحنی نمایش میدان $B(r)$ را در گسترهٔ ۶٫۰cm$>r>$۰ رسم کنید.



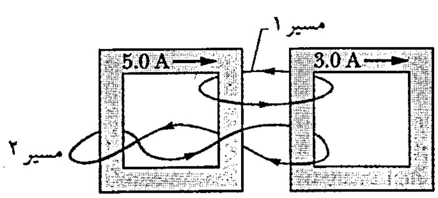
شکل ۳۰-۴۷ تمرین ۳۲.

۳۳ م. نشان دهید که میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$، هنگام حرکت کردن در مسیری عمود بر خط‌های میدان، مثلاً، در طول پیکان افقی شکل ۳۰-۴۸، نمی‌تواند ناگهان صفر شود. (آن گونه که در نبود خط‌های میدان در سمت راست نقطهٔ a در شکل، به نظر می‌رسد). (راهنمایی: قانون آمپر را در مورد مسیر مستطیلی نشان داده شده با خط‌چین به کار ببندید). در آهن‌رباهای واقعی «فریز شدن» خط‌های میدان مغناطیسی همیشه اتفاق می‌افتد، که به معنای میل کردن تدریجی میدان $\vec{B}$ به سمت صفر است. خط‌های میدان را در این شکل طوری اصلاح کنید که وضعیت واقعی‌تری را نشان دهند.



شکل ۳۰-۴۸ مسألهٔ ۳۳.

۳۴ م. دو حلقهٔ رسانای مربع شکل، مطابق شکل ۳۰-۴۹، حامل جریان‌های ۵٫۰A و ۳٫۰A هستند. مقدار انتگرال $\oint \vec{B}.\vec{ds}$ برای هر یک از مسیرهای بستهٔ نشان داده شده چقدر است؟



شکل ۳۰-۴۹ مسألهٔ ۳۴.

۳۵ م. چگالی جریان در درون یک سیم استوانه‌ای دراز توپر به شعاع a، در جهت محور سیم است و به طور خطی برحسب فاصلهٔ شعاعی r از

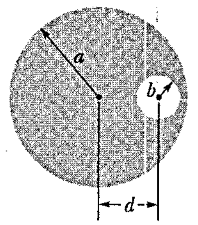
محور، طبق رابطهٔ $J=J_0r/a$ تغییر می‌کند. میدان مغناطیسی را در درون سیم پیدا کنید.

۳۶ م. یک سیم مستقیم دراز (به شعاع $۳٫۰\text{mm}$) حامل جریان ثابتی است که به طور یکنواخت در سطح مقطع عمود بر محور سیم توزیع شده است. اگر چگالی جریان برابر با $۱۰۰\text{A/m}^۲$ باشد بزرگی میدان مغناطیسی در فاصلهٔ (الف) $۲٫۰\text{mm}$ و (ب) $۴٫۰\text{mm}$، از محور سیم چقدر است؟

۳۷ م. شکل ۳۰-۵۰، مقطع یک رسانای استوانه‌ای دراز به شعاع a را نشان می‌دهد، که شامل لوله‌ای استوانه‌ای به شعاع b است. محورهای این دو استوانه موازی‌اند و به فاصله d از هم قرار دارند. جریان i در مقطع سایه خورده به طور یکنواخت توزیع شده است. (الف) با استفاده از اصل برهم‌نهی نشان دهید که میدان مغناطیسی در روی محور لوله برابر است با:

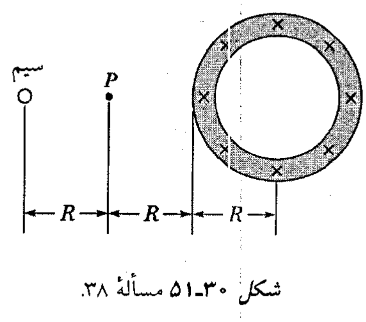
$$B=\frac{\mu_0 i d}{2\pi(a^2-b^2)}$$

(ب) این رابطه را در دو حالت خاص $b=0$ و $d=0$ مورد بحث قرار دهید. (پ) با استفاده از قانون آمپر نشان دهید که میدان مغناطیسی در درون لوله یکنواخت است. (راهنمایی: لولهٔ استوانه‌ای را به عنوان حاصل برهم نهی یک استوانهٔ توپر (بدون لولهٔ استوانه‌ای)، که حامل جریان در یک جهت است و استوانه‌ای توخالی به شعاع b که حامل جریان در جهت مخالف است، در نظر بگیرید. چگالی جریان دو استوانه یکسان است).



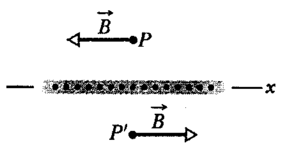
شکل ۳۰-۵۰ مسألهٔ ۳۷.

۳۸ م. یک لولهٔ دراز با مقطع دایره‌ای و به شعاع بیرونی R، حامل جریان i (با توزیع یکنواخت) است و جریان، مطابق شکل ۳۰-۵۱، در درون سوی صفحهٔ شکل است. سیمی به طور موازی با لوله و به فاصلهٔ $3R$ از محور آن قرار دارد. بزرگی و جهت جریان گذرنده از سیم را طوری حساب کنید که میدان مغناطیسی برایند در نقطهٔ P با میدان برایند در روی محور لوله، از نظر بزرگی برابر و از نظر جهت مخالف باشد.



شکل ۳۰-۵۱ مسألهٔ ۳۸.

۳۹ م. شکل ۳۰-۵۲، مقطع یک ورقهٔ رسانای نامتناهی را نشان می‌دهد که حامل جریان λ در یکای طول واقع بر راستای محور x است؛ جریان به‌طور عمود از صفحهٔ شکل خارج می‌شود. (الف) با استفاده از قانون بیو ـ ساوار و خاصیت تقارن نشان دهید که برای تمام نقاط P، واقع در بالای ورقه، و تمام نقاط P'، واقع در پایین ورقه، میدان مغناطیسی $\vec{B}$ با ورقه موازی و جهتش مطابق شکل است. (ب) با استفاده از قانون آمپر ثابت کنید که در تمام نقاط P و P'، داریم $B=\frac{1}{2}\mu_0\lambda$.



شکل ۳۰-۵۲ مسأله‌های ۳۹ و ۴۴.

بخش ۳۰-۴ سیملوله‌ها و چنبره‌ها

۴۰ ت. در یک سیملوله به طول $۹۵٫۰\text{cm}$، به شعاع $۲٫۰۰\text{cm}$ و با تعداد دورهای سیم ۱۲۰۰، جریان $۳٫۶۰\text{A}$ برقرار است. بزرگی میدان مغناطیسی را در درون سیملوله حساب کنید.

۴۱ ت. یک سیملولهٔ با ۲۰۰ دور سیم، به طول ۲۵cm و قطر ۱۰cm، حامل جریان $۰٫۳۰\text{A}$ است. بزرگی میدان مغناطیسی $\vec{B}$ را در درون سیملوله حساب کنید.

۴۲ ت. سیملوله‌ای به طول $۱٫۳۰\text{m}$ و قطر $۲٫۶۰\text{cm}$، حامل جریان $۱۸٫۰\text{A}$ است. میدان مغناطیسی در درون این سیملوله $۲۳٫۰\text{mT}$ است. طول سیمی را که برای ساختن این سیملوله به کار رفته است، پیدا کنید.

۴۳ ت. چنبره‌ای با مقطع مربع شکل به ضلع $۵٫۰۰\text{cm}$، دارای شعاع درونی $۱۵٫۰\text{cm}$ و ۵۰۰ دور سیم حامل جریان $۰٫۸۰۰\text{A}$ است. (این چنبره به جای سیملولهٔ گرد در شکل ۳۰-۱۶، از یک سیملولهٔ با مقطع مربعی ساخته شده که به شکل یک تیوب باد شدهٔ چرخ است). میدان مغناطیسی در درون چنبره (الف) در فاصلهٔ شعاع درونی و (ب) در فاصلهٔ شعاع بیرونی چنبره چقدر است؟

۴۴ م. یک سیملولهٔ آرمانی را به صورت رسانای استوانه‌ای باریکی در نظر بگیرید که جریان یکای طول آن در راستای محور استوانه λ است. (الف) با این فرض، نشان دهید که بزرگی میدان مغناطیسی در درون یک سیملولهٔ آرمانی می‌تواند از رابطهٔ $B=\mu_0\lambda$ به دست آید. این مقدار نشانگر تغییر $\vec{B}$ در موقع رفتن از درون به بیرون سیملوله از طریق دیوار آن است. (ب) نشان دهید که همین تغییر میدان بین دو طرف یک ورقهٔ تخت نامتناهی حامل جریان، مانند شکل ۳۰-۵۲، نیز وجود دارد. (مسألهٔ ۳۹ را ببینید). آیا از این یکسانی نتیجه‌ها تعجب می‌کنید؟

۴۵ م. در بخش ۳۰-۴، نشان دادیم که میدان مغناطیسی در فاصلهٔ شعاعی r

در درون یک چنبره از معادلهٔ زیر به دست می‌آید.

$$B = \frac{\mu_0 iN}{2\pi r}$$

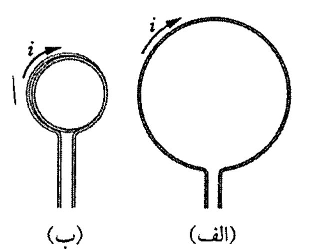
نشان دهید که در موقع رفتن از هر نقطه‌ای درست واقع در سطح درونی دیوار چنبره به نقطه‌ای واقع در سطح بیرونی دیوار آن، بزرگی $\vec{B}$ به اندازهٔ $\mu_0\lambda$ تغییر می‌کند. در اینجا λ جریان یکای طول برای هر محیطی از چنبره به شعاع r است. این نتیجه را با نتیجهٔ به دست آمده در مسألهٔ ۴۴ مقایسه کنید. آیا یکسانی نتیجه‌ها شگفت‌آور نیست؟

۴۶ م. یک سیملولهٔ دراز با ۱۰۰ دور سیم در هر سانتی‌متر، حامل جریان i است. در درون این سیملوله الکترونی در مسیری دایره‌ای به شعاع ۲ر۳۰cm به طور عمود بر محور سیملوله حرکت می‌کند. تندی الکترون ۰ر۰۴۶۰c (تندی نور = c) است. جریان i در سیملوله چقدر است؟

۴۷ م. سیملولهٔ درازی به شعاع ۷ر۰۰cm و ۱۰ر۰ دور سیم در هر سانتی‌متر، حامل جریان ۲۰ر۰mA است. در یک رسانای مستقیم واقع بر محور مرکزی سیملوله یک جریان ۶ر۰۰ آمپری وجود دارد. (الف) در چه فاصلهٔ شعاعی از محور زاویهٔ میدان مغناطیسی برایند $\vec{B}$ نسبت به محور ۴۵ درجه خواهد بود؟ (ب) در این فاصله بزرگی میدان مغناطیسی چقدر است؟

بخش ۵-۳۰ پیچهٔ حامل جریان به‌عنوان دوقطبی مغناطیسی

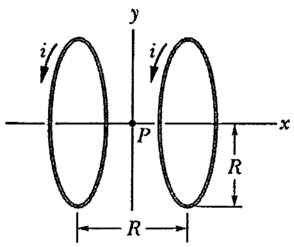
۴۸ ت. شکل ۳۰-۵۳ الف، طولی از یک سیم حامل جریان i را نشان می‌دهد که به صورت یک پیچهٔ دایره‌ای تک دور خم شده است. در شکل ۳۰-۵۳ ب، همان طول سیم بیشتر خم شده و به صورت یک پیچهٔ دو دور با شعاع نصف شعاع پیچهٔ اولی درآمده است. (الف) اگر B_a و B_b بزرگی میدان‌های مغناطیسی در مرکز پیچه‌ها باشند، نسبت B_b/B_a چقدر است؟ (ب) نسبت گشتاورهای دوقطبی پیچه‌ها μ_b/μ_a، چیست؟



شکل ۳۰-۵۳ تمرین ۴۸.

۴۹ ت. گشتاور دوقطبی مغناطیسی $\vec{\mu}$، مربوط به سیملولهٔ توصیف شده در تمرین ۴۱ چیست؟

۵۰ ت. شکل ۳۰-۵۴، آرایشی به نام پیچهٔ **هلمهولتز**[1] را نشان می‌دهد. این وسیله شامل دو پیچهٔ دایره‌ای هم محور است. هر پیچه N دور سیم دارد، شعاعش R است و دو پیچه به فاصلهٔ R از هم قرار دارند. این پیچه‌ها حامل جریان مساوی و همسوی i هستند. بزرگی میدان در نقطهٔ P، وسط فاصلهٔ میان پیچه‌ها، چقدر است؟



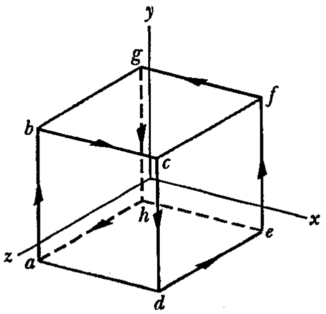
شکل ۳۰-۵۴ تمرین ۵۰؛ مسأله‌های ۵۳ و ۵۵.

۵۱ ت. دانشجویی با پیچیدن ۳۰۰ دور سیم به دور یک استوانهٔ چوبی به قطر $d=$۵ر۰cm، یک آهن‌ربای الکتریکی می‌سازد. در این پیچه با اتصال یک باتری جریان ۴ر۰A برقرار می‌شود. (الف) گشتاور مغناطیسی این وسیله چقدر است؟ (ب) در چه فاصلهٔ محوری z ($z \gg d$) میدان مغناطیسی این دوقطبی ۵ر۰μT (تقریباً یک دهم میدان مغناطیسی زمین) است؟

۵۲ ت. معادلهٔ بزرگی میدان مغناطیسی $B(x)$، در نقاط واقع بر محور یک حلقهٔ جریان مربع شکل به ضلع a در مسألهٔ ۱۵ داده شده است. (الف) نشان دهید که میدان مغناطیسی محوری این حلقه به ازای $x \gg a$، با میدان یک دوقطبی مغناطیسی برابر است (معادلهٔ ۳۰-۲۹ را ببینید). (ب) گشتاور دوقطبی مغناطیسی این حلقه چیست؟

۵۳ م. دو پیچهٔ ۳۰۰ دوری، هر یک به شعاع R، حامل جریان i هستند و مطابق شکل ۳۰-۵۴، به فاصلهٔ R از هم قرار دارند. به ازای $R=$۵ر۰cm و $i=$۵۰A، منحنی نمایش بزرگی B را برحسب فاصلهٔ x واقع بر راستای محور مشترک دو پیچه، در بازهٔ $x=$-۵cm تا $x=$+۵cm، رسم کنید. مبدأ $x=$۰ را در نقطهٔ P انتخاب کنید. (این گونه پیچه‌ها میدان یکنواخت $\vec{B}$ را در حوالی نقطهٔ P تولید می‌کنند). (راهنمایی: به معادلهٔ ۳۰-۲۸ رجوع کنید).

۵۴ م. رسانایی حامل جریان ۶ر۰A در مسیر بستهٔ *abcdefgha*، مطابق شکل ۳۰-۵۵، است. این مسیر شامل ۸ ضلع از ۱۲ ضلع یک مکعب به ضلع ۱۰cm است. (الف) چرا می‌توان این مسیر را معادل برهم نهی سه حلقهٔ مربعی *bcfgb*، *abgha*، و *cdefc* در نظر گرفت؟ (راهنمایی: جهت



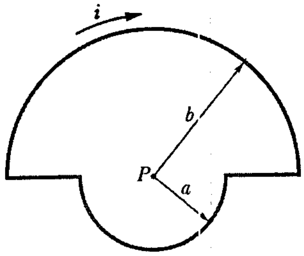
شکل ۳۰-۵۵ مسألهٔ ۵۴.

1. Helmholtz

جریان‌های این حلقه‌های مربعی را رسم کنید). (ب) برای پیدا کردن گشتاور دوقطبی مغناطیسی $\vec{\mu}$ (از نظر بزرگی و جهت) مربوط به این مسیر بسته از این اصل برهم نهی استفاده کنید. (پ) میدان $\vec{B}$ را در نقاط با مختصات $(x,y,z)=$(۰، ۰٫۵۰m، ۰) و $(x,y,z)=$(۰٫۵۰m، ۰، ۰) حساب کنید.

۵۵ م. در تمرین ۵۰ (شکل ۳۰-۵۴)، فاصلهٔ جدایی پیچه‌ها را متغیر s بگیرید. (لازم نیست این فاصله برابر با شعاع پیچه‌ها R، باشد). (الف) نشان دهید که مشتق اول بزرگی میدان مغناطیسی برایند (dB/dx) در نقطهٔ میانی P صفر است و به مقدار s بستگی ندارد. چرا انتظار دارید که این موضوع به خاطر تقارن درست باشد؟ (ب) نشان دهید که به ازای $s=R$، مشتق دوم بزرگی میدان مغناطیسی (d^2B/dx^2) در نقطهٔ P، نیز صفر است. موضوع یکنواختی B در نزدیکی P به خاطر فاصلهٔ جدایی خاص پیچه‌هاست.

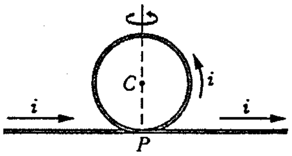
۵۶ م. سیمی به یک مدار بسته با شعاع‌های a و b، مطابق شکل ۳۰-۵۶، تبدیل شده است و از آن جریان i می‌گذرد. (الف) بزرگی و جهت $\vec{B}$ در نقطهٔ P چیست؟ (ب) گشتاور دوقطبی مغناطیسی مدار را پیدا کنید.



شکل ۳۰-۵۶ مسألهٔ ۵۶.

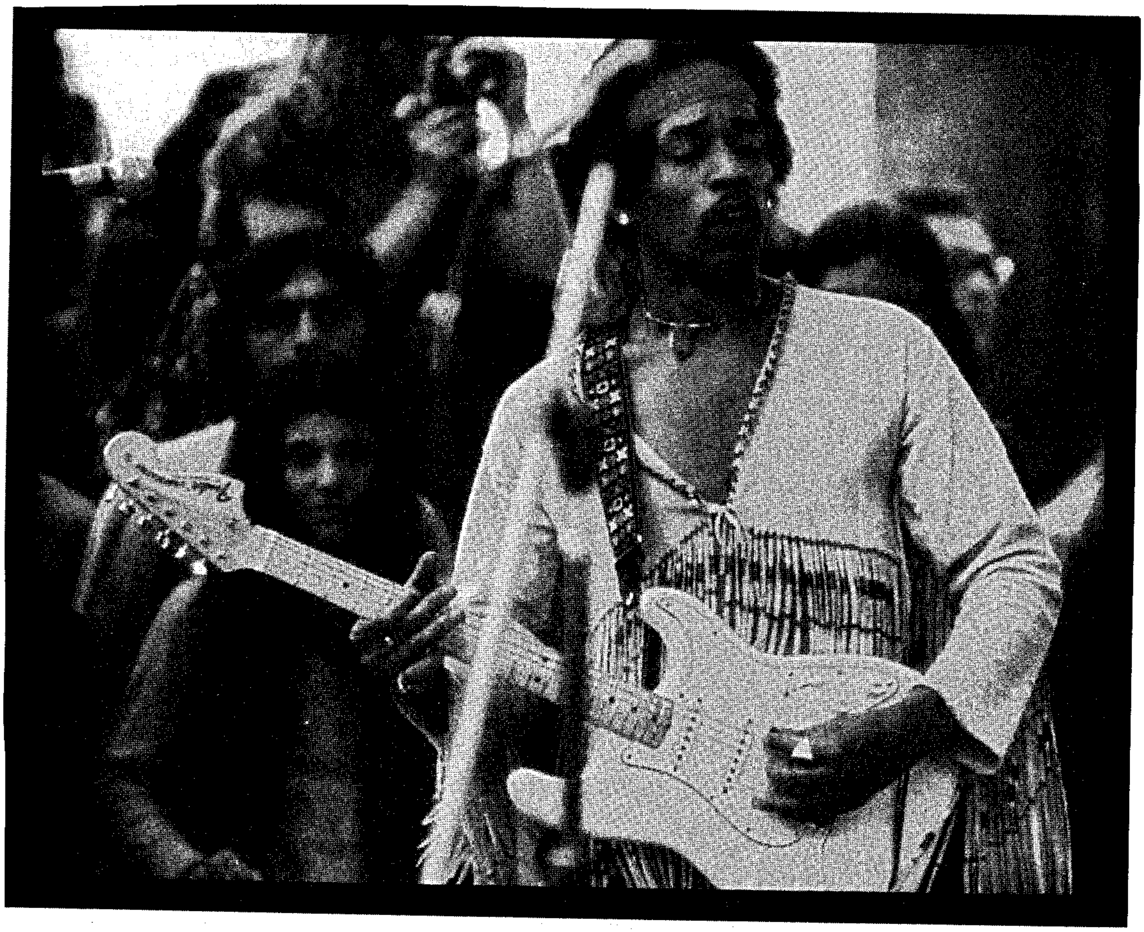
۵۷ م. یک حلقهٔ دایره‌ای به شعاع ۱۲cm حامل جریان ۱۵A است. هم‌مرکز با این حلقه، یک پیچهٔ تخت به شعاع ۰٫۸۲cm قرار دارد که شامل ۵۰ دور سیم حامل جریان ۱٫۳A است. (الف) میدان مغناطیسی حاصل $\vec{B}$، در مرکز حلقه چیست؟ (ب) چه گشتاور نیرویی به پیچه وارد می‌شود؟ فرض کنید که صفحه‌های حلقه و پیچه برهم عمودند و میدان مغناطیسی ناشی از حلقه در سرتاسر حجم اشغال شده توسط پیچه یکنواخت است.

۵۸ م. (الف) سیم درازی بدون اتصال در نقطهٔ تلاقی P، به صورت نشان داده شده در شکل ۳۰-۵۷ درآمده است. شعاع بخش دایره‌ای سیم R است. اگر جهت جریان i در سیم مطابق شکل باشد، بزرگی و جهت $\vec{B}$ را در نقطهٔ C، مرکز بخش دایره‌ای، معین کنید. (ب) فرض کنید بخش دایره‌ای سیم بدون واپیچش به دور قطر نشان داده شده چرخانده می‌شود. تا صفحهٔ دایره بر بخش‌های مستقیم سیم عمود شود. اکنون، گشتاور دوقطبی مغناطیسی وابسته به بخش دایره‌ای سیم با جریان بخش مستقیم سیم همسو می‌شود. در این حالت، میدان مغناطیسی $\vec{B}$ را در مرکز C معین کنید.



شکل ۳۰-۵۷ مسألهٔ ۵۸.

۳۱ القایش و القاییدگی



اندکی پس از ظهور موسیقی راک، در میانهٔ دههٔ ۱۹۵۰، نوازنده‌های گیتار از گیتارهای آکوستیکی به گیتارهای الکتریکی روی آوردند. جیمی هِندریکس، نخستین کسی بود که گیتار الکتریکی را به عنوان یک ساز الکترونیکی به کار برد. او در دههٔ ۱۹۶۰، در حالی که بر صحنهٔ ارکستر نمایان می‌شد مضرابش تارهای گیتار را می‌خراشید، خود و گیتارش را برای ایجاد فیدبک در مقابل یک بلندگو قرار می‌داد، و هنگامی که اثر فیدبک به اوج می‌رسید او تارهای گیتار را به پایین می‌کشید. او موسیقی راک را از ملودی‌های بادی هالی تا آهنگ‌های روان گردان در انتهای دههٔ ۱۹۶۰، تا آهنگ‌های زمخت (هِوی متال) لِدزپیلین، و تا آهنگ‌های نخراشیدهٔ جوی دیویژن در دههٔ ۱۹۷۰، گسترش داد. تأثیر آرمان‌های او روی موسیقی راک تا به امروز ادامه داشته است.

تفاوت گیتار الکتریکی و گیتار آکوستیکی در چیست و چه چیزی سبب شد که هندریکس بتواند از ساز الکترونیکی در گسترهٔ وسیعی استفاده کند.

در این فصل به این پرسش پاسخ داده خواهد شد.

۳۱ـ۱ مطالعهٔ دو وضعیت متقارن

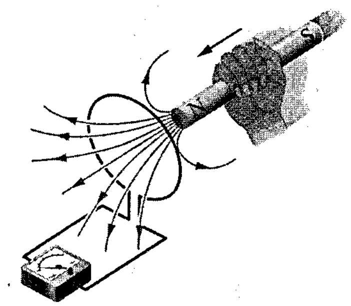
در بخش ۲۹ـ۸ دیدیم که اگر یک حلقه رسانای مسدود را در میدان مغناطیسی قرار دهیم و سپس جریانی را از آن بگذرانیم، نیروهای ناشی از میدان مغناطیسی یک گشتاور نیرو تولید می‌کنند و حلقه را می‌چرخانند:

(۳۱ـ۱) گشتاور نیرو ⇐ میدان مغناطیسی + حلقهٔ جریان

حال فرض کنید در حالی که جریان قطع شده است، حلقه را با دست بچرخانیم. آیا عکس مفهوم معادلهٔ ۳۱ـ۱ رخ می‌دهد؟ یعنی، آیا جریان در حلقه ظاهر می‌شود:

(۳۱ـ۲) جریان ؟ ⇐ میدان مغناطیسی + گشتاور نیرو

پاسخ مثبت است ـ جریان به وجود می‌آید. حالت‌های معادله‌های ۳۱ـ۱ و ۳۱ـ۲ متقارن‌اند. قانون فیزیکی مربوط به معادلهٔ ۳۱ـ۲ را قانون القایش فارادی (قانون فارادی) می‌نامند. در حالی که معادلهٔ ۳۱ـ۱ اساس کار موتورهای الکتریکی را نشان می‌دهد، معادلهٔ ۳۱ـ۲ و قانون فارادی اساس کار مولدهای الکتریکی را تشکیل می‌دهند. در این فصل به قانون فارادی و فرایندهایی که آن را توصیف می‌کنند، می‌پردازیم.



شکل ۳۱ـ۱ وقتی آهن‌ربا نسبت به حلقه حرکت می‌کند، دستگاه اندازه‌گیری وجود یک جریان را در حلقهٔ سیمی ثبت می‌کند.

۳۱ـ۲ دو آزمایش

اینک دو آزمایش سادهٔ زیر را برای وارد شدن در بحث القایش فارادی مورد آزمون قرار می‌دهیم.

آزمایش اول. شکل ۳۱ـ۱، یک حلقهٔ رسانای متصل به یک دستگاه حساس اندازه‌گیری جریان را نشان می‌دهد. چون هیچ باتری یا چشمهٔ نیروی محرک الکتریکی دیگری در این مدار وجود ندارد، هیچ جریانی عبور نمی‌کند. اما اگر یک میلهٔ آهن‌ربا را به سمت حلقه حرکت دهیم ناگهان در مدار جریانی ظاهر می‌شود و اگر آهن‌ربا متوقف شود جریان هم قطع می‌شود. اکنون اگر آهن‌ربا را از حلقه دور کنیم ناگهان دوباره در مدار جریانی ظاهر می‌شود، اما این بار در جهت مخالف. اگر آزمایش را مدتی ادامه دهیم به نکات زیر پی می‌بریم:

۱. جریان فقط هنگامی ظاهر می‌شود که در بین حلقه و آهن‌ربا حرکت نسبی وجود داشته باشد (یکی نسبت به دیگری حرکت کند).

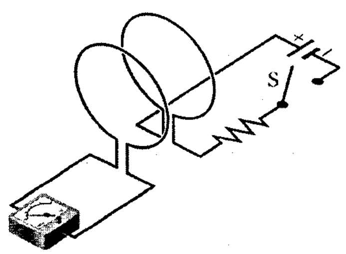
۲. هر چه حرکت سریع‌تر باشد جریان بیشتری تولید می‌شود.

۳. اگر حرکت دادن قطب شمال آهن‌ربا به سمت حلقه، مثلاً، جریانی در جهت ساعتگرد تولید کند، دور شدن قطب شمال از حلقه جریانی در جهت پادساعتگرد تولید خواهد کرد. حرکت دادن قطب جنوب آهن‌ربا به سمت حلقه نیز جریان تولید می‌کند، اما در جهت مخالف.

جریان تولید شده در حلقه را **جریان القایی** می‌نامند. کار انجام شده روی یکای بار الکتریکی برای تولید این جریان (برای حرکت دادن الکترون‌های رسانش تشکیل دهندهٔ جریان) **نیروی محرک الکتریکی القایی** نامیده می‌شود و فرایند تولید جریان و نیروی محرک الکتریکی (emf) را **القایش** می‌نامند.

آزمایش دوم. در این آزمایش از دستگاه شکل ۳۱ـ۲، که در آن دو حلقهٔ رسانا به هم نزدیک‌اند اما با هم تماس ندارند، استفاده می‌کنیم. اگر کلید S را ببندیم جریان در حلقهٔ سمت راست برقرار می‌شود و دستگاه اندازه‌گیری واقع در حلقهٔ سمت چپ به طور ناگهانی و در زمانی کوتاه یک جریان ـ جریان القایی ـ را نشان می‌دهد. حال، اگر کلید را بازکنیم جریان ناگهانی و کوتاه مدت القایی دیگری در حلقهٔ سمت چپ، اما در جهت مخالف، ظاهر می‌شود. این جریان القایی (و در نتیجه نیروی محرک الکتریکی القایی) تنها هنگامی برقرار می‌شود که جریان در حلقهٔ سمت راست تغییر کند (وصل یا قطع شود) و ثابت نباشد (حتی اگر زیاد هم باشد).

در این دو آزمایش نیروی محرک الکتریکی القایی و جریان القایی موقعی به وجود می‌آیند که چیزی تغییر کند ـ اما این «چیز» چیست؟ همان است که فارادی آن را می‌شناخت.



شکل ۳۱ـ۲ هنگام بسته شدن کلید S (برقرار شدن جریان در حلقهٔ سیمی سمت راست) یا باز شدن کلید (قطع شدن جریان در حلقهٔ سمت راست)، جریانی توسط دستگاه اندازه‌گیری ثبت می‌شود. در اینجا حلقه‌ها نسبت به هم حرکتی ندارند.

۳۱ـ۳ قانون القایش فارادی

فارادی دریافت که، مانند دو آزمایش شرح داده شده، نیروی محرک الکتریکی و جریان در یک حلقه را می‌توان با تغییر دادن مقدار میدان مغناطیسی گذرنده از حلقه القا کرد. علاوه بر این، او دریافت که «مقدار میدان

مغناطیسی» را می‌توان به صورت خط‌های میدان مغناطیسی گذرنده از حلقه نمایش داد. با توجه به آزمایش‌های انجام شده **قانون القایش فارادی** را می‌توان چنین بیان کرد:

◀ در حلقهٔ سمت چپ شکل‌های ۳۱ـ۱ و ۳۱ـ۲ نیروی محرک الکتریکی القایی هنگامی ظاهر می‌شود که تعداد خط‌های میدان مغناطیسی گذرنده از آن حلقه تغییر کند.

تعداد واقعی خط‌های میدان مغناطیسی گذرنده از حلقه اهمیتی ندارد؛ مقادیر نیروی محرک القایی و جریان القایی با آهنگ تغییر کردن این تعداد معین می‌شود.

در آزمایش اول (شکل ۳۱ـ۱)، خط‌های میدان مغناطیسی از قطب شمال آهن‌ربا بیرون می‌آیند. بنابراین، هنگام نزدیک کردن قطب شمال آهن‌ربا به حلقه تعداد خط‌های میدان گذرنده از حلقه افزایش می‌یابد. این افزایش، به ظاهر، باعث می‌شود الکترون‌های رسانش در حلقه حرکت کنند (جریان القایی) و انرژی لازم برای حرکت دادن آنها تأمین شود (نیروی محرک الکتریکی القایی). وقتی حرکت آهن‌ربا متوقف می‌شود تعداد خط‌های میدان مغناطیسی گذرنده از حلقه دیگر تغییر نمی‌کند و جریان القایی و نیروی محرک القایی از میان می‌رود.

در آزمایش دوم (شکل ۳۱ـ۲)، وقتی کلید باز است (جریان نیست) خط‌های میدان وجود ندارند. اما هنگامی که در حلقهٔ سمت راست جریان برقرار می‌شود جریان در حال افزایش یک میدان مغناطیسی در پیرامون آن حلقه و نیز در حلقهٔ سمت چپ به وجود می‌آورد. در حین تولید میدان تعداد خط‌های میدان مغناطیسی گذرنده از حلقهٔ سمت چپ افزایش می‌یابد. در اینجا نیز مانند آزمایش اول، افزایش یافتن تعداد خط‌های میدان مغناطیسی گذرنده از حلقه، در آن یک جریان و یک نیروی محرک الکتریکی القا می‌کند. هنگامی که در حلقهٔ سمت راست جریان به مقدار پایانی خود می‌رسد، تعداد خط‌های میدان‌مغناطیسی گذرنده از حلقهٔ سمت چپ دیگر تغییر نمی‌کند و جریان القایی و نیروی محرک الکتریکی القایی از میان می‌رود.

قانون فارادی توضیح نمی‌دهد که چرا در هر دو آزمایش جریان و نیروی محرک الکتریکی القا می‌شود؛ این قانون فقط گزاره‌ای است که به درک پدیدهٔ القایش کمک می‌کند.

مطالعهٔ کمّی

در کاربرد قانون فارادی، باید برای محاسبهٔ مقدار میدان مغناطیسی گذرنده از یک حلقه راهی پیدا کنیم. در فصل ۲۴ هم، در شرایطی مشابه، نیازمند محاسبه مقدار میدان الکتریکی گذرنده از یک سطح بودیم. در آنجا شار الکتریکی $\Phi_E=\int \vec{E}.d\vec{A}$ را تعریف کردیم و در اینجا **شار مغناطیسی** را چنین معرفی می‌کنیم: حلقه‌ای در نظر می‌گیریم که سطحی به مساحت A، واقع شده در میدان مغناطیسی $\vec{B}$ را محصور کند. در نتیجه، شار مغناطیسی گذرنده از حلقه برابر است با:

$$\Phi_B = \int \vec{B}\,.\,d\vec{A} \qquad \text{(۳۱ـ۳)}$$

(شار مغناطیسی گذرنده از سطح به مساحت A) ■

همان‌طور که در فصل ۲۴ دیدیم، $d\vec{A}$ برداری به بزرگی dA و عمود بر سطح دیفرانسیلی به مساحت dA است.

به عنوان حالت خاصی از معادلهٔ ۳۱ـ۳، فرض کنید حلقه در یک صفحه قرار دارد و میدان مغناطیسی بر صفحهٔ حلقه عمود است. در نتیجه، حاصل‌ضرب نقطه‌ای در معادلهٔ ۳۱ـ۳ را می‌توان به صورت $BdA\cos 0°=BdA$ نوشت. اگر میدان مغناطیسی هم یکنواخت باشد، می‌توان B را از علامت انتگرال بیرون آورد. در نتیجه، آنچه باقی می‌ماند انتگرال $\int dA$ است که مساحت حلقه A، را به دست می‌دهد. پس، معادلهٔ ۳۱ـ۳ را می‌توان به صورت زیر ساده کرد

$$\Phi_B = BA \qquad \text{(۳۱ـ۴)}$$

($\vec{B}$ یکنواخت و عمود بر سطح به مساحت A) ■

با توجه به معادله‌های ۳۱ـ۳ و ۳۱ـ۴ دیده می‌شود که یکای SI شار مغناطیسی **تسلا ـ مترمربع** است که **وبر** (با نماد Wb) نام دارد:

$$\text{یک وبر} = 1\,\text{Wb} = 1\,\text{T.m}^2 \qquad \text{(۳۱ـ۵)}$$

اکنون با توجه به تعریف شار مغناطیسی قانون القایش فارادی را با دیدی کمی و مفید چنین بیان کنیم:

◀ **بزرگی نیروی محرک الکتریکی القایی $\mathscr{E}$ در یک حلقهٔ رسانا، برابر با آهنگ تغییر شار مغناطیسی گذرنده از آن حلقه Φ_B، نسبت به زمان است.**

چنانکه در بخش بعد خواهیم دید، نیروی محرک الکتریکی القایی $\mathscr{E}$ با تغییر شار مخالفت می‌کند. در نتیجه، قانون فارادی از نظر فرمولی چنین بیان می‌شود:

$$\mathscr{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad \text{(قانون فارادی)} \qquad (۶\text{-}۳۱)$$

در اینجا علامت منها مفهوم مخالفت گفته شده را نشان می‌دهد. علامت منها در معادلهٔ ۳۱-۶، اغلب، نادیده گرفته می‌شود و فقط بزرگی نیروی، محرک الکتریکی القایی مورد نظر است.

اگر شار مغناطیسی گذرنده از یک پیچهٔ با N دور سیم را تغییر دهیم، در هر دور یک نیروی محرک الکتریکی القایی ظاهر می‌شود و نیروی محرک الکتریکی القایی کل در پیچه برابر با مجموع نیروهای محرک الکتریکی مربوط به هر دور سیم است. اگر سیم‌های پیچه تنگ هم (نزدیک به هم) پیچیده شوند، به گونه‌ای که از تمام دورهای سیم شار مغناطیسی یکسان Φ_B، عبور کند، نیروی محرک الکتریکی القا شده در پیچه برابر خواهد بود با:

$$\mathscr{E} = -N\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad \text{(پیچهٔ با } N \text{ دور سیم)} \qquad (۷\text{-}۳۱)$$

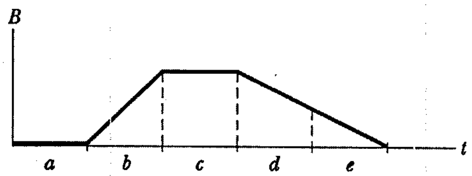
روشهایی که به طور کلی با آنها می‌توان شار مغناطیسی گذرنده از یک پیچه را تغییر داد عبارت‌اند از:

۱. تغییر دادن بزرگی میدان مغناطیسی B، درون پیچه.

۲. تغییر دادن مساحت یا بخشی از مساحت پیچه که در میدان مغناطیسی قرار می‌گیرد (مثلاً، با گشاد کردن حلقه‌های پیچه یا لغزاندن آن به درون یا به بیرون میدان).

۳. تغییر دادن زاویهٔ بین بردار میدان مغناطیسی $\vec{B}$ و سطح پیچه (مثلاً، با چرخاندن پیچه به طوری که میدان $\vec{B}$ ابتدا عمود بر صفحهٔ پیچه و سپس در صفحهٔ پیچه قرار گیرد).

خودآزمایی ۱: نمودار زیر، تغییرات بزرگی $B(t)$، میدان مغناطیسی یکنواخت موجود در سرتاسر یک حلقهٔ رسانا و عمود بر صفحهٔ حلقه را نشان می‌دهد. پنج ناحیهٔ این نمودار را با توجه به بزرگی نیروی محرک الکتریکی القا شده در حلقه، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



مسألهٔ نمونهٔ ۳۱-۱

سیملولهٔ دراز S نشان داده شده (به صورت مقطع) در شکل ۳۱-۳، دارای ۲۲۰ دور سیم در هر سانتی‌متر و حامل جریان i=۱٫۵A است. قطر سیملوله D، برابر با ۳٫۲cm است. در مرکز این سیملوله پیچه‌ای با سیم‌های تنگ هم پیچیده شده ۱۳۰ دوری C، به قطر d=۲٫۱cm قرار می‌گیرد. جریان سیملوله در مدت ۲۵ms با آهنگی پایا به صفر کاهش داده می‌شود. بزرگی نیروی محرک الکتریکی القا شده در پیچهٔ C هنگام تغییر یافتن جریان سیملوله چقدر است؟

حل: در اینجا **نکته‌های کلیدی** عبارت‌اند از:

۱. پیچهٔ C با قرار گرفتن در درون سیملوله، در میدان مغناطیسی تولید شده توسط جریان i سیملوله واقع می‌شود. بنابراین، از پیچهٔ C شار مغناطیسی Φ_B عبور می‌کند.

۲. چون جریان i کاهش می‌یابد، شار مغناطیسی Φ_B نیز کاهش می‌یابد.

۳. در حین کاهش یافتن Φ_B، طبق قانون فارادی در پیچهٔ C نیروی محرک الکتریکی $\mathscr{E}$ القا می‌شود.

چون پیچهٔ C بیش از یک دور سیم دارد از قانون فارادی به صورت معادلهٔ

۳۱-۷ ($\mathscr{E}=-Nd\Phi_B/dt$) استفاده می‌شود، که در آن تعداد دورها ۱۳۰ و $d\Phi_B/dt$ آهنگ تغییر شار در هر دور است.

چون در سیملوله جریان با آهنگ پایا کاهش می‌یابد، شار مغناطیسی Φ_B نیز با آهنگ پایا کاهش می‌یابد و ما می‌توانیم $d\Phi_B/dt$ را به صورت $\Delta\Phi_B/\Delta t$ بنویسیم. بنابراین، برای محاسبهٔ $\Delta\Phi_B$ لازم است شار پایانی و شار آغازی در دست باشد. شار پایانی $\Phi_{B,f}$ برابر با صفر است زیرا جریان پایانی در سیملوله صفر است. برای پیدا کردن شار آغازی $\Phi_{B,i}$، به دو **نکتهٔ کلیدی** دیگر نیازمندیم:

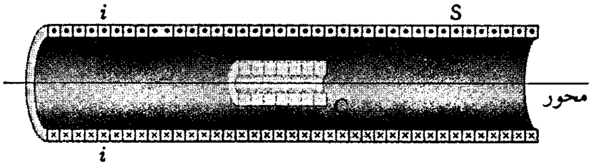
۴. شار مغناطیسی گذرنده از هر دور سیم پیچهٔ C به مساحت A و سمتگیری آن دور در میدان مغناطیسی سیملوله، $\vec{B}$، بستگی دارد. چون $\vec{B}$ یکنواخت و بر سطح با مساحت A عمود است، شار مغناطیسی با استفاده از معادلهٔ ۳۱-۴ ($\Phi_B=BA$) به دست می‌آید.

۵. بزرگی میدان مغناطیسی B، در درون سیملوله، بنا به معادلهٔ ۳۰-۲۵ ($B=\mu_0 in$) به جریان i و تعداد دورهای سیم در یکای طول سیملوله n، بستگی دارد.

در وضعیت شکل ۳۱-۳، A برابر با $\frac{1}{4}\pi d^2$ (مساوی با $3.46\times10^{-4}\text{m}^2$) و n برابر با ۲۲۰ دور سیم در هر سانتی‌متر یا ۲۲۰۰۰ دور سیم در هر متر است. پس، با جانشانی معادلهٔ ۳۰-۲۵ در معادلهٔ ۳۱-۴، داریم

$$\Phi_{B,i} = BA = (\mu_0 in)A$$

$$\Phi_{B,i}=(4\pi\times10^{-7}\text{T.m/A})(1.5\text{A})(22000\ \text{دور}/\text{m})(3.46\times10^{-4}\text{m}^2)$$



شکل ۳۱-۳ مسألهٔ نمونهٔ ۳۱-۱. پیچهٔ C درون سیملولهٔ S، که حامل جریان i است، قرار گرفته است.

$$\Phi_{B,i} = 1.44 \times 10^{-5}\text{Wb}$$

اکنون، می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = \frac{\Phi_{B,f}-\Phi_{B,i}}{\Delta t}$$

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{(0 - 1.44 \times 10^{-5}\text{Wb})}{25 \times 10^{-3}\text{s}}$$

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = -5.76 \times 10^{-4}\text{Wb/s} = -5.76 \times 10^{-4}\text{V}$$

چون فقط بزرگی کمیت‌ها مورد نظر است، در اینجا و در معادلهٔ ۳۱-۷ از علامت منها چشم‌پوشی می‌کنیم و چنین می‌نویسیم:

$$\mathscr{E} = N\frac{d\Phi_B}{dt} = (130\ \text{دور})(5.76 \times 10^{-4}\text{V}) \Rightarrow$$

$$\mathscr{E} = 7.5 \times 10^{-2}\text{V} = 75\text{mV} \qquad \text{(پاسخ)}$$

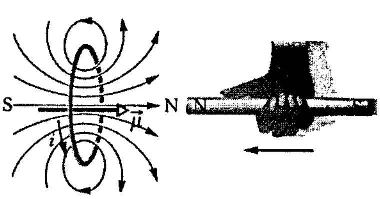
۳۱-۴ قانون لنز

اندکی پس از آنکه فارادی قانون القایش خود را ارائه داد، **هاینریش فریدریش لنز**[1] قاعده‌ـ معروف به **قانون لنز** ـ را برای تعیین جهت جریان القایی در یک حلقه معرفی کرد:

> ◀ جریان القایی در جهتی برقرار می‌شود که میدان مغناطیسی ناشی از جریان با تغییر شار مغناطیسی القاکنندهٔ جریان مخالفت می‌کند.

علاوه بر این، نیروی محرک الکتریکی القایی همسو با جریان القایی است. برای فهمیدن قانون لنز، آن را از دو راه مختلف و هم‌ارز برای شکل ۳۱-۴، که در آن قطب شمال یک آهن‌ربا به سمت یک حلقهٔ رسانا حرکت داده می‌شود، به کار می‌بریم.

۱. **مخالفت با حرکت قطب آهن‌ربا.** نزدیک شدن قطب شمال آهن‌ربا در شکل ۳۱-۴ شار مغناطیسی گذرنده از حلقه را افزایش می‌دهد و در نتیجه در حلقه جریان القا می‌شود. با توجه به شکل ۳۰-۲۱، می‌دانیم که حلقه نیز مانند یک دوقطبی مغناطیسی عمل می‌کند و دارای قطب‌های شمال و جنوب است. جهت و گشتاور دوقطبی مغناطیسی آن $\vec{\mu}$، از جنوب به شمال است. برای مخالفت با افزایش یافتن شار مغناطیسی ناشی از نزدیک شدن آهن‌ربا، قطب شمال حلقه (و در نتیجه $\vec{\mu}$) باید با قطب شمال در حال نزدیک شدن مقابله کند تا آن را براند (شکل ۳۱-۴). پس، قاعدهٔ دست راست پیچ خورده ـ مستقیم برای $\vec{\mu}$ (شکل ۳۰-۲۱) نشان می‌دهد که جهت جریان القا شده در حلقهٔ شکل ۳۱-۴ باید پادساعتگرد باشد.



شکل ۳۱-۴ کاربرد قانون لنز در عمل. در حین حرکت دادن آهن‌ربا به سمت حلقه جریانی در حلقه القا می‌شود. این جریان میدان مغناطیسی مربوط به خود را با گشتاور دوقطبی مغناطیسی $\vec{\mu}$ در جهتی تولید می‌کند که با حرکت آهن‌ربا مخالفت کند. بنابراین، جریان القایی، همان طور که نشان داده شده است، باید در جهت پادساعتگرد باشد.

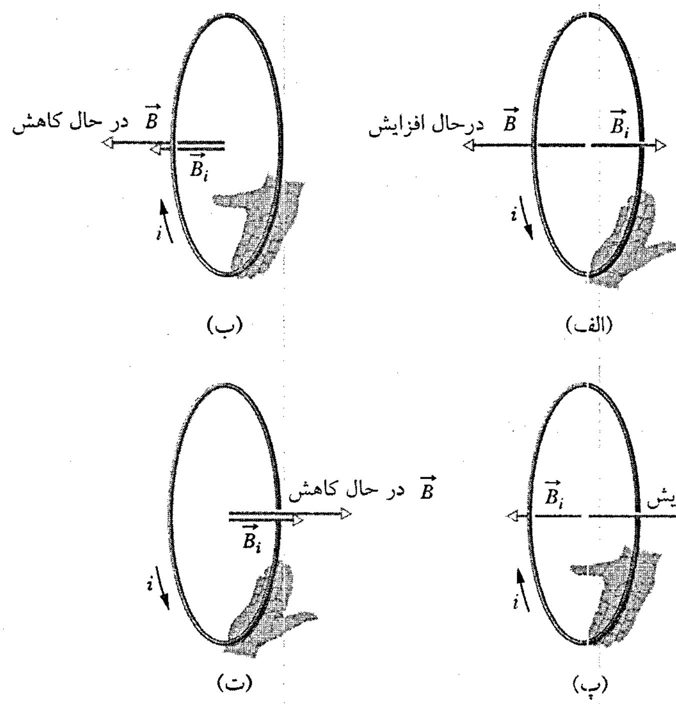
1. Heinrich Friedrich Lenz

حال اگر آهن‌ربا را از حلقه دور کنیم باز هم در حلقه جریانی القا می‌شود. اما این بار حلقه دارای یک قطب جنوب در مقابل قطب شمال آهن‌ربا خواهد بود، که با تأثیر آن مخالفت می‌کند. بنابراین، جریان القا شده در جهت ساعتگرد خواهد بود.

۲. **مخالفت با تغییر کردن شار.** در شکل ۳۱-۴، که در آغاز آهن‌ربا در فاصلهٔ دور قرار دارد، شار مغناطیسی از حلقه عبور نمی‌کند. وقتی قطب شمال آهن‌ربا به حلقه نزدیک می‌شود و جهت میدان مغناطیسی آن $\vec{B}$، به سمت چپ است، شار گذرنده از حلقه افزایش می‌یابد. برای مخالفت با این افزایش شار باید جریان القایی i میدان مغناطیسی $\vec{B}_i$ را به سمت راست، مطابق شکل ۳۱-۵ الف، در درون حلقه ایجاد کند. در نتیجه، شار میدان مغناطیسی $\vec{B}_i$، که به سمت راست است، با افزایش شار در حال افزایش میدان $\vec{B}$، که به سمت چپ است، مخالفت می‌کند. قاعدهٔ دست راست پیچ خورده ـ مستقیم در شکل ۳۰-۲۱ نشان می‌دهد که جهت i در شکل ۳۱-۵ الف، باید پادساعتگرد باشد.

توجه کنید که شار میدان $\vec{B}_i$ همیشه با تغییر شار میدان $\vec{B}$ مخالفت می‌کند. اما این بدان معنا نیست که $\vec{B}_i$ همیشه در سوی مخالف $\vec{B}$ است. برای مثال، اگر آهن‌ربا را از حلقه دور کنیم شار Φ_B ناشی از آهن‌ربا که از حلقه می‌گذرد، باز هم به سمت چپ است اما در حال کاهش یافتن است. در این حالت شار B_i در درون حلقه باید به سمت چپ باشد تا، مطابق شکل ۳۱-۵ ب، با کاهش یافتن Φ_B مخالفت کند. بنابراین، در چنین حالتی $\vec{B}_i$ و $\vec{B}$ همسوی‌اند.

شکل‌های ۳۱-۵ پ و ت، شرایطی را نشان می‌دهند که در آنها قطب جنوب آهن‌ربا، به ترتیب، به حلقه نزدیک و از آن دور می‌شود.



شکل ۳۱-۵ جهت جریان القا شده در حلقه i، به گونه‌ای است که میدان مغناطیسی آن جریان $\vec{B}_i$، با تغییر کردن $\vec{B}$، میدان مغناطیسی القا کنندهٔ i، مخالفت می‌کند. جهت میدان $\vec{B}_i$ همیشه برخلاف جهت افزایش یافتن میدان $\vec{B}$ (شکل‌های الف و پ) و در جهت کاهش یافتن میدان $\vec{B}$ (شکل‌های ب و ت) است. قاعدهٔ دست راست پیچ خورده ـ مستقیم، جهت جریان القایی را بر مبنای جهت میدان مغناطیسی القایی مشخص می‌کند.

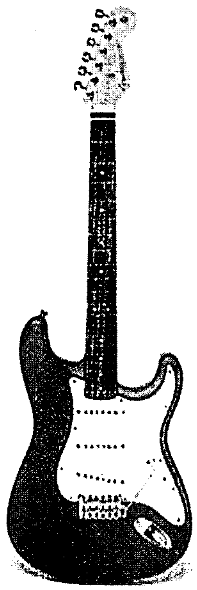
گیتارهای الکتریکی

شکل ۳۱ـ۶، تصویری از یک استراتوکاستر[1] را، که نوعی گیتار الکتریکی است، نشان می‌دهد. این گیتار توسط **جیمی هندریکس**[2] و بسیاری نوازنده‌های دیگر مورد استفاده قرار گرفته است. در حالی که صدای یک گیتار آکوستیکی به تشدید آکوستیکی ناشی از نوسان‌های تارهای مرتعش در بدنهٔ توخالی (جعبهٔ تشدید) یک آلت موسیقی بستگی دارد، گیتار الکتریکی سازی توپر است و در بدنهٔ آن هیچ تشدیدی ایجاد نمی‌شود. در عوض، نوسان تارهای فلزی توسط «پیک آپ‌های» الکتریکی به صورت سیگنال به یک تقویت کننده و از آنجا به مجموعهٔ بلندگوها فرستاده می‌شود.

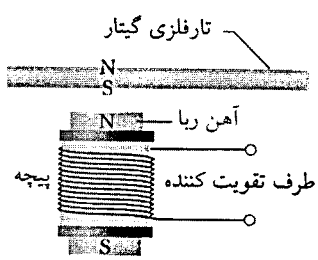
شکل ۳۱ـ۷، ساختار اصلی یک پیک آپ گیتار را نشان می‌دهد. سیم متصل کنندهٔ آلت موسیقی به تقویت کننده روی یک آهن‌ربای کوچک پیچیده شده است. میدان مغناطیسی آهن‌ربا در بخشی از تار فلزی واقع در بالای آهن‌ربا یک قطب شمال و یک قطب جنوب به وجود می‌آورد. پس، این بخش از تار نیز خود دارای میدان مغناطیسی است. وقتی به تار مضراب زده می‌شود و آن را به نوسان در می‌آورد، حرکت تار نسبت به پیچه شار میدان مغناطیسی گذرنده از پیچه را تغییر می‌دهد و در پیچه جریانی القا می‌شود. در حین نوسان کردن تار و دور و نزدیک شدن آن نسبت به پیچه جهت جریان القایی با همان بسامد نوسان تار تغییر می‌کند و سیگنالی با این بسامد به تقویت کننده و بلندگو منتقل می‌شود.

در گیتار استراتوکاستر سه گروه پیک آپ وجود دارد که در نزدیکی انتهای تارها (در بخش وسیعی از بدنهٔ گیتار) واقع‌اند. آن گروه از پیک آپ‌ها که به انتهای تارها نزدیک‌ترند می‌توانند نوسان‌های با بسامد بالای تارها و آن گروه از پیک آپ‌ها که دورتر از انتهای تارها قرار دارند، می‌توانند نوسان‌های با بسامد پایین تارها را بهتر آشکار کنند. با استفاده از کلید قطع و وصل روی گیتار نوازنده می‌تواند هر گروه یا یک زوج از گروه‌های پیک آپ‌ها را انتخاب کند و سیگنال‌های ایجاد شده را به تقویت کننده و بلندگوها بفرستد.

هندریکس برای داشتن کنترل بیشتر بر نوازندگی گاهی سیم روی پیچه‌های پیک آپ گیتار خود را باز می‌کرد تا تعداد دورهای سیم را تغییر دهد. او، به این وسیله مقدار نیروی محرک الکتریکی القا شده در پیچه‌ها و در نتیجه، حساسیت نسبی آنها را نسبت به نوسان‌های تار تغییر می‌داد. حتی بدون این مزیت هم می‌توان دریافت که گیتار الکتریکی تا چه حد امکان کنترل بیشتر روی صدا را نسبت به کیفیت حاصل از گیتار آکوستیکی فراهم می‌کند.

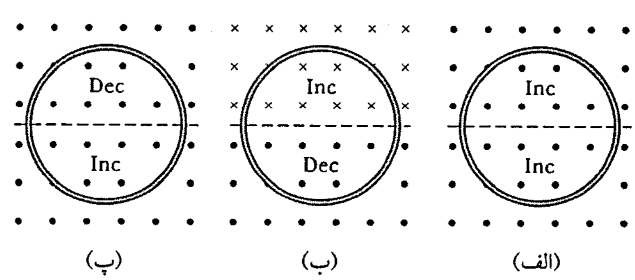


شکل ۳۱ـ۶ گیتار الکتریکی استراتوکاستر دارای سه گروه پیک آپ الکتریکی است، که هر گروه شامل شش پیک آپ (در بخش وسیع از بدنهٔ گیتار) است. یک کلید قطع و وصل (واقع در پایین گیتار) به نوازنده این امکان را می‌دهد که مشخص کند کدام گروه از پیک آپ‌ها باید سیگنال‌ها را به تقویت کننده و از آنجا به سیستم بلندگو بفرستند.



شکل ۳۱ـ۷ تصویر جانبی یک پیک آپ گیتار الکتریکی. وقتی تار فلزی (که مانند یک آهن‌ربا عمل می‌کند) به نوسان در می‌آید، در شار مغناطیسی تغییر ایجاد می‌کند و باعث تولید جریان القایی در پیچه می‌شود.

خودآزمایی ۲: شکل زیر، سه وضعیت را نشان می‌دهد که در آنها حلقه‌های رسانای دایره‌ای مشابهی در میدان‌های مغناطیسی یکنواخت قرار گرفته‌اند و بزرگی این میدان‌ها با آهنگ‌های یکسان در حال افزایش یافتن (Inc) یا در حال کاهش یافتن (Dec) است. در هر وضعیت، خط‌چین رسم شده بر قطر حلقه منطبق است. این وضعیت‌ها را با توجه به بزرگی جریان القا شده در حلقه‌ها، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



1. Stratocaster 2. Jimi Hendrix

مسألهٔ نمونهٔ ۳۱ـ۲

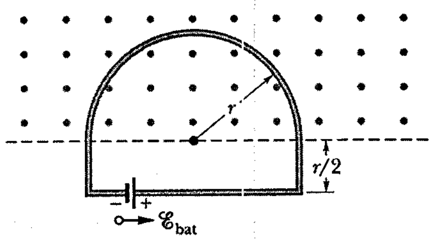
شکل ۳۱ـ۸، یک حلقهٔ رسانا شامل نیمدایره‌ای به شعاع $r=0{,}20\,m$ و سه بخش مستقیم را نشان می‌دهد. نیمدایره در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$، که در برون سوی صفحهٔ شکل است، قرار دارد. بزرگی میدان مغناطیسی از معادلهٔ $B=4{,}0t^2+2{,}0t+3{,}0$ به دست می‌آید، که در آن B برحسب تسلا و t برحسب ثانیه است. یک باتری آرمانی با نیروی محرک الکتریکی $\mathscr{E}_{bat}=2{,}0\,V$ به این حلقه وصل شده است. مقاومت حلقه $2{,}0\,\Omega$ است.

(الف) بزرگی و جهت نیروی محرک الکتریکی القایی $\mathscr{E}_{ind}$ ایجاد شده در حلقه در زمان $t=10\,s$ توسط میدان $\vec{B}$ چیست؟

حل: در اینجا **نکتهٔ کلیدی** این است که طبق قانون فارادی بزرگی $\mathscr{E}_{ind}$ برابر با $d\Phi/dt$، آهنگ تغییر شار مغناطیسی گذرنده از حلقه است. **نکتهٔ کلیدی** دوم این است که شار گذرنده از حلقه به مساحت سطح حلقه A، و سمتگیری آن در میدان مغناطیسی $\vec{B}$ بستگی دارد. چون $\vec{B}$ یکنواخت و بر صفحهٔ حلقه عمود است شار مغناطیسی از معادلهٔ ۳۱ـ۴ ($\Phi_B = BA$) به‌دست می‌آید. با استفاده از این معادله و دانستن این نکته که فقط بزرگی میدان B برحسب زمان تغییر می‌کند (نه مساحت A) معادلهٔ قانون فارادی، یعنی معادلهٔ ۳۱ـ۶، را دوباره چنین می‌نویسیم:

$$\mathscr{E}_{ind} = \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{d(BA)}{dt} = A\frac{dB}{dt}$$

نکتهٔ کلیدی سوم این است که چون شار مغناطیسی فقط در قسمت نیمدایره



شکل ۳۱ـ۸ مسألهٔ نمونهٔ ۳۱ـ۲. یک باتری به حلقهٔ رسانایی شامل نیمدایره‌ای به شعاع r، که در میدان مغناطیسی یکنواخت واقع شده، وصل شده است. میدان مغناطیسی در برون سوی صفحهٔ شکل است و بزرگی آن تغییر می‌کند.

به حلقه نفوذ می‌کند، مساحت A در معادله برابر با $\frac{1}{2}\pi r^2$ است. با جانشانی این مقدار در رابطهٔ به دست آمده برای B، داریم

$$\mathscr{E}_{ind} = A\frac{dB}{dt} = \frac{\pi r^2}{2}\frac{d}{dt}(4{,}0t^2+2{,}0t+3{,}0)$$

$$\mathscr{E}_{ind} = \frac{\pi r^2}{2}(8{,}0t+2{,}0)$$

در نتیجه، در زمان $t=10\,s$، خواهیم داشت

$$\mathscr{E}_{ind} = \frac{\pi(0{,}20\,m)^2}{2}[8{,}0(10)+2{,}0] \quad \Rightarrow$$

$$\mathscr{E}_{ind} = 5{,}152\,V \approx 5{,}2\,V \qquad \text{(پاسخ)}$$

برای تعیین جهت $\mathscr{E}_{ind}$، نخست توجه می‌کنیم که در شکل ۳۱ـ۸ شار مغناطیسی گذرنده از حلقه در برون سوی صفحهٔ شکل و در حال افزایش است. بنابراین، **نکتهٔ کلیدی** این است که میدان القایی B_i (ناشی از جریان القایی) باید با این افزایش مخالفت کند، و از این رو در درون سوی صفحهٔ شکل است. با استفاده از قاعدهٔ دست راست پیچ خورده ـ مستقیم (شکل ۳۰ـ۷ پ)، معلوم می‌شود که جریان القایی در حلقه باید در جهت ساعتگرد باشد. در نتیجه، جهت نیروی محرک الکتریکی القایی $\mathscr{E}_{ind}$ هم باید ساعتگرد باشد.

(ب) جریان در حلقه در لحظهٔ $t=10\,s$ چقدر است؟

حل: در اینجا **نکتهٔ کلیدی** این است که دو نیروی محرک الکتریکی میل دارند بارهای الکتریکی را در حلقه به حرکت در آورند. نیروی محرک الکتریکی القایی $\mathscr{E}_{ind}$، می‌خواهد در حلقه جریانی در جهت ساعتگرد برقرار کند؛ نیروی محرک الکتریکی باتری $\mathscr{E}_{bat}$، هم می‌خواهد جریانی در جهت پادساعتگرد تولید کند. چون $\mathscr{E}_{ind}$ بزرگتر از $\mathscr{E}_{bat}$ است نیروی محرک الکتریکی برایند $\mathscr{E}_{net}$، در جهت ساعتگرد و جریان نیز در همان جهت است. برای پیدا کردن جریان زمان در $t=10\,s$، از معادلهٔ ۲۸ـ۲ ($i=\mathscr{E}/R$) استفاده می‌کنیم:

$$i = \frac{\mathscr{E}_{net}}{R} = \frac{\mathscr{E}_{ind}-\mathscr{E}_{bat}}{R} = \frac{5{,}152\,V-2{,}0\,V}{2{,}0\,\Omega} \quad \Rightarrow$$

$$i = 1{,}58\,A \approx 1{,}6\,A \qquad \text{(پاسخ)}$$

مسألهٔ نمونهٔ ۳۱ـ۳

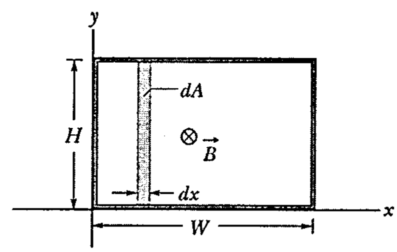
شکل ۳۱ـ۹، حلقهٔ سیمی مستطیل شکلی را نشان می‌دهد که در میدان مغناطیسی نایکنواخت و متغیر $\vec{B}$ قرار دارد و این میدان بر صفحهٔ شکل عمود و در درون سوی آن است. بزرگی میدان از معادلهٔ $B=4t^2x^2$ به دست می‌آید، که در آن B برحسب تسلا، t برحسب ثانیه و x برحسب متر است. این حلقه دارای پهنای $W=3{,}0\,m$ و ارتفاع $H=2{,}0\,m$ است. بزرگی و جهت نیروی محرک الکتریکی القایی $\mathscr{E}$ در حلقه در زمان $t=0{,}10\,s$ چیست؟

حل: یک **نکتهٔ کلیدی** این است که چون بزرگی میدان مغناطیسی $\vec{B}$ برحسب زمان تغییر می‌کند شار مغناطیسی گذرنده از حلقه نیز تغییر می‌کند. **نکتهٔ کلیدی** دوم این است که طبق قانون فارادی، شار متغیر در حلقه یک نیروی محرک الکتریکی به صورت $\mathscr{E}=d\Phi_B/dt$ القا می‌کند.

برای استفاده از قانون فارادی باید رابطهٔ مربوط به شار Φ_B را در هر لحظهٔ t به دست آوریم. اما **نکتهٔ کلیدی** سوم این است که چون B در مساحت محصور شده توسط حلقه یکنواخت نیست، نمی‌توان برای پیدا کردن این

رابطه از معادلهٔ ۳۱-۴ ($\Phi_B=BA$) استفاده کرد؛ در اینجا باید معادلهٔ ۳۱-۳ ($\Phi_B=\int \vec{B}.d\vec{A}$) را به کار ببریم.

در شکل ۳۱-۹، میدان مغناطیسی $\vec{B}$ بر صفحهٔ حلقه عمود (و در نتیجه، موازی با بردار دیفرانسیلی سطح $d\vec{A}$) است. پس، حاصل‌ضرب نقطه‌ای در معادلهٔ ۳۱-۳ برابر با BdA است. چون میدان مغناطیسی برحسب مختصهٔ x، و نه برحسب مختصهٔ y، تغییر می‌کند، مساحت دیفرانسیلی dA را می‌توان برابر با مساحت یک نوار قائم به ارتفاع H و پهنای dx (مطابق شکل ۳۱-۹) در نظر گرفت. در نتیجه، داریم $dA=Hdx$، و شار مغناطیسی گذرنده از حلقه



شکل ۳۱-۹ مسألهٔ نمونهٔ ۳۱-۳. حلقهٔ رسانای بسته‌ای به پهنای W و ارتفاع H، در میدان مغناطیسی نایکنواخت متغیر، که در درون سوی صفحهٔ شکل است، قرار دارد. برای به کار بردن قانون فارادی از یک نوار قائم به ارتفاع H، پهنای dx و مساحت dA، استفاده می‌کنیم.

برابر است با:

$$\Phi_B = \int \vec{B}\,.\,d\vec{A} = \int BdA = \int BHdx = \int ۴t^۲x^۲Hdx$$

اگر برای این انتگرال t را ثابت و حدود انتگرال‌گیری را $x=۰$ و $x=۳٫۰\,\text{m}$ بگیریم، داریم

$$\Phi_B = ۴t^۲H\int_۰^{۳٫۰} x^۲dx = ۴t^۲H\left[\frac{x^۳}{۳}\right]_۰^{۳٫۰} = ۷۲t^۲$$

که در آن مقدار $H=۲٫۰\,\text{m}$ جانشانی شده و Φ_B برحسب وبر است. اکنون برای پیدا کردن بزرگی $\mathscr{E}$ در هر زمان t می‌توان از قانون فارادی استفاده کرد:

$$\mathscr{E} = \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{d(۷۲t^۲)}{dt} = ۱۴۴t$$

که در آن $\mathscr{E}$ برحسب ولت است. در زمان $t=۰٫۱۰\,\text{s}$، داریم

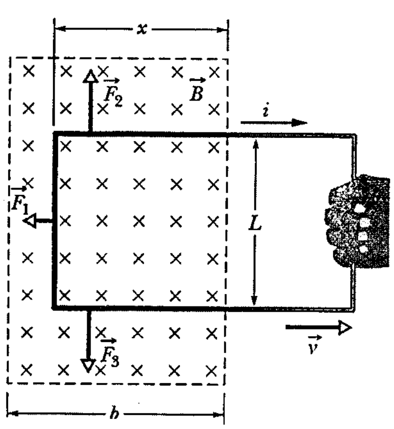
$$\mathscr{E} = (۱۴۴\,\text{V/s})(۰٫۱۰\,\text{s}) \approx ۱۴\,\text{V}$$ **(پاسخ)**

شار میدان مغناطیسی $\vec{B}$ گذرنده از حلقه در شکل ۳۱-۹، در درون سوی صفحهٔ شکل و از لحاظ بزرگی در حال افزایش است، زیرا بزرگی B برحسب زمان افزایش پیدا می‌کند. بنا به قانون لنز، میدان B_i ناشی از جریان القایی باید با این افزایش مخالفت کند و بدین جهت باید در برون سوی صفحهٔ شکل باشد. بنابراین، قاعدهٔ دست راست پیچ خورده ـ مستقیم نشان می‌دهد که جریان القایی در حلقه در جهت پادساعتگرد، و در نتیجه نیروی محرک الکتریکی القایی $\mathscr{E}$ نیز در همان جهت است.

۳۱-۵ القایش و انتقال انرژی

طبق قانون لنز، چه آهن‌ربا را به سمت حلقهٔ شکل ۳۱-۱ نزدیک و چه از آن دور کنیم، یک نیروی مغناطیسی با حرکت مخالفت می‌کند و نیرویی که ما وارد می‌کنیم باید کار مثبت انجام دهد. در همین موقع، در مادهٔ حلقه انرژی گرمایی تولید می‌شود، زیرا ماده در مقابل جریان القا شدهٔ ناشی از حرکت مقاومت الکتریکی از خود نشان می‌دهد. انرژی‌ای که از طریق نیروی وارد شده به سیستم حلقهٔ بسته + آهن‌ربا منتقل می‌کنیم صرف انرژی گرمایی می‌شود. (فعلاً از انرژی‌ای که در حین القایش به صورت موج‌های الکترومغناطیسی از حلقه تابش می‌کند، چشم‌پوشی می‌کنیم). هر چه آهن‌ربا را تندتر حرکت دهیم، نیروی وارد شده کار بیشتری انجام می‌دهد و آهنگ تبدیل انرژی به انرژی گرمایی در حلقه بیشتر می‌شود؛ به عبارت دیگر، توان تبدیل انرژی بیشتر است.

بدون توجه به چگونگی القا شدن جریان در یک حلقه، به خاطر وجود مقاومت الکتریکی حلقه، انرژی همیشه در این فرایند به انرژی گرمایی تبدیل می‌شود (مگر آنکه حلقه ابر رسانا باشد). برای مثال، در شکل ۳۱-۲، وقتی کلید S بسته و اندکی جریان در حلقهٔ سمت چپ القا می‌شود، انرژی از باتری منتقل و به انرژی گرمایی در حلقه تبدیل می‌شود.



شکل ۳۱-۱۰ یک حلقهٔ رسانای بسته با سرعت ثابت $\vec{v}$ از میدان مغناطیسی به بیرون کشیده می‌شود. در حین حرکت کردن جریان i در جهت ساعتگرد در حلقه القا می‌شود و به بخش‌هایی از حلقه که هنوز در میدان مغناطیسی قرار دارند نیروهای $\vec{F}_۱$، $\vec{F}_۲$ و $\vec{F}_۳$ وار می‌شوند.

شکل ۳۱-۱۰، وضعیت دیگری را در مورد جریان القایی نشان می‌دهد. در اینجا یک طرف یک حلقهٔ سیم مستطیل شکل به پهنای L در میدان مغناطیسی خارجی یکنواخت عمود بر صفحهٔ حلقه و در درون سوی صفحه، قرار دارد. این میدان را می‌توان، مثلاً، با یک آهن‌ربای الکتریکی بزرگ تولید کرد. در شکل ۳۱-۱۰، خط‌چین‌ها حدود مفروض میدان مغناطیسی را نشان می‌دهند؛ از فریز شدن میدان در کناره‌های مستطیل چشم‌پوشی می‌کنیم. می‌خواهیم این حلقه را با سرعت ثابت $\vec{v}$ به سمت راست بکشیم.

وضعیت شکل ۳۱-۱۰، هیچ تفاوت اساسی با وضعیت شکل ۳۱-۱، ندارد. در هر دو حالت یک آهن‌ربا و یک حلقهٔ رسانا نسبت به هم حرکت می‌کنند و شار میدان مغناطیسی گذرنده از حلقه برحسب زمان تغییر

می‌کند. واضح است که شار مغناطیسی در شکل ۳۱ـ۱ به خاطر تغییر کردن $\vec{B}$ و در شکل ۳۱ـ۱۰ به خاطر تغییر کردن مساحتی از حلقه که در میدان مغناطیسی وجود دارد، تغییر می‌کند، اما این اختلاف‌ها اهمیتی ندارند. تفاوت مهم میان این دو آرایش این است که آرایش شکل ۳۱ـ۱۰ انجام دادن محاسبات را آسان‌تر می‌کند. اکنون آهنگ انجام دادن کار مکانیکی را هنگام کشیدن حلقه به صورت پایا در شکل ۳۱ـ۱۰، حساب می‌کنیم.

چنانکه خواهیم دید، برای کشیدن حلقه با سرعت ثابت $\vec{v}$ باید نیروی ثابت $\vec{F}$ را به حلقه وارد کنیم، زیرا یک نیروی مغناطیسی مخالف و با بزرگی مساوی به حلقه وارد می‌شود تا با نیروی ما مخالفت کند. بنابراین، آهنگ انجام دادن کار با استفاده از معادلهٔ ۷ـ۴۸ برابر است با:

$$P = Fv \qquad (۳۱ـ۸)$$

که در آن F بزرگی نیرویی است که وارد می‌کنیم. می‌خواهیم برای P رابطه‌ای برحسب بزرگی میدان مغناطیسی B، و مشخصات حلقه ـ یعنی مقاومت الکتریکی R و پهنای L آن، به دست آوریم.

در حین حرکت دادن حلقه به سمت راست در شکل ۳۱ـ۱۰، بخشی از مساحت آن که در میدان مغناطیسی واقع است، کاهش می‌یابد. در نتیجه، شار مغناطیسی گذرنده از حلقه نیز کاهش پیدا می‌کند و طبق قانون لنز در حلقه جریانی تولید می‌شود. وجود این جریان باعث ایجاد نیرویی می‌شود که با کشیدن حلقه مخالفت می‌کند.

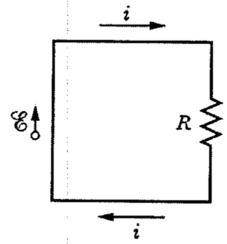
برای پیدا کردن این جریان، نخست از قانون فارادی استفاده می‌کنیم. اگر x طول حلقهٔ واقع در میدان مغناطیسی باشد مساحت حلقهٔ واقع در آن میدان، Lx است. در نتیجه، با استفاده از معادلهٔ ۳۱ـ۴، بزرگی شار مغناطیسی گذرنده از حلقه برابر است با:

$$\Phi_B = BA = BLx \qquad (۳۱ـ۹)$$

هرگاه x کاهش یابد شار مغناطیسی نیز کاهش می‌یابد. بنا به قانون فارادی، این کاهش شار مغناطیسی یک نیروی محرک الکتریکی در حلقه القا می‌کند. با حذف کردن علامت منها در معادلهٔ ۳۱ـ۶ و استفاده از معادلهٔ ۳۱ـ۹، بزرگی این نیروی محرک الکتریکی را می‌توان چنین به دست آورد:

$$\mathscr{E} = \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{d}{dt}BLx = BL\frac{dx}{dt} = BLv \qquad (۳۱ـ۱۰)$$

که در آن dx/dt به جای v تندی حرکت حلقه، قرار داده شده است.



شکل ۳۱ـ۱۱ نمودار مداری حلقهٔ شکل ۳۱ـ۱۰، در حین حرکت دادن حلقه.

شکل ۳۱ـ۱۱، حلقهٔ مورد نظر را به صورت یک مدار نشان می‌دهد: نیروی محرک الکتریکی القایی $\mathscr{E}$، در سمت چپ و مقاومت وابسته به R، در سمت راست مدار نمایش داده شده است. جهت جریان القایی i از قاعدهٔ دست راست، طبق شکل ۳۱ـ۵ ب، معین می‌شود و $\mathscr{E}$ نیز در همان جهت است.

برای پیدا کردن بزرگی جریان القایی، قاعدهٔ حلقه را در مورد اختلاف پتانسیل‌های یک مدار نمی‌توان به کار برد، زیرا چنانکه در بخش ۳۱ـ۶ خواهیم دید، ما نمی‌توانیم اختلاف پتانسیل مربوط به نیروی محرک الکتریکی القایی را تعریف کنیم. اما همان طور که در مسألهٔ نمونهٔ ۳۱ـ۲ دیدیم، می‌توانیم از معادلهٔ $i=\mathscr{E}/R$ استفاده کنیم. با استفاده از معادلهٔ ۳۱ـ۱۰، داریم

$$i = \frac{BLv}{R} \qquad (۳۱ـ۱۱)$$

چون سه بخش از حلقهٔ شکل ۳۱ـ۱۰ حامل این جریان در میدان مغناطیسی هستند، نیروهای منحرف کنندهٔ جانبی بر این بخش‌ها اثر می‌کنند. با توجه به معادلهٔ ۲۹ـ۲۶ می‌دانیم که چنین نیروی منحرف کننده‌ای برابر است با:

$$\vec{F}_d = i\vec{L} \times \vec{B} \qquad (۳۱ـ۱۲)$$

در شکل ۳۱ـ۱۰، نیروهای منحرف کنندهٔ وارد بر سه بخش حلقه با $\vec{F}_1$، $\vec{F}_2$ و $\vec{F}_3$ مشخص شده‌اند. اما توجه کنید که به خاطر وجود تقارن، نیروهای $\vec{F}_2$ و $\vec{F}_3$ از نظر بزرگی مساوی‌اند و یکدیگر را خنثی می‌کنند. در نتیجه، فقط نیروی $\vec{F}_1$ می‌ماند که در سوی مخالف نیروی $\vec{F}$ است که به حلقه وارد می‌کنیم و از این رو نیرویی است که با ما مخالفت می‌کند. پس، $\vec{F}=-\vec{F}_1$.

با استفاده از معادلهٔ ۳۱ـ۱۲ برای تعیین بزرگی $\vec{F}_1$ و دانستن این نکته که زاویهٔ میان $\vec{B}$ و $\vec{L}$، بردار طولی

مربوط به بخش سمت چپ حلقه، ۹۰ درجه است، می‌توان نوشت

$$F = F_1 = iLB\sin 90° = iLB \qquad (۱۳\text{-}۳۱)$$

مقدار i را از معادلهٔ ۳۱-۱۱ در معادلهٔ ۳۱-۱۳ جانشانی می‌کنیم:

$$F = \frac{B^2L^2v}{R} \qquad (۱۴\text{-}۳۱)$$

چون B، L و R ثابت‌اند، تندی حرکت حلقه نیز ثابت است، به شرط آنکه F، نیرویی که بر حلقه وارد می‌کنیم، ثابت باشد.

با جانشانی معادلهٔ ۳۱-۱۴ در معادله ۳۱-۸، آهنگ کاری که روی حلقه هنگام بیرون کشیدن آن از میدان مغناطیسی انجام می‌دهیم به دست می‌آید:

$$P = Fv = \frac{B^2L^2v^2}{R} \qquad \text{(آهنگ انجام دادن کار)} \qquad (۱۵\text{-}۳۱)$$

برای کامل کردن این تحلیل، آهنگ ظاهر شدن انرژی گرمایی در حلقه را هنگام کشیدن با تندی ثابت، پیدا می‌کنیم. این مقدار با استفاده از معادلهٔ ۲۷-۲۲ به دست می‌آید:

$$P = i^2R \qquad (۱۶\text{-}۳۱)$$

با جانشانی مقدار i از معادلهٔ ۳۱-۱۱، داریم

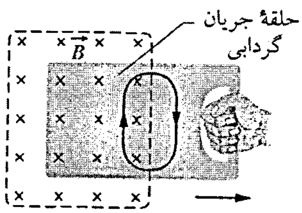
$$P = \left(\frac{BLv}{R}\right)^2 R = \frac{B^2L^2v^2}{R} \qquad \text{(آهنگ انرژی گرمایی)} \qquad (۱۷\text{-}۳۱)$$

این مقدار دقیقاً برابر با آهنگ انجام دادن کار بر روی حلقه (معادلهٔ ۳۱-۱۵) است. بنابراین، کاری که هنگام بیرون کشیدن حلقه از میدان مغناطیسی انجام می‌دهیم، به صورت انرژی گرمایی در حلقه ظاهر می‌شود.

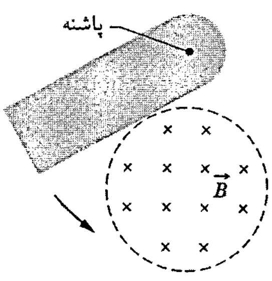
جریان‌های گردابی

فرض کنید به جای حلقهٔ رسانا در شکل ۳۱-۱۰، یک ورقهٔ رسانای صُلب به کار ببریم. حال اگر ورقه را مانند حلقه به برون سوی میدان مغناطیسی حرکت دهیم (شکل ۳۱-۱۲ الف) در اینجا هم حرکت نسبی میدان و ورقهٔ رسانا جریانی را در رسانا القا می‌کند. بنابراین، باز هم با یک نیرویی مخالفت کننده مواجه می‌شویم و باید به خاطر وجود جریان القایی کار انجام دهیم. اما در ورقه الکترون‌های رسانش تشکیل دهندهٔ جریان القایی، همانند حلقه، مسیر معینی را دنبال نمی‌کنند. بلکه، الکترون‌ها در درون ورقه حرکت دورانی انجام می‌دهند، درست مانند اینکه در گردابی گرفتار شده باشند. چنین جریانی را **جریان گردابی** می‌نامند و می‌توان آن را، مطابق شکل ۳۱-۱۲ الف، به صورتی که تک مسیری را دنبال می‌کند نمایش داد.

جریان القا شده در ورقه، نظیر حلقهٔ رسانای شکل ۳۱-۱۰، سبب می‌شود که انرژی مکانیکی به صورت انرژی گرمایی تلف شود. این اتلاف انرژی در آرایش شکل ۳۱-۱۲ ب بارزتر است. در این شکل یک ورقهٔ رسانا می‌تواند آزادانه حول یک پاشنه بچرخد و مانند یک آونگ در یک میدان مغناطیسی نوسان کند. هر بار که ورقه به ناحیهٔ میدان وارد و از آن خارج می‌شود، بخشی از انرژی مکانیکی‌اش به انرژی گرمایی تبدیل می‌شود. پس از چند نوسان، دیگر انرژی مکانیکی‌ای باقی نمی‌ماند و ورقهٔ گرم شده از پاشنه به حالت آویخته در می‌آید.



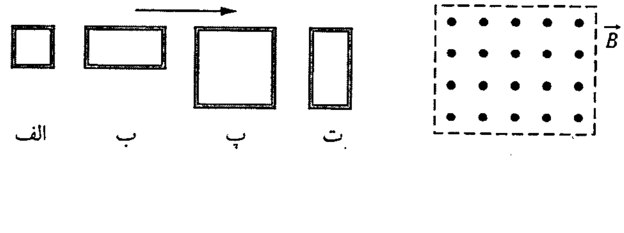
(الف)



(ب)

شکل ۳۱-۱۲ (الف) هرگاه ورقهٔ رسانای صُلبی را از یک میدان مغناطیسی به بیرون بکشیم، در ورقه جریان‌های **گردابی** القا می‌شوند. در این شکل یک حلقهٔ نوعی از جریان گردابی نشان داده شده است. (ب) ورقهٔ رسانایی در ناحیه‌ای شامل میدان مغناطیسی مانند یک آونگ حول یک پاشنه آزادانه نوسان می‌کند. در حین وارد شدن ورقه به ناحیهٔ میدان یا خارج شدن از آن جریان‌های گردابی در ورقه القا می‌شوند.

خودآزمایی ۳: شکل زیر، چهار حلقهٔ سیمی به ضلع‌های L یا $2L$ را نشان می‌دهد. هر چهار حلقه را با سرعت ثابت یکسان به ناحیه‌ای از میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ (که در برون سوی صفحهٔ شکل است) حرکت می‌دهیم. این چهار حلقه را با توجه به بزرگی بیشینهٔ نیروی محرک الکتریکی القا شده در حرکت دادن آنها در میدان مغناطیسی، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



۳۱ـ۶ میدان‌های الکتریکی القایی

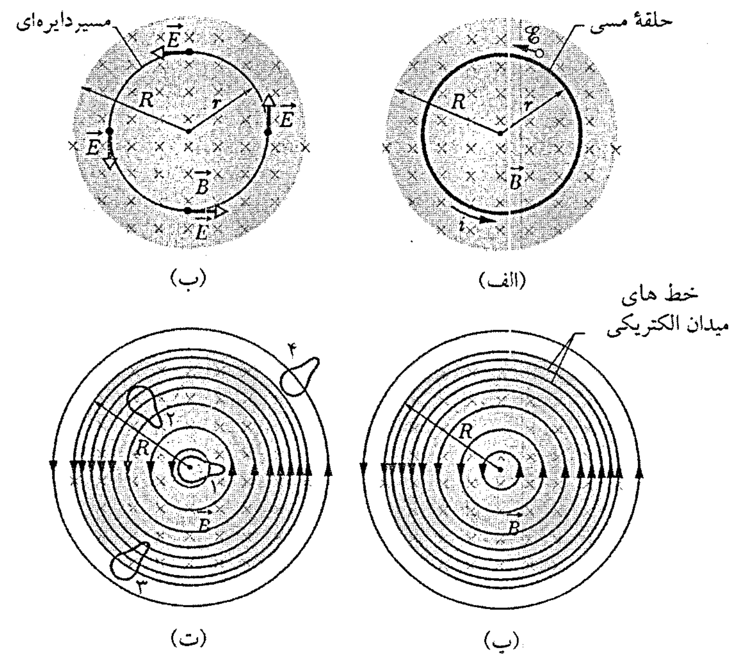
اکنون، یک حلقهٔ مسی به شعاع r را، مطابق شکل ۳۱ـ۱۳ الف، در یک میدان مغناطیسی خارجی یکنواخت قرار می‌دهیم. این میدان ـ با چشم‌پوشی از فریز شدن آن ـ یک حجم استوانه‌ای به شعاع R را در بر می‌گیرد. فرض کنید شدت میدان مغناطیسی با آهنگ پایایی به نحو مناسب، مثلاً با افزایش دادن جریان سیم‌پیچ‌های آهن‌ربای الکتریکی مولد میدان مغناطیسی، افزایش پیدا می‌کند. بدین ترتیب، شار مغناطیسی گذرنده از حلقه با آهنگی پایا تغییر خواهد کرد و، بنا به قانون فارادی، یک نیروی محرک الکتریکی القایی، و در نتیجه، یک جریان القایی در حلقه به وجود خواهد آمد. با توجه به قانون لنز می‌توان دریافت که جریان القایی در شکل ۳۱ـ۱۳ الف در جهت پادساعتگرد است.

هرگاه در حلقهٔ مسی جریانی برقرار شود، باید در طول حلقه یک میدان الکتریکی به وجود آید. این میدان الکتریکی لازم است تا برای حرکت دادن الکترون‌های رسانش کار انجام دهد. علاوه بر این، میدان الکتریکی باید توسط شار مغناطیسی در حال تغییر یافتن تولید شده باشد. این **میدان الکتریکی القایی** $\vec{E}$ عیناً مانند میدان الکتریکی حاصل از بارهای ساکن است؛ هر یک از این میدان‌ها به ذره‌ای با بار q_0 نیروی $q_0\vec{E}$ را وارد می‌کنند.

با این استدلال، قانون القایش فارادی به صورتی مفید و آگاهی بخش چنین بیان می‌شود:

◄ میدان مغناطیسی متغیر میدان الکتریکی تولید می‌کند.

جنبهٔ بارز این گزاره این است که میدان الکتریکی حتی بدون وجود حلقهٔ مسی هم القا می‌شود.



شکل ۳۱ـ۱۳ (الف) اگر میدان مغناطیسی با آهنگی پایا افزایش یابد، همان‌طور که نشان داده شده است، یک جریان القایی ثابت در حلقهٔ مسی به شعاع r ظاهر می‌شود. (ب) حتی اگر حلقه را هم برداریم میدان الکتریکی القایی به وجود می‌آید؛ میدان الکتریکی در چهار نقطه نشان داده شده است. (پ) نقش کامل میدان الکتریکی القایی، که با خط‌های میدان نمایش داده شده است. (ت) نمودار چهار مسیر بسته مشابه، که مساحت‌های یکسانی را محصور کرده‌اند. در مسیرهای ۱ و ۲ که به طور کامل در ناحیه‌ای از میدان مغناطیسی متغیر قرار دارند نیروهای محرک الکتریکی یکسان القا می‌شوند. در مسیر ۳ که تنها بخشی از آن در میدان قرار دارد نیروی محرک الکتریکی کمتری القا می‌شود. در مسیر ۴ که به طور کامل در خارج میدان مغناطیسی واقع است هیچ نیروی محرک الکتریکی‌ای القا نمی‌شود.

برای تثبیت این نظر، شکل ۳۱-۱۳ ب را در نظر می‌گیریم که مانند شکل ۳۱-۱۳ الف است، با این تفاوت که حلقهٔ مسی با یک مسیر دایره‌ای فرضی به شعاع r جانشین شده است. مانند پیش، فرض می‌کنیم که بزرگی میدان مغناطیسی $\vec{B}$ با آهنگ ثابت dB/dt افزایش می‌یابد. میدان الکتریکی القا شده در نقاط مختلف مسیر دایره‌ای ـ به خاطر وجود تقارن ـ همان طور که شکل ۳۱-۱۳ ب نشان می‌دهد، بر دایره مماس است.* از این رو، مسیر دایره‌ای خود یک خط میدان الکتریکی است. چیز خاصی در مورد دایره‌ای به شعاع r وجود ندارد. پس، خط‌های میدان الکتریکی که بر اثر میدان مغناطیسی تولید می‌شوند باید دایره‌های هم مرکزی مانند دایره‌های شکل ۳۱-۱۳ پ، باشند.

تا زمانی که میدان مغناطیسی نسبت به زمان در حال افزایش یافتن است، میدان الکتریکی نشان داده شده با خط‌های میدان دایره‌ای در شکل ۳۱-۱۳ پ، موجود خواهد بود. هرگاه میدان مغناطیسی نسبت به زمان ثابت بماند، میدان الکتریکی القایی، و در نتیجه خط‌های میدان الکتریکی، وجود نخواهد داشت. اگر میدان مغناطیسی نسبت به زمان در حال کاهش یافتن (با آهنگ ثابت) باشد، خط‌های میدان الکتریکی باز هم دایره‌های هم مرکزی مانند شکل ۳۱-۱۳ پ، اما در جهت مخالف، خواهند بود. این، تمام آن چیزی است که وقتی می‌گوییم «میدان مغناطیسی متغیر میدان الکتریکی تولید می‌کند»، در ذهن خود داریم.

باز فرمولبندی قانون فارادی

فرض کنید ذره‌ای با بار q_0 در روی مسیر دایره‌ای شکل ۳۱-۱۳ ب حرکت می‌کند. W، کار انجام شده روی این ذره در هر دور گردش توسط میدان الکتریکی القایی برابر با $\mathscr{E}q_0$ است، که $\mathscr{E}$ نیروی محرک الکتریکی القایی، یعنی، کار انجام شده روی یکای بار الکتریکی در حین حرکت کردن بار آزمون در روی مسیر است. از نقطه نظر دیگر، این کار برابر است با:

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{s} = (q_0 E)(2\pi r) \qquad (۳۱\text{-}۱۸)$$

که در آن $q_0 E$ بزرگی نیروی وارد بر بار آزمون و $2\pi r$ مسافتی است که طی آن نیرو اثر می‌کند. با مساوی هم قرار دادن این دو رابطهٔ کار و حذف کردن q_0، داریم

$$\mathscr{E} = 2\pi r E \qquad (۳۱\text{-}۱۹)$$

در حالت کلی‌تر، برای تعیین کار انجام شده روی یک ذرهٔ با بار q_0 که در یک مسیر بسته حرکت می‌کند، معادلهٔ ۳۱-۱۸ را می‌توان چنین نوشت:

$$W = \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = q_0 \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} \qquad (۳۱\text{-}۲۰)$$

(حلقهٔ روی علامت انتگرال نشان می‌دهد که انتگرال باید روی مسیر بسته گرفته شود). با قرار دادن $\mathscr{E}q_0$ به جای W، داریم

$$\mathscr{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} \qquad (۳۱\text{-}۲۱)$$

محاسبهٔ انتگرال برای حالت خاص شکل ۳۱-۱۳ ب همان معادلهٔ ۳۱-۱۹ را به دست می‌دهد.

با استفاده از معادلهٔ ۳۱-۲۱ می‌توان معنای نیروی محرک الکتریکی القایی را بسط داد. پیش از این، نیروی محرک الکتریکی القایی به معنای کار انجام شده روی یکای بار برای برقرار شدن جریان ناشی از تغییر شار مغناطیسی، یا به معنای کار انجام شده برای یکای بار روی یک ذرهٔ باردار بود که در یک مسیر بسته در شار مغناطیسی متغیر حرکت می‌کرد. اما با توجه به شکل ۳۱-۱۳ ب و معادلهٔ ۳۱-۲۱، نیروی محرک الکتریکی القایی می‌تواند بدون نیاز به جریان یا ذرهٔ باردار وجود داشته باشد: نیروی محرک الکتریکی القایی ـ از راه

---

* با توجه به بحث‌های مربوط به تقارن، خط‌های میدان $\vec{E}$ در پیرامون مسیر دایره‌ای به جای مماسی بودن می‌توانند به صورت **شعاعی** هم باشند. اما وجود این خط‌های شعاعی ایجاب می‌کند که بارهای الکتریکی آزاد به طور متقارن در پیرامون محور تقارن، که خط‌های میدان الکتریکی می‌توانند از آن آغاز یا به آن ختم شوند، توزیع شوند؛ در اینجا چنین بارهایی وجود ندارند.

انتگرال‌گیری - برابر با مجموع کمیت‌های $\vec{E}.d\vec{s}$ در یک مسیر بسته است، که در آن $\vec{E}$ میدان الکتریکی القا شده بر اثر تغییر شار مغناطیسی و $d\vec{s}$ بردار طولی دیفرانسیلی در طول مسیر بسته است.

اگر معادلهٔ ۳۱-۲۱ را با قانون فارادی در معادلهٔ ۳۱-۶ ($\mathscr{E}=-d\Phi_B/dt$) ترکیب کنیم، می‌توانیم قانون فارادی را دوباره به صورت زیر بنویسیم

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$ (قانون فارادی) (۳۱-۲۲) ■

این معادله به سادگی نشان می‌دهد که میدان مغناطیسی متغیر یک میدان الکتریکی القا می‌کند. در طرف راست این معادله میدان مغناطیسی متغیر و در طرف چپ آن میدان الکتریکی ظاهر شده است.

قانون فارادی به صورت معادلهٔ ۳۱-۲۲ را می‌توان برای هر مسیر بسته‌ای در میدان مغناطیسی متغیر به کار برد و برای مثال، شکل ۳۱-۱۳ ت، چهار مسیر از این نوع را نشان می‌دهد، که همه شکل و مساحت مشابه دارند اما در میدان متغیر در مکان‌های متفاوت قرار گرفته‌اند. در مسیرهای ۱ و ۲، نیروهای محرک الکتریکی القایی $\mathscr{E}$ (مساوی با $\oint \vec{E}.d\vec{s}$) با هم برابرند، زیرا این مسیرها به طور کامل در میدان مغناطیسی واقع‌اند و برای آنها مقدار $d\Phi_B/dt$ یکسان است. این موضوع درست است، اگرچه بردارهای میدان الکتریکی، چنانکه نقش‌های خط‌های میدان در شکل نشان می‌دهند، در نقاط مختلف این مسیرها متفاوت‌اند. در مسیر ۳ نیروی محرک الکتریکی القایی کمتر است، زیرا شار محصور شدهٔ Φ_B (و در نتیجه $d\Phi_B/dt$) کمتر است، و در مسیر ۴ هم نیروی محرک الکتریکی صفر است، اگرچه میدان الکتریکی در هیچ نقطه‌ای از آن مسیر صفر نیست.

نگاهی تازه به پتانسیل الکتریکی

میدان‌های الکتریکی القایی ناشی از بارهای الکتریکی ساکن نیستند، بلکه از تغییر شار مغناطیسی به وجود می‌آیند. اگرچه هر دو نوع میدان الکتریکی به ذرات باردار نیرو وارد می‌کنند اما میان آنها تفاوت مهمی وجود دارد. ساده‌ترین تجلی این اختلاف آن است که خط‌های میدان الکتریکی القایی، مطابق شکل ۳۱-۱۳ پ، حلقه‌های بسته تشکیل می‌دهند. خط‌های میدان الکتریکی ناشی از بارهای ساکن چنین وضعیتی ندارند، بلکه آنها باید از بارهای مثبت آغاز و به بارهای منفی ختم شوند.

اختلاف میان میدان‌های الکتریکی ناشی از القایش و میدان‌های ناشی از بارهای ساکن را، به نحوی صوری، می‌توان چنین بیان کرد:

◄ پتانسیل الکتریکی فقط برای میدان‌های الکتریکی ناشی از بارهای ساکن با معناست و برای میدان‌های الکتریکی ناشی از القایش هیچ معنایی ندارد.

این گزاره را از نظر کیفی می‌توان چنین درک کرد که ببینیم هرگاه ذرهٔ بارداری در روی مسیر دایره‌ای شکل ۳۱-۱۳ ب یک دور بزند، برایش چه اتفاقی می‌افتد. بار الکتریکی از یک نقطهٔ معین حرکت را آغاز می‌کند و در حین دور زدن و برگشتن به همان نقطه تحت تأثیر نیروی محرک الکتریکی $\mathscr{E}$، مثلاً برابر با ۵V، قرار می‌گیرد؛ یعنی کار انجام شده روی ذره ۵J/C است و از این رو ذره باید در نقطه‌ای واقع شود که پتانسیل آن ۵V بالاتر باشد. اما این امر ناممکن است زیرا ذره به همان نقطهٔ پیشی برگشته است و یک نقطه نمی‌تواند دارای دو پتانسیل متفاوت باشد. در اینجا باید چنین نتیجه بگیریم که پتانسیل برای میدان‌های الکتریکی ناشی از میدان‌های مغناطیسی معنایی ندارد.

بررسی دقیق‌تر موضوع را می‌توان با یادآوری معادلهٔ ۲۵-۱۸، که تعریف کنندهٔ اختلاف پتانسیل میان دو نقطهٔ i و f در میدان الکتریکی $\vec{E}$ است، انجام داد:

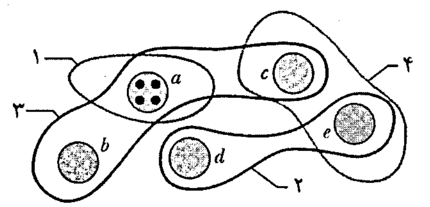
$$V_f - V_i = -\int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{s}$$ (۳۱-۲۳)

در فصل ۲۵، که هنوز با قانون القایش فارادی مواجه نشده بودیم، میدان‌های الکتریکی به معادلهٔ ۲۵ـ۱۸ ناشی از بارهای الکتریکی ساکن مربوط بودند. اگر در معادلهٔ ۳۱ـ۲۳ نقطه‌های i و f برهم منطبق باشند، مسیر متصل کنندهٔ آنها یک حلقهٔ بسته است، یعنی V_i و V_f با هم برابرند و معادلهٔ ۳۱ـ۲۳ به صورت زیر در می‌آید

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \qquad (۳۱\text{-}۲۴)$$

اما هنگامی که شار مغناطیسی متغیر وجود داشته باشد، مقدار این انتگرال صفر نیست، بلکه طبق معادلهٔ ۳۱ـ۲۲ برابر است با $-d\Phi_B/dt$. بنابراین، نسبت دادن پتانسیل الکتریکی به میدان الکتریکی القایی ما را با تناقض روبه‌رو می‌کند. در این صورت، باز هم نتیجه می‌گیریم که پتانسیل الکتریکی برای میدان‌های الکتریکی ناشی از القایش معنایی ندارد.

خودآزمایی ۴: شکل زیر، پنج ناحیهٔ مشخص شده با حروف را نشان می‌دهد که در هر یک میدان مغناطیسی یکنواخت در برون سو (مانند ناحیهٔ a) یا در درون سوی صفحهٔ شکل است. در هر پنج ناحیه بزرگی میدان با آهنگ پایای یکسان افزایش می‌یابد و مساحت ناحیه‌ها به یک اندازه است. هم‌چنین، در شکل، چهار مسیر شماره‌گذاری شده نشان داده شده‌اند که در طول آنها بزرگی انتگرال $\oint \vec{E}\cdot d\vec{s}$ برحسب یکای mag (بزرگی) در زیر مشخص شده است. معین کنید میدان مغناطیسی در ناحیه‌های b تا e کدام یک در درون سو و کدام یک در برون سوی صفحهٔ شکل است.



مسیر:	۱	۲	۳	۴
$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s}$:	mag	۲(mag)	۳(mag)	۰

مسألهٔ نمونهٔ ۳۱ـ۴

در شکل ۳۱ـ۱۳ ب، فرض کنید $R=$۸٫۵cm و $dB/dt=$۰٫۱۳T/s.

(الف) رابطهٔ مربوط به E، بزرگی میدان الکتریکی القایی را در نقاط درون میدان مغناطیسی به فاصلهٔ شعاعی r از مرکز میدان مغناطیسی، به دست آورید. مقدار این میدان را به ازای $r=$۵٫۲cm پیدا کنید.

حل: در اینجا **نکتهٔ کلیدی** این است که طبق قانون فارادی، میدان الکتریکی در اثر میدان مغناطیسی متغیر القا می‌شود. برای محاسبهٔ بزرگی میدان E، قانون فارادی را به صورت معادلهٔ ۳۱ـ۲۲ به کار می‌بریم. چون می‌خواهیم مقدار E را برای نقاط درون میدان مغناطیسی حساب کنیم برای انتگرال‌گیری از یک مسیر دایره‌ای به شعاع $r \le R$ استفاده می‌کنیم. با توجه به تقارن، فرض می‌کنیم که $\vec{E}$ در شکل ۳۱ـ۱۳ ب، در تمام نقطه‌ها بر مسیر دایره‌ای مماس است. بردار مسیر $d\vec{s}$ نیز همیشه بر این مسیر دایره‌ای مماس است. پس، حاصل‌ضرب نقطه‌ای $\vec{E}\cdot d\vec{s}$ در معادلهٔ ۳۱ـ۲۲ برابر با بزرگی Eds در تمام نقطه‌های مسیر است. هم‌چنین، با توجه به تقارن می‌توان فرض کرد که مقدار E در تمام نقاط روی مسیر دایره‌ای یکسان است. بنابراین، طرف چپ معادلهٔ ۳۱ـ۲۲ برابر است با:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \oint Eds = E\oint ds = E(2\pi r) \qquad (۳۱\text{-}۲۵)$$

(انتگرال $\oint ds$ برابر با $2\pi r$، محیط مسیر دایره‌ای است).

اکنون، باید طرف راست معادلهٔ ۳۱ـ۲۲ را حساب کنیم. چون $\vec{B}$ در سرتاسر مساحت احاطه شدهٔ A با مسیر انتگرال‌گیری، یکنواخت و بر سطح عمود است شار مغناطیسی از معادلهٔ ۳۱ـ۴ به دست می‌آید:

$$\Phi_B = BA = B(\pi r^2) \qquad (۳۱\text{-}۲۶)$$

با قرار دادن این مقدار و معادلهٔ ۳۱ـ۲۵ در معادلهٔ ۳۱ـ۲۲ و حذف کردن علامت منها، داریم

$$E(2\pi r) = \pi r^2 \frac{dB}{dt} \quad \Rightarrow$$

$$E = \frac{r}{2}\frac{dB}{dt} \qquad (۳۱\text{-}۲۷) \text{ (پاسخ)}$$

معادلهٔ ۳۱ـ۲۷ بزرگی میدان الکتریکی را در هر نقطه به فاصلهٔ $r \le R$ (یعنی درون میدان مغناطیسی) به دست می‌دهد. با جانشانی مقادیر داده شده، بزرگی $\vec{E}$ در نقاط واقع در فاصلهٔ $r=$۵٫۲cm به دست می‌آید:

$$E = \frac{(5.2\times 10^{-2}\,\mathrm{m})}{2}\,(0.13\,\mathrm{T/s}) \Rightarrow$$

$$E = 0.0034\,\mathrm{V/m} = 3.4\,\mathrm{mV/m} \qquad \text{(پاسخ)}$$

(ب) رابطهٔ مربوط به E، بزرگی میدان الکتریکی القایی در نقاط خارج میدان مغناطیسی واقع در فاصلهٔ شعاعی r را به دست آورید. مقدار این میدان را به‌ازای $r=12.5\,\mathrm{cm}$ پیدا کنید.

حل: نکتهٔ کلیدی قسمت (الف) در اینجا نیز وجود دارد، با این تفاوت که، چون می‌خواهیم E را در نقاط خارج میدان مغناطیسی حساب کنیم باید برای انتگرال‌گیری از مسیر دایره‌ای با شعاع $r \geq R$ استفاده کنیم. با پیش گرفتن روش به کار رفته در قسمت (الف)، باز هم معادلهٔ ۳۱ـ۲۵ را به دست می‌آوریم. اما معادلهٔ ۳۱ـ۲۶ به دست نمی‌آید، چون در این حالت مسیر انتگرال‌گیری در خارج میدان مغناطیسی قرار دارد و باید به این **نکتهٔ کلیدی** توجه کنیم که: شار مغناطیسی احاطه شده توسط مسیر جدید فقط به مساحت πR^2 از ناحیهٔ میدان مغناطیسی مربوط است. بنابراین، داریم

$$\Phi_B = BA = B(\pi R^2) \qquad (۳۱ـ۲۸)$$

با قرار دادن این مقدار و معادلهٔ ۳۱ـ۲۵ در معادلهٔ ۳۱ـ۲۲ (بدون علامت منها) و حل کردن معادلهٔ حاصل نسبت به E، خواهیم داشت

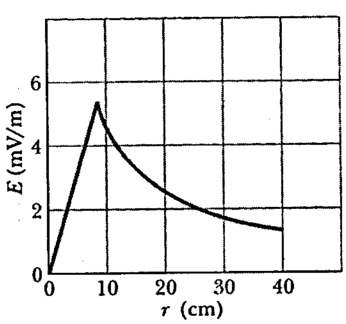
$$E = \frac{R^2}{2r}\frac{dB}{dt} \qquad \text{(پاسخ)}\ (۳۱ـ۲۹)$$

چون در اینجا E صفر نیست، متوجه می‌شویم که حتی در نقاط خارج میدان مغناطیسی متغیر هم میدان الکتریکی القا می‌شود؛ و این، نتیجهٔ مهمی است که ساخت مبدل‌ها (ترانسفورماتورها) را ممکن می‌سازد (چنانکه بعداً در بخش ۳۳ـ۱۱ خواهیم دید). بزرگی میدان $\vec{E}$ در نقاط به فاصلهٔ $r=12.5\,\mathrm{cm}$ به ازای داده‌های معلوم و با استفاده از معادلهٔ ۳۱ـ۲۹، چنین به دست می‌آید:

$$E = \frac{(8.5\times 10^{-2}\,\mathrm{m})^2}{(2)(12.5\times 10^{-2}\,\mathrm{m})}\,(0.13\,\mathrm{T/s}) \Rightarrow$$

$$E = 3.8\times 10^{-3}\,\mathrm{V/m} = 3.8\,\mathrm{mV/m} \qquad \text{(پاسخ)}$$

معادله‌های ۳۱ـ۲۷ و ۳۱ـ۲۹ به ازای $r=R$ نتیجه‌های یکسانی به دست می‌دهند و باید هم چنین باشد. شکل ۳۱ـ۱۴، نمودار تغییرات $E(r)$ را بر پایهٔ این دو معادله نشان می‌دهد.



شکل ۳۱ـ۱۴ نمودار تغییرات میدان الکتریکی القایی $E(r)$ در شرایط مربوط به مسألهٔ نمونهٔ ۳۱ـ۴.

۳۱ـ۷ القاگرها و القاییدگی

در فصل ۲۶ دیدیم که از خازن می‌توان برای تولید میدان الکتریکی مطلوب استفاده کرد. در آنجا آرایش خازن صفحه ـ موازی را به عنوان نوع اساسی خازن در نظر گرفتیم. به‌همین ترتیب، از **القاگر** (با علامت مداری ꝏꝏ) هم می‌توان برای تولید میدان مغناطیسی مورد نظر استفاده کرد. در اینجا یک سیملولهٔ دراز (به طور مشخص یک طول کوتاه واقع در نزدیکی میانهٔ سیملولهٔ دراز) را به عنوان نوع اساسی القاگر در نظر می‌گیریم.

اگر از سیم‌پیچ‌ها (یا دورها)ی یک القاگر (یک سیملوله) جریان i عبور کند این جریان در ناحیهٔ مرکزی القاگر یک شار مغناطیسی Φ_B تولید می‌کند. **القاییدگی** این القاگر برابر است با:

$$L = \frac{N\Phi_B}{i} \qquad \text{(تعریف القاییدگی)} \qquad (۳۱ـ۳۰)$$

■

که در آن N تعداد دورهای سیم است. گفته می‌شود که سیم‌پیچ‌های القاگر باید از طریق شار مشترک به هم مربوط باشند و حاصلضرب $N\Phi_B$ را **ارتباط شار مغناطیسی** می‌نامند. پس، القاییدگی L معیاری از ارتباط شاری تولید شده توسط القاگر به ازای یکای جریان است.

چون یکای SI شار مغناطیسی تسلا ـ مترمربع است، یکای SI القاییدگی **تسلا ـ مترمربع بر آمپر** (با نماد $\mathrm{T.m^2/A}$) است. این کمیت را به افتخار فیزیکدان آمریکایی، **جوزف هنری**[1]، کاشف مشترک قانون القایش و معاصر فارادی، **هانری*** (با نماد H) نامیده‌اند. پس،

$$\text{یک هانری} = 1\,\mathrm{H} = 1\,\mathrm{T.m^2/A} \qquad (۳۱ـ۳۱)$$

در دنبالهٔ این فصل فرض می‌کنیم که در مجاورت القاگرها، بدون توجه به شکل هندسی آنها، هیچ مادهٔ مغناطیسی، نظیر آهن، وجود ندارد. این گونه مواد میدان مغناطیسی القاگر را واپیچیده می‌کنند.

1. Joseph Henry

* به خاطر حفظ کردن تلفظ این یکا، که در کتاب‌های فیزیک فارسی ذکر شده، یکای القاییدگی به جای **هِنری**، با تلفظ فرانسه، به صورت **هانری** نوشته شده است. ـ م.

القاییدگی سیملوله

سیملولهٔ درازی با مساحت مقطع Aرا در نظر بگیرید. القاییدگی یکای طول این سیملوله در نزدیکی میانهٔ آن چیست؟

برای استفاده از معادلهٔ تعریف کنندهٔ القاییدگی (معادلهٔ ۳۱-۳۰)، باید ارتباط شاری حاصل از یک جریان معین در سیم‌پیچ‌های سیملوله را حساب کنیم. طول l از سیملوله را در نزدیکی میانهٔ آن در نظر می‌گیریم. ارتباط شاری مربوط به این بخش از سیملوله برابر است با:

$$N\Phi_B = (nl)(BA)$$

که در آن n تعداد دورهای سیم در یکای طول سیملوله و B میدان مغناطیسی درون سیملوله است.

بزرگی میدان B با استفاده از معادله ۳۰-۲۵، برابر است با:

$$B = \mu_0 in$$

بنابراین، با استفاده از معادلهٔ ۳۱-۳۰، داریم

$$L = \frac{N\Phi_B}{i} = \frac{(nl)(BA)}{i} = \frac{(nl)(\mu_0 in)(A)}{i} \Rightarrow$$

$$L = \mu_0 n^2 lA \qquad (۳۱\text{-}۳۲)$$

پس، القاییدگی یکای طول یک سیملولهٔ دراز در نزدیکی مرکزش برابر است با:

$$\frac{L}{l} = \mu_0 n^2 A \qquad \text{(سیملوله)} \qquad (۳۱\text{-}۳۳)$$ ■

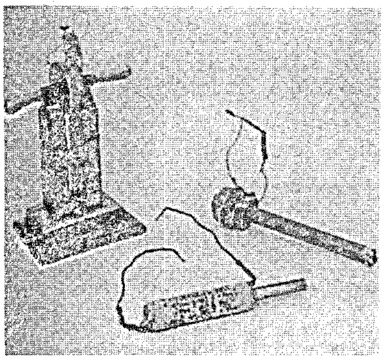
القاییدگی ـ مانند ظرفیت ـ فقط به شرایط هندسی سیملوله بستگی دارد. متناسب بودن این کمیت با مجذور تعداد دورهای سیم در یکای طول مورد انتظار است. هرگاه nرا سه برابر کنیم، نه تنها تعداد دورها (N) سه برابر می‌شود، بلکه شار گذرنده از هر دور سیم ($\Phi_B = BA = \mu_0 inA$) هم سه برابر می‌شود. با ۹ برابر شدن ارتباط شاری $N\Phi_B$ القاییدگی نیز ۹ برابر خواهد شد.

اگر سیملوله در مقایسه با شعاع آن خیلی دراز باشد، القاییدگی سیملوله با تقریب خوبی از معادلهٔ ۳۱-۳۲ به‌دست می‌آید. با این تقریب می‌توان از گستردگی خط‌های میدان مغناطیسی در نزدیکی دو سر سیملوله چشم‌پوشی کرد، همان‌طور که در فرمول ظرفیت مربوط به خازن صفحه ـ موازی ($C=\varepsilon_0 A/d$) از فریز شدن خط‌های میدان الکتریکی در نزدیکی لبه‌های صفحه‌های خازن چشم‌پوشی می‌کنیم.

با توجه به معادلهٔ ۳۱-۳۲ و یادآوری این نکته که n تعداد دورهای سیم در یکای طول سیملوله است، نتیجه می‌گیریم که القاییدگی را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب ثابت تراوایی μ_0 در کمیتی با ابعاد طول نوشت. منظور این است که μ_0را می‌توان برحسب **هانری بر متر** بیان کرد:

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\text{T.m/A} \Rightarrow$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\text{H/m} \qquad (۳۱\text{-}۳۴)$$

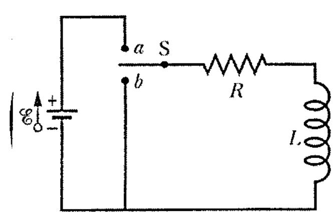


تصویری از القاگرهای اولیه‌ای که مایکل فارادی با آنها قانون القایش را کشف کرد. در آن روزها امکانات و وسایل مناسب مانند سیم‌های روپوش‌دار در دسترس نبود. گفته می‌شود که فارادی سیم‌ها را با نوارهای تهیه شده از زیرپیراهنی همسرش عایق‌بندی می‌کرد.

۳۱-۸ خودالقایش

اگر دو پیچه ـ که اکنون می‌توانیم آنها را القاگر بنامیم ـ در کنار هم قرار گیرند، و از یکی از آنها جریان i عبور کند، در پیچهٔ دیگر شار مغناطیسی Φ_B به وجود می‌آید. پیشتر دیدیم که هرگاه با تغییر دادن جریان این شار تغییر کند، طبق قانون فارادی، یک نیروی محرک الکتریکی القایی در پیچهٔ دوم ظاهر خواهد شد. در همین حال، دیده می‌شود که در پیچهٔ اول هم یک نیروی محرک القایی به وجود می‌آید.

◄ در هر پیچه‌ای که جریان تغییر کند یک نیروی محرک القایی $\mathscr{E}_L$ ظاهر می‌شود.



شکل ۳۱-۱۵ هرگاه با تغییر دادن محل تماس لغزنده روی مقاومت متغیر جریان گذرنده از پیچهٔ را تغییر دهیم، در حین تغییر کردن جریان یک نیروی محرک الکتریکی خود القاییدهٔ $\mathscr{E}_L$، در پیچه ظاهر می‌شود.

این فرایند (شکل ۳۱-۱۵ را ببینید) را **خودالقایش**، و نیروی محرک الکتریکی ظاهر شده را **نیروی محرک الکتریکی خود القاییده** می‌نامند. این خاصیت نیز مانند نیروهای محرک الکتریکی القایی دیگر، از قانون القایش فارادی پیروی می‌کند.

معادلهٔ ۳۱ـ۳۰ نشان می‌دهد که برای هر القاگری می‌توانیم بنویسیم:

$$N\Phi_B = Li \qquad (۳۱\text{ـ}۳۵)$$

بنا به قانون فارادی، داریم

$$\mathscr{E}_L = -\frac{d(N\Phi_B)}{dt} \qquad (۳۱\text{ـ}۳۶)$$

با ترکیب معادله‌های ۳۱ـ۳۵ و ۳۱ـ۳۶ می‌توان نوشت

$$\mathscr{E}_L = -L\frac{di}{dt} \qquad \text{(نیروی محرک الکتریکی خود القاییده)} \qquad (۳۱\text{ـ}۳۷) \quad \blacksquare$$

بنابراین، اگر جریان گذرنده از یک القاگر (مانند پیچه، سیملوله، یا چنبره) نسبت به زمان تغییر کند، یک نیروی محرک الکتریکی خودالقاییده در القاگر ظاهر می‌شود. بزرگی جریان هیچ اثری بر نیروی محرک الکتریکی القا شده ندارد، بلکه در اینجا فقط آهنگ تغییر جریان به حساب می‌آید.

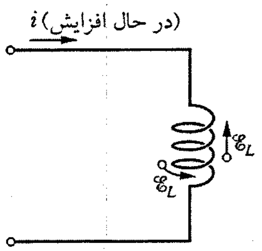
جهت نیروی محرک الکتریکی خودالقاییده را می‌توان به کمک قانون لنز معین کرد. علامت منها در معادلهٔ ۳۱ـ۳۵ نشان می‌دهد که ـ بنا به قانون لنز ـ نیروی محرک الکتریکی خودالقاییده دارای چنان سمتگیری‌ای است که با تغییر جریان i مخالفت می‌کند. هرگاه فقط بزرگی $\mathscr{E}_L$ مورد نظر باشد می‌توان علامت منها را حذف کرد.

فرض کنید جریان i را، مطابق شکل ۳۱ـ۱۶ الف، در یک پیچه برقرار می‌کنیم و ترتیبی می‌دهیم که با آهنگ di/dt نسبت به زمان افزایش پیدا کند. به زبان قانون لنز، این افزایش جریان همان «تغییری» است که خودالقایش باید با آن مخالفت کند. برای بروز این اثر باید یک نیروی محرک الکتریکی خودالقاییده در جهتی در پیچه ظاهر شود که، مطابق شکل، با افزایش جریان مخالفت کند. اگر جریان را مطابق شکل ۳۱ـ۱۶ ب، نسبت به زمان کاهش دهیم، نیروی محرک الکتریکی خودالقاییده باید در جهتی باشد که بخواهد کاهش جریان، مطابق شکل، مخالفت کند.

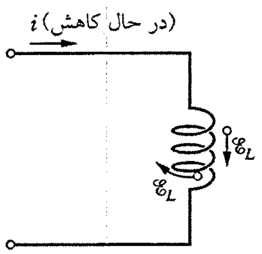
در بخش ۳۱ـ۶ دیدیم که برای یک میدان الکتریکی (و در نتیجه، برای یک نیروی محرک الکتریکی) القا شده بر اثر تغییر شار مغناطیسی نمی‌توان پتانسیل الکتریکی تعریف کرد. منظور این است که وقتی یک نیروی محرک الکتریکی خودالقاییده در القاگر شکل ۳۱ـ۱۵ تولید می‌شود، ما نمی‌توانیم یک پتانسیل الکتریکی را در درون خودالقاگر، جایی که شار تغییر می‌کند، تعریف کنیم. اما هنوز هم می‌توان پتانسیل‌ها را برای نقاطی از مدار تعریف کرد که در درون القاگر واقع نیستند. در این نقاط میدان‌های الکتریکی از توزیع بار و پتانسیل‌های الکتریکی مربوط، ناشی می‌شوند.

علاوه بر این، ما می‌توانیم برای دو سر یک القاگر (در بین پایانه‌های آن که فرض می‌کنیم در خارج از ناحیهٔ تغییر شار قرار دارند) یک اختلاف پتانسیل خودالقاییدهٔ V_L تعریف کنیم. اگر القاگر یک القاگر آرمانی (با سیمی دارای مقاومت ناچیز) باشد، بزرگی V_L با بزرگی نیروی محرک الکتریکی خودالقاییدهٔ $\mathscr{E}_L$ برابر خواهد بود.

حال، اگر القاگر دارای مقاومت الکتریکی r باشد، به طور ذهنی می‌توان آن را به صورت یک مقاومت r (که فرض می‌کنیم در خارج از ناحیهٔ تغییر شار قرار دارد) و یک القاگر آرمانی با نیروی محرک الکتریکی خودالقاییدهٔ $\mathscr{E}_L$، به طور جدا از هم، در نظر گرفت. بنابراین، درست مانند یک باتری با نیروی محرک الکتریکی $\mathscr{E}$ و مقاومت درونی r، اختلاف پتانسیل بین پایانه‌های یک القاگر واقعی با نیروی محرک الکتریکی آن تفاوت دارد. به جز در مواردی که مشخص می‌کنیم، فرض می‌کنیم القاگرها آرمانی‌اند.



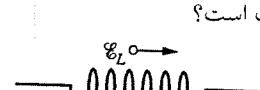
(الف)



(ب)

شکل ۳۱ـ۱۶ (الف) جریان i در حال افزایش است و نیروی محرک الکتریکی خودالقاییده $\mathscr{E}_L$، در طول پیچه در جهتی ظاهر می‌شود که با افزایش جریان مخالفت کند. پیکان نشان دهندهٔ جهت $\mathscr{E}_L$ را می‌توان در طول یک دور سیم پیچه یا در کنار پیچه رسم کرد. هر دو مورد در شکل نشان داده شده‌اند. (ب) جریان i در حال کاهش است و نیروی محرک الکتریکی خودالقاییده در جهتی ظاهر می‌شود که با این کاهش مخالفت کند.

خودآزمایی ۵: شکل زیر، نیروی محرک الکتریکی $\mathscr{E}_L$ القا شده در یک پیچه را نشان می‌دهد. کدام یک از عبارت‌های زیر جریان گذرنده از پیچه را توصیف می‌کند: (الف) جریان ثابت و به سمت راست است، (ب) جریان ثابت و به سمت چپ است، (پ) جریان در حال افزایش و به سمت راست است، (ت) جریان در حال کاهش و به سمت راست است، (ث) جریان در حال افزایش و به سمت چپ است، (ج) جریان در حال کاهش و به سمت چپ است؟



۳۱ـ۹ مدارهای RL

در بخش ۲۸ـ۸ دیدیم که اگر نیروی محرک الکتریکی $\mathscr{E}$ ناگهان به یک مدار تک حلقه‌ای شامل مقاومت R و خازن C اعمال شود، بار الکتریکی خازن بی‌درنگ به مقدار تعادل پایانی $C\mathscr{E}$ نمی‌رسد، بلکه با شیوه‌ای نمایی به سمت این مقدار میل می‌کند:

$$q = C\mathscr{E}(1 - e^{-t/\tau_C}) \qquad (۳۱\text{ـ}۳۸)$$

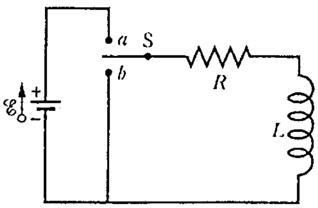
آهنگ افزایش یافتن بار با ثابت زمانی خازنی τ_C معین می‌شود، که در معادلهٔ ۲۸ـ۳۳ چنین تعریف شد:

$$\tau_C = RC \qquad (۳۱\text{ـ}۳۹)$$

اگر در این مدار نیروی محرک الکتریکی ناگهان حذف شود، بار الکتریکی بی‌درنگ به صفر نمی‌رسد، بلکه با شیوه‌ای نمایی به سمت صفر میل می‌کند:

$$q = q_0 e^{-t/\tau_C} \qquad (۳۱\text{ـ}۴۰)$$

ثابت زمانی τ_C افت بار الکتریکی را به همان نحو توصیف می‌کند که خیز بار را توصیف می‌کند.



شکل ۳۱ـ۱۷ نمودار یک مدار RL. وقتی کلید S به نقطهٔ a وصل می‌شود جریان افزایش می‌یابد و به مقدار حدی $\mathscr{E}/R$ میل می‌کند.

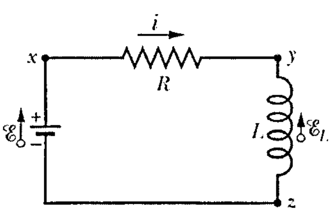
اگر نیروی محرک الکتریکی $\mathscr{E}$ را به یک مدار تک حلقه‌ای شامل مقاومت R و القاگر L اعمال کنیم (یا آن را از مدار حذف کنیم)، تأخیر مشابهی در خیز (یا افت) جریان ایجاد می‌شود. وقتی در شکل ۳۱ـ۱۷ کلید S، مثلاً به نقطهٔ a وصل می‌شود، جریان در مقاومت شروع به بالا رفتن می‌کند. اگر القاگر وجود نداشته باشد جریان به سرعت به مقدار پایای $\mathscr{E}/R$ می‌رسد. اما به دلیل وجود القاگر، یک نیروی محرک الکتریکی خودالقاییدهٔ $\mathscr{E}_L$ در مدار ظاهر می‌شود، که با توجه به قانون لنز، این نیروی محرک با بالا رفتن جریان مخالفت می‌کند، و این بدان معناست که با نیروی محرک الکتریکی باتری، $\mathscr{E}$، از نظر قطبیت مخالف است. در نتیجه، مقاومت تحت تأثیر اختلاف میان دو نیروی محرک، یکی مقدار ثابت $\mathscr{E}$ مربوط به باتری و دیگری مقدار متغیر $\mathscr{E}_L$ (مساوی با $-L\,di/dt$) ناشی از خودالقایش، قرار می‌گیرد. تا زمانی که $\mathscr{E}_L$ وجود داشته باشد جریان در مقامت مدار کمتر از $\mathscr{E}/R$ خواهد بود.

با گذشت زمان آهنگ افزایش یافتن جریان کم می‌شود و بزرگی نیروی محرک الکتریکی خودالقاییده، که با di/dt متناسب است، کوچکتر می‌شود. بنابراین، جریان مدار به صورت مجانب به سمت $\mathscr{E}/R$ میل می‌کند.

این نتیجه را می‌توان به صورت زیر تعمیم داد:

> ◄ القاگر، در آغاز، با تغییر یافتن جریان گذرنده مخالفت و پس از زمانی طولانی مانند یک سیم رابط عادی رفتار کند.

اکنون، این وضعیت را به طور کمی مورد تحلیل قرار می‌دهیم. هنگامی که در شکل ۳۱ـ۱۷ کلید S به نقطهٔ a وصل می‌شود، مدار به صورت شکل ۳۱ـ۱۸ در می‌آید. با استفاده از قاعدهٔ حلقه و آغاز کردن از نقطهٔ x در شکل، حلقه را در جهت ساعتگرد همراه با جریان دور می‌زنیم.



شکل ۳۱ـ۱۸ نمودار مدار شکل ۳۱ـ۱۷ در حالتی که کلید به نقطهٔ a وصل شده است. با آغاز کردن از نقطهٔ x، قاعدهٔ حلقه را در جهت ساعتگرد به کار می‌بریم.

۱. مقاومت. چون در مقاومت در جهت جریان i حرکت می‌کنیم پتانسیل الکتریکی به اندازهٔ iR کاهش می‌یابد. بنابراین، وقتی از نقطه x به نقطهٔ y می‌رویم با تغییر پتانسیل $-iR$ مواجه می‌شویم.

۲. القاگر. چون جریان i تغییر می‌کند در القاگر یک نیروی محرک الکتریکی خودالقاییدهٔ $\mathscr{E}_L$ به وجود می‌آید. بزرگی $\mathscr{E}_L$ از معادلهٔ ۳۱ـ۳۷ به صورت $L\,di/dt$ به دست می‌آید. در شکل ۳۱ـ۱۸ جهت $\mathscr{E}_L$ به طرف بالاست زیرا جریان i در القاگر به طرف پایین و در حال افزایش است. بنابراین، وقتی از نقطهٔ y به نقطهٔ z حرکت می‌کنیم در خلاف جهت $\mathscr{E}_L$ پیش می‌رویم و با تغییر پتانسیل $-L\,di/dt$ مواجه می‌شویم.

۳. باتری. وقتی از نقطهٔ z به نقطهٔ آغازی x برمی‌گردیم، با تغییر پتانسیل ناشی از نیروی محرک الکتریکی باتری $+\mathscr{E}$، مواجه می‌شویم.

بنابراین، با استفاده از قاعدهٔ حلقه، داریم

$$-iR - L\frac{di}{dt} + \mathscr{E} = 0$$

یا

$$L\frac{di}{dt} + Ri = \mathscr{E} \qquad (\text{مدار } RL) \qquad (۴۱\text{-}۳۱)$$ ■

معادلهٔ ۳۱-۴۱ یک معادله دیفرانسیل شامل متغیر i و مشتق اول آن di/dt است. برای حل کردن معادله باید تابع $i(t)$ را چنان به دست آوریم که وقتی $i(t)$ و مشتق اول آن را در معادلهٔ ۳۱-۴۱ جانشانی می‌کنیم، معادله و نیز شرط آغازی $i(۰)=۰$، برقرار باشد.

معادلهٔ ۳۱-۴۱ و شرط آغازی آن دقیقاً به صورت معادلهٔ ۲۸-۲۹ برای یک مدار RC است، با این تفاوت که به جای q مقدار i، به جای R مقدار L و به جای $۱/C$ مقدار R قرار گرفته است. جواب معادلهٔ ۳۱-۴۱ نیز باید دقیقاً به صورت معادلهٔ ۲۸-۳۰، با همان جانشانی‌ها، باشد. جواب معادله عبارت است از:

$$i = \frac{\mathscr{E}}{R}(۱ - e^{-Rt/L}) \qquad (۴۲\text{-}۳۱)$$

که می‌توان آن را دوباره به صورت زیر نوشت

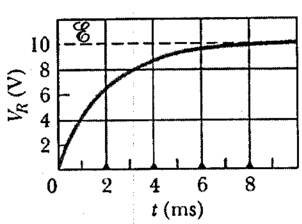
$$i = \frac{\mathscr{E}}{R}(۱ - e^{-t/\tau_L}) \qquad (\text{خیز جریان}) \qquad (۴۳\text{-}۳۱)$$ ■

در اینجا τ_L **ثابت زمانی القایی** است و از معادلهٔ زیر به دست می‌آید

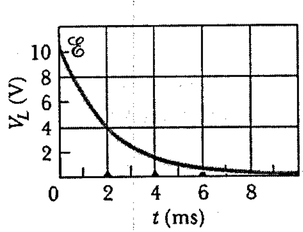
$$\tau_L = \frac{L}{R} \qquad (\text{ثابت زمانی}) \qquad (۴۴\text{-}۳۱)$$ ■

اکنون معادلهٔ ۳۱-۴۳ را در حالتی که کلید بسته می‌شود (در لحظهٔ $t=۰$) و در حالتی که مدتی طولانی از بسته شدن کلید گذشته است ($t \longrightarrow \infty$)، بررسی می‌کنیم. اگر در معادلهٔ ۳۱-۴۳، $t=۰$ را قرار دهیم، مقدار نمایی $e^{-۰}=۱$ به دست می‌آید. بنابراین، معادلهٔ ۳۱-۴۳ نشان می‌دهد که چنانکه انتظار داریم، جریان در آغاز برابر است با $i=۰$. آنگاه، وقتی t به سمت ∞ می‌رود مقدار نمایی برابر می‌شود با $e^{-\infty}=۰$. در نتیجه، معادلهٔ ۳۱-۴۳ نشان می‌دهد که جریان به مقدار تعادلی $\mathscr{E}/R$ می‌رسد.

اختلاف پتانسیل‌های مدار را هم می‌توان بررسی کرد. شکل ۳۱-۱۹، نمودار چگونگی تغییرات اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت، $V_R(=iR)$ و دو سر القاگر، $V_L(=L\,di/dt)$، را برحسب زمان به ازای مقادیر معین $\mathscr{E}$، L و R نشان می‌دهد. این شکل را با دقت با شکل متناظر برای مدار RC (شکل ۲۸-۱۴) مقایسه کنید.



(الف)



(ب)

شکل ۳۱-۱۹ نمودارهای تغییرات زمانی (الف) V_R، اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت در مدار ۳۱-۱۸، و (ب) V_L، اختلاف پتانسیل دو سر القاگر در همان مدار. مثلث‌های کوچک بازه‌های زمانی پی در پی مربوط به یک ثابت زمانی القایی $\tau_L=L/R$ را نشان می‌دهند. این شکل به ازای $R=۲۰۰۰\Omega$، $L=۴٫۰\text{H}$ و $\mathscr{E}=۱۰\text{V}$ رسم شده است.

برای نشان دادن اینکه کمیت $\tau_L(=L/R)$ دارای بُعد زمان است، معادلهٔ تبدیل یکای هانری بر اهم را چنین می‌نویسیم:

$$۱\frac{\text{H}}{\Omega} = ۱\frac{\text{H}}{\Omega}\left(\frac{۱\text{V.s}}{۱\text{H.A}}\right)\left(\frac{۱\Omega\text{.A}}{۱\text{V}}\right) = ۱\text{s}$$

کمیت اول درون پرانتز، ضریب تبدیل مبتنی بر معادلهٔ ۳۱-۳۷ و کمیت دوم ضریب تبدیل مبتنی بر رابطهٔ $V=iR$ است.

معنای فیزیکی ثابت زمانی را می‌توان از معادلهٔ ۳۱-۴۳ نتیجه گرفت. هرگاه زمان $t=\tau_L=L/R$ را در این معادله قرار دهیم، داریم

$$i = \frac{\mathscr{E}}{R}(۱ - e^{-۱}) = ۰٫۶۳\frac{\mathscr{E}}{R} \qquad (۴۵\text{-}۳۱)$$

بنابراین، ثابت زمانی مدار τ_L، زمانی است که طی آن جریان در مدار به حدود ۶۳ درصد مقدار تعادلی پایانی $\mathscr{E}/R$، می‌رسد. چون اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت V_R، با جریان i متناسب است، نمودار افزایش یافتن جریان برحسب زمان همان مشکل مربوط به نمودار V_R در شکل ۳۱-۱۹ الف را دارد.

اگر در شکل ۳۱-۱۷ کلید S به مدتی طولانی به نقطهٔ a وصل باشد تا جریان تعادلی $\mathscr{E}/R$ حاصل شود، و سپس کلید به نقطهٔ b وصل شود، اثر این کار حذف کردن باتری از مدار است. (اتصال کلید S به نقطهٔ b باید لحظه‌ای پیش از قطع کردن آن از نقطهٔ a صورت گیرد). کلیدی که این عمل را انجام می‌دهد، کلید اتصال پیش از قطع نام دارد).

پس از حذف شدن باتری جریان گذرنده از مقاومت فرو می‌افتد. اما جریان نمی‌تواند بی‌درنگ به صفر برسد، بلکه با گذشت زمان صفر می‌شود. معادله دیفرانسیل حاکم بر این فروافت جریان را با قرار دادن $\mathscr{E}=۰$ در معادلهٔ ۳۱ـ۴۱ می‌توان به دست آورد:

$$L\frac{di}{dt} + iR = ۰ \qquad (۳۱ـ۴۶)$$

با توجه به مانستگی معادله‌های ۲۸ـ۳۵ و ۲۸ـ۳۶، جواب این معادله دیفرانسیل که با شرط آغازی $i(۰)=i_۰=\mathscr{E}/R$ سازگار باشد به دست می‌آید:

$$i = \frac{\mathscr{E}}{R}e^{-t/\tau_L} = i_۰e^{-t/\tau_L} \qquad \text{(فروافت جریان)} \qquad (۳۱ـ۴۷)$$ ■

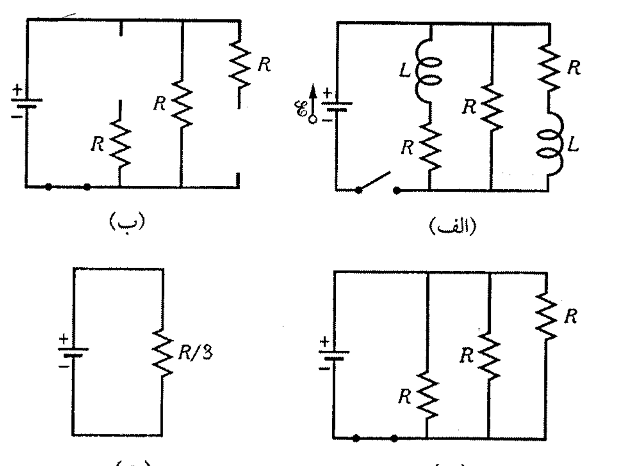
ملاحظه می‌شود که در یک مدار RL هم خیز جریان (معادلهٔ ۳۱ـ۴۳) و هم فروافت جریان (معادلهٔ ۳۱ـ۴۷) هر دو دارای ثابت زمانی القایی یکسان τ_L هستند. در معادلهٔ ۳۱ـ۴۷ از مقدار $i_۰$ استفاده شده است تا جریان در لحظهٔ $t=۰$ نشان داده شود. در مسألهٔ مورد نظر ما جریان به $\mathscr{E}/R$ می‌رسد وگرنه $i_۰$ می‌تواند در آغاز هر مقداری داشته باشد.

مسألهٔ نمونهٔ ۳۱ـ۵

شکل ۳۱ـ۲۰ الف، مداری را نشان می‌دهد که شامل سه مقاومت مشابه با مقدار $R=۹٫۰\,\Omega$، دو القاگر مشابه با القاییدگی $L=۲٫۰\,\text{mH}$ و یک باتری آرمانی با نیروی محرک الکتریکی $\mathscr{E}=۱۸\,\text{V}$ است.

(الف) جریان گذرندهٔ از باتری i، درست پس از بسته شدن کلید چقدر است؟

حل: در اینجا **نکتهٔ کلیدی** این است که درست پس از بسته شدن کلید، القاگر با تغییر جریان گذرنده از خود مخالفت می‌کند. چون جریان گذرنده از هر القاگر پیش از بسته شدن کلید صفر است، در لحظهٔ بسته شدن کلید هم صفر خواهد بود. بنابراین، بی‌درنگ پس از بسته شدن کلید القاگرها، مطابق شکل ۳۱ـ۲۰ ب، مانند سیم‌های قطع شده عمل می‌کنند. بنابراین، یک مدار تک حلقه باقی می‌ماند، که در آن با استفاده از قاعدهٔ حلقه داریم



شکل ۳۱ـ۲۰ مسألهٔ نمونهٔ ۳۱ـ۵. (الف) نمودار یک مدار RL چند حلقه‌ای با کلید باز. (ب) نمودار مدار هم‌ارز درست پس از بسته شدن کلید. (پ) نمودار مدار هم‌ارز مدتی طولانی پس از بسته شدن کلید. (ت) نمودار مدار تک حلقه‌ای که هم‌ارز مدار (پ) است.

$$\mathscr{E} - iR = ۰$$

با جانشانی داده‌ها در معادله، داریم

$$i = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{۱۸\text{V}}{۹٫۰\,\Omega} \Rightarrow$$

$$i = ۲٫۰\text{A} \qquad \text{(پاسخ)}$$

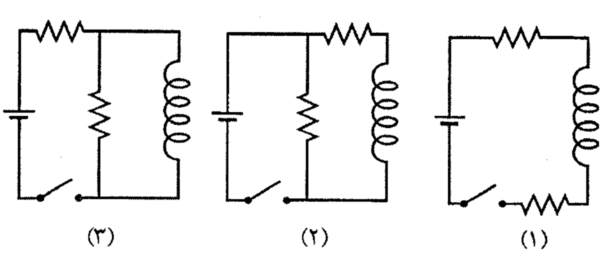
(ب) جریان گذرنده از باتری i، مدتی طولانی پس از بسته شدن کلید چقدر است؟

حل: در اینجا **نکتهٔ کلیدی** این است که مدتی طولانی پس از بسته شدن کلید، جریان‌ها در مدار به مقادیر تعادلی خود می‌رسند و القاگرها مانند سیم‌های رابط ساده، مطابق شکل ۳۱ـ۲۰ پ، عمل می‌کنند. در این صورت، مداری با سه مقاومت مشابه موازی داریم، که با استفاده از معادلهٔ ۲۸ـ۲۰، مقاومت معادل آنها برابر است با $R_{eq}=R/۳=(۹٫۰\,\Omega)/۳=۳٫۰\,\Omega$. بنابراین، معادلهٔ حلقهٔ مربوط به مدار هم‌ارز نشان داده شده در شکل ۳۱ـ۲۰ ت، به صورت $\mathscr{E} - iR_{eq} = ۰$ نوشته می‌شود، و از آنجا، داریم

$$i = \frac{\mathscr{E}}{R_{eq}} = \frac{۱۸\text{V}}{۳٫۰\,\Omega} \Rightarrow$$

$$i = ۶٫۰\text{A} \qquad \text{(پاسخ)}$$

خودآزمایی ۶: شکل زیر، سه مدار شامل باتری‌ها، القاگرها و مقاومت‌های مشابه را نشان می‌دهد. این مدارها را با توجه به جریان گذرنده از باتری (الف) درست پس از بسته شدن کلید و (ب) مدتی طولانی پس از بسته شدن کلید، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



مسألهٔ نمونهٔ ۳۱ـ۶

یک سیملوله دارای القاییدگی ۵۳mH و مقاومت ۰٫۳۷Ω است. اگر این سیملوله را به یک باتری وصل کنیم، چه مدت طول می‌کشد تا جریان به نصف مقدار تعادلی‌اش برسد؟

حل: یک **نکتهٔ کلیدی** این است که سیملوله را می‌توان در ذهن خود، مطابق شکل ۳۱ـ۱۸، به یک مقاومت و یک القاگر که به طور سری به باتری وصل شده‌اند، تجزیه کرد. با استفاده از قاعدهٔ حلقه به معادلهٔ ۳۱ـ۴۱ می‌رسیم که جواب آن برای جریان مدار i، به صورت معادلهٔ ۳۱ـ۴۳ است.

نکتهٔ کلیدی دوم این است که طبق این جواب، جریان i از صفر تا مقدار تعادلی پایانی $\mathscr{E}/R$ به طور نمایی افزایش می‌یابد. فرض کنید $t_\circ$ زمان رسیدن جریان i به نصف مقدار تعادلی‌اش باشد. پس، با استفاده از معادلهٔ ۳۱ـ۴۳، داریم

$$\frac{1}{2}\frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{\mathscr{E}}{R}(1 - e^{-t_\circ/\tau_L})$$

پس از حذف کردن $\mathscr{E}/R$، این معادله را نسبت به $t_\circ$ حل و جملهٔ نمایی را جدا می‌کنیم و سپس از دو طرف معادلهٔ حاصل در پایه طبیعی لگاریتم می‌گیریم. در نتیجه، داریم

$$t_\circ = \tau_L \ln 2 = \frac{L}{R}\ln 2 = \frac{53 \times 10^{-3}\,\text{H}}{0.37\,\Omega}\ln 2 \quad \Rightarrow$$

$$t_\circ = 0.10\,\text{s}$$ (پاسخ)

۳۱ـ۱۰ انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی

وقتی دو ذرهٔ با بار الکتریکی ناهمنام را از هم دور می‌کنیم، می‌گوییم انرژی پتانسیل الکتریکی حاصل در میدان الکتریکی بارها ذخیره می‌شود. با آزاد گذاشتن بارها برای نزدیک شدن به یکدیگر، می‌توان این انرژی را از میدان الکتریکی پس گرفت. به همین طریق، می‌توان نتیجه گرفت که در میدان مغناطیسی هم‌انرژی ذخیره می‌شود.

برای به دست آوردن رابطهٔ کمی مربوط به ذخیره شدن انرژی در میدان مغناطیسی، شکل ۳۱ـ۱۸ را که نشان دهندهٔ یک چشمهٔ با نیروی محرک الکتریکی $\mathscr{E}$ متصل به مقاومت R و القاگر L است، در نظر می‌گیریم. معادلهٔ ۳۱ـ۴۱، یعنی

$$\mathscr{E} = L\frac{di}{dt} + iR \qquad (۳۱\text{ـ}۴۸)$$

که در اینجا به خاطر راحتی تکرار شده است، معادلهٔ دیفرانسیل توصیف کنندهٔ افزایش جریان در این مدار است. یادآوری می‌شود که این معادله به راحتی از قاعدهٔ حلقه به دست می‌آید و قاعدهٔ حلقه نیز نتیجه‌ای از اصل پایستگی انرژی در مدارهای تک حلقه‌ای است. اگر دو طرف معادلهٔ ۳۱ـ۴۸ را در i ضرب کنیم، داریم

$$\mathscr{E}i = Li\frac{di}{dt} + i^2R \qquad (۳۱\text{ـ}۴۹)$$

تعبیر فیزیکی این معادله در رابطه با کار و انرژی چنین است:

۱. در شکل ۳۱ـ۱۸، اگر بار الکتریکی dq در زمان dt از چشمهٔ با نیروی محرک الکتریکی $\mathscr{E}$ بگذرد، این چشمه روی بار به اندازهٔ $\mathscr{E}dq$ کار انجام می‌دهد. آهنگ انجام دادن کار توسط باتری برابر با $(\mathscr{E}dq)/dt$ یا $\mathscr{E}i$ است. بنابراین، جملهٔ سمت چپ در معادلهٔ ۳۱ـ۴۹ نشان دهندهٔ آهنگ تحویل دادن انرژی به مدار توسط چشمهٔ نیروی محرک الکتریکی است.

۲. جملهٔ دوم در سمت راست معادلهٔ ۳۱ـ۴۹، آهنگ ظاهر شدن انرژی به صورت انرژی گرمایی در مقاومت را نشان می‌دهد.

۳. آن مقدار از انرژی که به صورت انرژی گرمایی ظاهر نمی‌شود، بر پایهٔ اصل پایستگی انرژی، باید در میدان مغناطیسی القاگر ذخیره شود. چون معادلهٔ ۳۱ـ۴۹ بیان کنندهٔ اصل پایستگی انرژی در مدارهای RL است، جملهٔ میانی در معادلهٔ بالا باید نمایشگر آهنگ ذخیره شدن انرژی در میدان مغناطیسی، dU_B/dt، باشد. در این صورت، می‌توان نوشت

$$\frac{dU_B}{dt} = Li\frac{di}{dt} \qquad (۳۱\text{ـ}۵۰)$$

این رابطه را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$dU_B = Lidi$$

با انتگرال‌گیری از دو طرف معادلهٔ بالا، داریم

$$\int_{0}^{U_B} dU_B = \int_{0}^{i} Lidi$$

یا

$$U_B = \frac{1}{2}Li^2 \qquad \text{(انرژی مغناطیسی)} \qquad (۵۱\text{-}۳۱)$$ ■

که نمایشگر انرژی کل ذخیره شده در القاگر L حامل جریان i است. به تشابه این رابطه، از لحاظ شکل، با رابطهٔ انرژی ذخیره شده در یک خازن با ظرفیت C و بار الکتریکی q، یعنی

$$U_E = \frac{q^2}{2C} \qquad (۵۲\text{-}۳۱)$$

توجه کنید. (متغیر i^2 با q^2 و ثابت L با $1/C$ متناظر است)

مسألهٔ نمونهٔ ۳۱ـ۷

یک پیچه دارای القاییدگی ۵۳mH و مقاومت ۰٫۳۵Ω است.

(الف) اگر به دو سر پیچه یک نیروی محرک ۱۲V اعمال شود، پس از رسیدن جریان به مقدار تعادلی چه انرژی‌ای در میدان مغناطیسی ذخیره می‌شود؟

حل: در اینجا **نکتهٔ کلیدی** این است که انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی یک پیچه در هر زمان، طبق معادلهٔ ۳۱ـ۵۱ ($U_B=\frac{1}{2}Li^2$)، به جریان گذرنده از پیچه بستگی دارد. بنابراین، برای پیدا کردن انرژی ذخیره شدهٔ $U_{B\infty}$ در حالت تعادل، نخست باید جریان تعادلی را پیدا کنیم. جریان تعادلی طبق معادلهٔ ۳۱ـ۴۳ برابر است با:

$$i_\infty = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{12\,V}{0{,}35\,\Omega} = 34{,}3\,A \qquad (۵۳\text{-}۳۱)$$

با جانشانی این مقدار، داریم

$$U_{B\infty} = \frac{1}{2}Li_\infty^2 = (\frac{1}{2})(53\times10^{-3}H)(34{,}3A)^2 \Rightarrow$$

$$U_{B\infty} = 31\,J \qquad \text{(پاسخ)}$$

(ب) پس از گذشت چند ثابت زمانی نصف این انرژی تعادلی در میدان مغناطیسی ذخیره می‌شود؟

حل: **نکتهٔ کلیدی** قسمت (الف) در اینجا هم صادق است. اکنون، پرسش این است که: پس از چه مدت t، رابطهٔ زیر برقرار می‌شود

$$U_B = \frac{1}{2}U_{B\infty}$$

اگر از معادلهٔ ۳۱ـ۵۱ دوبار استفاده کنیم این شرط انرژی به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\frac{1}{2}Li^2 = (\frac{1}{2})\frac{1}{2}Li_\infty^2$$

یا

$$i = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)i_\infty \qquad (۵۴\text{-}۳۱)$$

اما i از معادلهٔ ۳۱ـ۴۳ به دست می‌آید و i_∞ برابر با $\mathscr{E}/R$ است (معادلهٔ ۳۱ـ۵۳ را ببینید). در نتیجه، معادلهٔ ۳۱ـ۵۴ به صورت زیر در می‌آید

$$\frac{\mathscr{E}}{R}(1 - e^{-t/\tau_L}) = \frac{\mathscr{E}}{\sqrt{2}R}$$

پس از حذف کردن $\mathscr{E}/R$ و باز آرایش معادلهٔ حاصل، می‌توان نوشت:

$$e^{-t/\tau_L} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}293$$

و از آنجا، داریم

$$\frac{t}{\tau_L} = -\ln 0{,}293 = 1{,}23 \Rightarrow$$

$$t \approx 1{,}2\tau_L \qquad \text{(پاسخ)}$$

بنابراین، پس از اعمال کردن نیروی محرک، زمانی برابر با ۱٫۲ ثابت زمانی می‌گذرد تا انرژی ذخیره شده به نصف مقدار تعادلی برسد.

۳۱ـ۱۱ چگالی انرژی میدان مغناطیسی

طول l از یک سیملولهٔ دراز را در نزدیکی میانهٔ آن در نظر بگیرید. سیملوله دارای مساحت مقطع A و حامل جریان i است و حجم مربوط به این طول، Al است. انرژی ذخیره شدهٔ U_B، در طول l این سیملوله، باید به طور کامل درون این حجم قرار گیرد، زیرا میدان مغناطیسی در خارج سیملوله تقریباً صفر است. علاوه بر این، انرژی ذخیره شده در درون سیملوله باید به طور یکنواخت توزیع شده باشد، چون میدان مغناطیسی در تمام نقاط درون سیملوله یکنواخت (تقریباً) است.

بنابراین، انرژی ذخیره شده در یکای حجم میدان مغناطیسی برابر است با:

$$u_B = \frac{U_B}{Al}$$

یا، چون

$$U_B = \frac{۱}{۲}Li^۲$$

داریم

$$u_B = \frac{Li^۲}{۲Al} = \frac{L}{l}\frac{i^۲}{۲A}$$

در اینجا L القاییدگی طول l از سیملوله است.

با جانشانی مقدار L/l از معادلهٔ ۳۱ـ۳۳، داریم

$$u_B = \frac{۱}{۲}\mu_۰ n^۲ i^۲ \qquad (۳۱\text{ـ}۵۵)$$

که در آن n تعداد دورهای سیم در یکای طول است. با استفاده از معادلهٔ ۳۰ـ۲۵ ($B=\mu_۰ in$) معادلهٔ چگالی انرژی را می‌توان چنین نوشت:

$$u_B = \frac{B^۲}{۲\mu_۰} \qquad \text{(چگالی انرژی مغناطیسی)} \qquad (۳۱\text{ـ}۵۶)$$ ■

این معادله چگالی انرژی ذخیره شده در هر نقطه را که در آن میدان مغناطیسی B است، بـه دست مـی‌دهد. اگرچه معادلهٔ ۳۱ـ۵۶ را با در نظر گرفتن حالت خاص سیملوله به دست آوردیم، اما این معادله در مورد تمام میدان‌های مغناطیسی بدون توجه به نحوهٔ تولید آنها صادق است. این معادله را می‌توان بـا مـعادلهٔ ۲۶ـ۲۳، یعنی

$$u_E = \frac{۱}{۲}\varepsilon_۰ E^۲ \qquad (۳۱\text{ـ}۵۷)$$

که چگالی انرژی (در خلاء) را برای هر نقطه از میدان الکتریکی به دست می‌دهد، مقایسه کرد. توجه کنید که u_B و u_E هر دو با مجذور بزرگی میدان مربوط، یعنی B و E متناسب‌اند.

خودآزمایی ۷: جدول زیر، تعداد دورهای سیم در یکای طول، جریان، و مساحت مقطع مربوط به سه سیملوله را به دست می‌دهد. این سیملوله‌ها را با توجه به چگالی انرژی مغناطیسی درون آنها، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.

سیملوله	تعداد دور در یکای طول	جریان	مساحت
الف	$۲n_۱$	$i_۱$	$۲A_۱$
ب	$n_۱$	$۲i_۱$	$A_۱$
پ	$n_۱$	$i_۱$	$۶A_۱$

مسألهٔ نمونهٔ ۳۱ـ۸

یک کابل هم محور دراز (شکل ۳۱ـ۲۱) شامل دو استوانهٔ جدار نازک رسانای هم محور به شعاع‌های a و b است. استوانهٔ درونی حـامل جـریان پـایای i است و استوانهٔ بیرونی مسیر برگشت جریان را تأمین می‌کند. این جریان در میان دو استوانه یک میدان مغناطیسی تولید می‌کند.

(الف) انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی را بـرای طـول l از ایـن کـابل

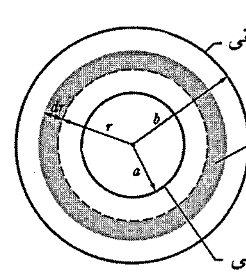
حل: نکته‌های کلیدی این مسألهٔ چالش برانگیز عبارت‌اند از:

۱. ما می‌توانیم انرژی ذخیره شدهٔ (کل) U_B در میدان مغناطیسی را با استفاده از چگالی انرژی میدان u_B، حساب کنیم.

۲. طبق معادلهٔ ۳۱ـ۵۶ ($u_B=B^۲/۲\mu_۰$)، چگالی انـرژی بـه بـزرگی مـیدان مغناطیسی B، بستگی دارد.

۳. با توجه به تقارن دایره‌ای کابل می‌توان از قانون آمپر اسـتفاده و بـه ازای جریان معلوم i، میدان B را حساب کرد.

تعیین میدان B: برای توجه به این نکته‌ها با استفاده از یک مسیر دایره‌ای



شکل ۳۱ـ۲۱ مسألهٔ نمونهٔ ۳۱ـ۸. نمودار مقطع یک کابل هم محور دراز شامل دو استوانهٔ جدار نازک رسانا، که در آن شعاع استوانهٔ درونی a و شعاع استوانهٔ بیرونی b است.

انتگرال‌گیری به شعاع r، با شرط $a<r<b$ (واقع در بین دو استوانه، که در شکل ۳۱ـ۲۱ با خط‌چین نشان داده شده است) از قانون آمپر آغاز می‌کنیم. تنها جریان محصور شده توسط این مسیر جریان i مربوط به استوانهٔ درونی است. پس، قانون آمپر را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 i \qquad (۳۱\text{ـ}۵۸)$$

اکنون، این انتگرال را ساده می‌کنیم: به خاطر وجود تقارن دایره‌ای در تمام نقاط واقع بر مسیر دایره‌ای، $\vec{B}$ بر مسیر مماس و دارای بزرگی B است. جهت انتگرال‌گیری در طول مسیر را همان جهت میدان مغناطیسی در پیرامون مسیر انتخاب می‌کنیم. بنابراین، به جای $\vec{B}\cdot d\vec{s}$ می‌توان $Bds\cos 0=Bds$ را قرار داد و بزرگی B را از انتگرال خارج کرد. انتگرال باقی مانده $\oint ds$ است که برابر با محیط مسیر $2\pi r$، است. پس، معادلهٔ ۳۱ـ۵۸ به صورت زیر ساده می‌شود:

$$B(2\pi r) = \mu_0 i$$

یا

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \qquad (۳۱\text{ـ}۵۹)$$

تعیین u_B: اکنون، برای به دست آوردن چگالی انرژی، معادلهٔ ۳۱ـ۵۹ را در معادلهٔ ۳۱ـ۵۶ قرار می‌دهیم:

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 i^2}{8\pi^2 r^2} \qquad (۳۱\text{ـ}۶۰)$$

تعیین U_B: توجه کنید که u_B در حجم میان دو استوانه یکنواخت نیست، بلکه به فاصلهٔ شعاعی r بستگی دارد. بنابراین، برای پیدا کردن U_B، انرژی کل ذخیره شده در میان استوانه‌ها باید از تابع u_B در این حجم انتگرال بگیریم.

چون حجم میان استوانه‌ها نسبت به محور مرکزی کابل تقارن دایره‌ای دارد عنصر حجم پوستهٔ استوانه‌ای واقع در میان استوانه‌ها dV، را در نظر می‌گیریم؛ این پوسته دارای شعاع درونی r، شعاع بیرونی $r+dr$ (شکل ۳۱ـ۲۱)، و طول l است. مساحت مقطع پوسته (یا مساحت روبه‌رو) برابر با حاصل‌ضرب محیط $2\pi r$، در ضخامت dr است. بنابراین، حجم پوسته dV، برابر است با: $dV = 2\pi rl dr$.

چون نقاط درون پوسته، تقریباً همه، در فاصلهٔ شعاعی r قرار دارند، چگالی انرژی همهٔ آنها تقریباً یکسان و برابر با u_B است. پس، U_B، انرژی کل موجود در پوسته‌ای به حجم dV، برابر است با:

(حجم)(انرژی در یکای حجم) = انرژی

یا

$$dU_B = u_B\, dV$$

با جانشانی مقدار u_B از معادلهٔ ۳۱ـ۶۰ و قرار دادن مقدار $2\pi rl dr$ به جای dV، داریم

$$dU_B = \frac{\mu_0 i^2}{8\pi^2 r^2}(2\pi rl)dr = \frac{\mu_0 i^2 l}{4\pi}\frac{dr}{r}$$

برای تعیین انرژی کل موجود در میان دو استوانه، از این معادله روی حجم میان استوانه‌ها انتگرال می‌گیریم:

$$U_B = \int dU_B = \frac{\mu_0 i^2 l}{4\pi}\int_a^b \frac{dr}{r} \quad \Rightarrow$$

$$U_B = \frac{\mu_0 i^2 l}{4\pi}\ln\frac{b}{a} \qquad \text{(پاسخ)} \ (۳۱\text{ـ}۶۱)$$

در خارج استوانهٔ بیرونی یا داخل استوانهٔ درونی هیچ انرژی‌ای ذخیره نمی‌شود زیرا در هر دو ناحیه، چنانکه قانون آمپر نشان می‌دهد، میدان مغناطیسی صفر است.

(ب) انرژی ذخیره شده در یکای طول کابل، به ازای $a=1{,}2\text{mm}$، $b=3{,}5\text{mm}$ و $i=2{,}7\text{A}$، چقدر است؟

حل: با توجه به معادلهٔ ۳۱ـ۶۱، داریم

$$\frac{U_B}{l} = \frac{\mu_0 i^2}{4\pi}\ln\frac{b}{a}$$

$$\frac{U_B}{l} = \frac{(4\pi\times 10^{-7}\text{H/m})(2{,}7\text{A})^2}{4\pi}\ln\frac{3{,}5\text{mm}}{1{,}2\text{mm}} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{U_B}{l} = 7{,}8\times 10^{-7}\text{J/m} = 780\text{nJ/m} \qquad \text{(پاسخ)}$$

۳۱ـ۱۲ القایش متقابل

در این بخش به حالت مربوط به برهم کنش دو پیچه، که نخست آن را در بخش ۳۱ـ۲ مورد بحث قرار دادیم، برمی‌گردیم. و این موضوع را تا اندازه‌ای با روشی صوری‌تر بررسی می‌کنیم. پیشتر، دیدیم که اگر، مطابق شکل ۳۱ـ۲، دو پیچه نزدیک به هم قرار گیرند، جریان پایای گذرندهٔ i، از یک پیچه در پیچهٔ دیگر شار مغناطیسی Φ تولید می‌کند (با پیچهٔ دیگر ارتباط برقرار می‌کند). اگر i را نسبت به زمان تغییر دهیم در پیچهٔ دوم، طبق قانون

فارادی نیروی محرک الکتریکی $\mathscr{E}$ ظاهر می‌شود. این فرایند را القایش نامیدیم. با توجه به برهم‌کنش متقابل دو پیچه و به خاطر تمیز دادن این اثر از خودالقایش که فقط مربوط به یک پیچه است، بهتر است آن را القایش متقابل بنامیم.

اکنون، القایش متقابل را از لحاظ کمی مورد مطالعه قرار می‌دهیم. شکل ۳۱-۲۲ الف، دو پیچهٔ دایره‌ای با سیم‌های تنگ هم پیچیده را که به هم نزدیک‌اند و محور مشترک دارند، نشان می‌دهد. در پیچهٔ ۱ جریان پایای i_1 در مدار خارجی توسط باتری برقرار می‌شود. این جریان یک میدان مغناطیسی تولید می‌کند که در شکل با خط‌های $\vec{B}_1$ مشخص شده است. پیچهٔ ۲ به یک اسباب اندازه‌گیری حساس وصل شده است، اما شامل هیچ باتری‌ای نیست؛ شار مغناطیسی Φ_{21} (شار گذرنده از پیچهٔ ۲ که مربوط به جریان پیچهٔ ۱ است) از N_2 دور سیم‌پیچ پیچهٔ ۲ عبور می‌کند.

القاییدگی متقابل M_{21} پیچهٔ ۲ نسبت به پیچهٔ ۱ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$M_{21} = \frac{N_2\Phi_{21}}{i_1} \qquad (۳۱\text{-}۶۲)$$

که شکل آن مانند معادلهٔ ۳۱-۳۰ ($L=N\Phi/i$)، تعریف کنندهٔ (خود)القاییدگی است. معادلهٔ ۳۱-۶۲ را می‌توان چنین نوشت:

$$M_{21}i_1 = N_2\Phi_{21}$$

اگر با وسیله‌ای خارجی i_1 را نسبت به زمان تغییر دهیم، داریم

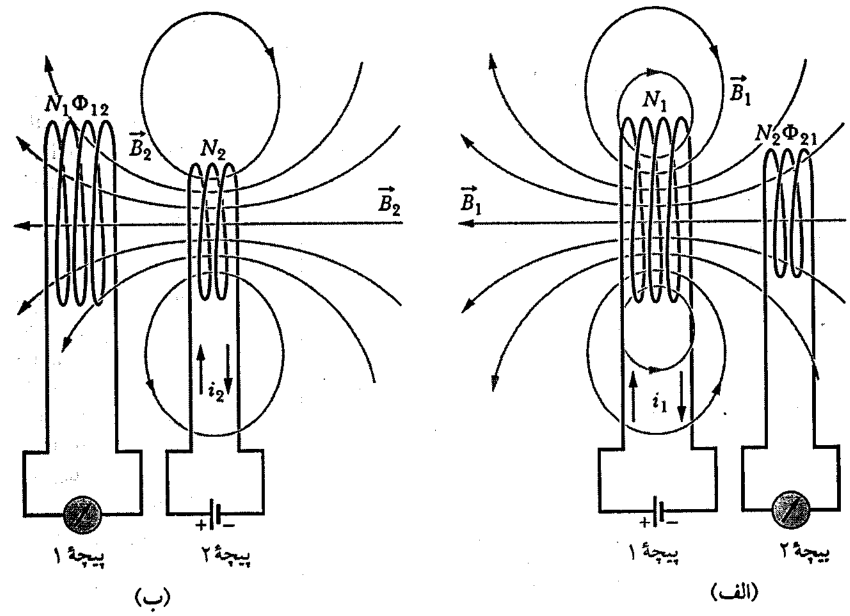
$$M_{21}\frac{di_1}{dt} = N_2\frac{d\Phi_{21}}{dt}$$

طرف راست این معادله، طبق قانون فارادی، بزرگی نیروی محرک الکتریکی $\mathscr{E}_2$ در پیچهٔ ۲ است که از تغییر جریان پیچهٔ ۱ ناشی می‌شود. بنابراین، با کاربرد علامت منها برای نشان دادن جهت، داریم

$$\mathscr{E}_2 = -M_{21}\frac{di_1}{dt} \qquad (۳۱\text{-}۶۳)$$

این معادله را با معادلهٔ ۳۱-۳۷ مربوط به خودالقایش ($\mathscr{E}=-Ldi/dt$) مقایسه کنید.

اکنون، نقش پیچه‌های ۱ و ۲ در شکل ۳۱-۳۷ را عوض می‌کنیم؛ یعنی، جریان i_2 را به وسیلهٔ یک باتری در



شکل ۳۱-۲۲ نموداری از القایش متقابل. اگر جریان پیچهٔ ۱ تغییر کند یک نیروی محرک الکتریکی در پیچهٔ ۲ القا می‌شود. (ب) اگر جریان پیچهٔ ۲ تغییر کند یک نیروی محرک الکتریکی در پیچهٔ ۱ القا می‌شود.

پیچهٔ ۲ برقرار می‌کنیم. این جریان شار مغناطیسی Φ_{12} را تولید می‌کند که از پیچهٔ ۱ می‌گذرد. اگر i_2 را نسبت به زمان تغییر دهیم، با استدلالی مشابه آنچه در بالا آمد، داریم

$$\mathscr{E}_1 = -M_{12}\frac{di_2}{dt} \qquad (۶۴\text{-}۳۱)$$

بنابراین، ملاحظه می‌شود که نیروی محرک الکتریکی القا شده در هر پیچه با آهنگ تغییر جریان در پیچهٔ دیگر متناسب است. در اینجا ثابت‌های تناسب M_{21} و M_{12} متفاوت به نظر می‌رسند. اما بدون اثبات می‌گوییم که این دو مقدار در واقع یکی هستند و از این رو نیازی به نوشتن شاخص‌های پایین نیست. (این نتیجه‌گیری درست است اما چندان بدیهی نیست). بنابراین، داریم

$$M_{21} = M_{12} = M \qquad (۶۵\text{-}۳۱)$$

معادله‌های ۳۱-۶۳ و ۳۱-۶۴ را می‌توان دوباره به صورت زیر نوشت

$$\mathscr{E}_2 = -M\frac{di_1}{dt} \qquad (۶۶\text{-}۳۱)$$ ■

و

$$\mathscr{E}_1 = -M\frac{di_2}{dt} \qquad (۶۷\text{-}۳۱)$$ ■

فرایند القایش واقعاً متقابل است. یکای SI ثابت M (مانند L)، هانری است.

مسألهٔ نمونهٔ ۳۱-۹

شکل ۳۱-۲۳ دو پیچهٔ دایره‌ای تنگ هم پیچیده را نشان می‌دهد. پیچهٔ کوچکتر (به شعاع R_2 و دارای N_2 دور سیم‌پیچی) با پیچهٔ بزرگتر (با شعاع R_1 و N_1 دور سیم‌پیچی) هم محور است و دو پیچه در یک صفحه قرار دارند.

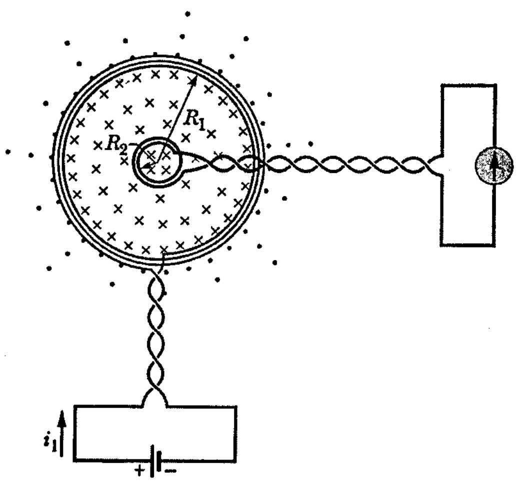
(الف) رابطهٔ مربوط به القاییدگی متقابل M را برای آرایش این دو پیچه با فرض $R_1 \gg R_2$، به دست آورید.

حل: در اینجا **نکتهٔ کلیدی** این است که القاییدگی متقابل مربوط به این پیچه‌ها M، برابر است با نسبت ارتباط شاری ($N\Phi$) گذرنده از یک پیچه به جریان i گذرنده از پیچهٔ دیگر، که به وجود آورندهٔ این ارتباط شاری است. بنابراین، باید فرض کنیم که جریان در پیچه‌ها برقرار است؛ سپس، لازم است ارتباط شاری در یکی از پیچه‌ها را حساب کنیم.

میدان مغناطیسی گذرنده از پیچهٔ بزرگ، که از پیچهٔ کوچک ناشی می‌شود، از نظر بزرگی و جهت نایکنواخت است. در نتیجه، شار گذرنده از پیچهٔ بزرگ و ناشی شده از پیچهٔ کوچک نایکنواخت و محاسبهٔ آن مشکل است. اما پیچهٔ کوچک آن‌قدر کوچک است که می‌توان فرض کرد که میدان مغناطیسی گذرنده از آن که از پیچهٔ بزرگ ناشی می‌شود، تقریباً یکنواخت است. بنابراین، شار گذرنده از آن و ناشی شده از پیچهٔ بزرگ نیز تقریباً یکنواخت است. از این رو، برای پیدا کردن M فرض می‌کنیم جریان در پیچهٔ بزرگ i_1 است و ارتباط شاری $N_2\Phi_{21}$ مربوط به پیچهٔ کوچک را حساب می‌کنیم:

$$M = \frac{N_2\Phi_{21}}{i_2} \qquad (۶۸\text{-}۳۱)$$

نکتهٔ کلیدی دیگر این است که شار گذرنده از هر دور سیم از پیچهٔ



شکل ۳۱-۲۳ مسألهٔ نمونهٔ ۳۱-۹. پیچهٔ کوچکی در مرکز یک پیچهٔ بزرگ قرار گرفته است. القاییدگی متقابل این پیچه‌ها را می‌توان با عبور دادن جریان i_1 از پیچهٔ بزرگ معین کرد.

کوچک Φ_{21}، با توجه به معادلهٔ ۳۱-۴، برابر است با:

$$\Phi_{21} = B_1 A_2$$

که در آن B_1 بزرگی میدان مغناطیسی در نقاط درون پیچهٔ کوچک و ناشی شده از پیچهٔ بزرگ، A_2 (مساوی با πR_2^2) مساحت محصور شده توسط هر دور سیم است. بنابراین، ارتباط شاری در پیچهٔ کوچک (با N_2 دور سیم‌پیچی) برابر است با:

$$N_2\Phi_{21} = N_2 B_1 A_2 \qquad (۶۹\text{-}۳۱)$$

نکتهٔ کلیدی سوم این است که برای پیدا کردن B_1 در نقاط درون پیچهٔ

کوچک می‌توان از معادلهٔ ۳۰-۲۸ به ازای $z=0$، استفاده کرد، زیرا پیچهٔ کوچک در صفحهٔ پیچهٔ بزرگ قرار دارد. این معادله نشان می‌دهد که هر دور سیم از پیچهٔ بزرگ یک میدان مغناطیسی به بزرگی $\mu_0 i_1/2R_1$ در نقاط درون پیچهٔ کوچک تولید می‌کند. بنابراین، پیچهٔ بزرگ (با N_1 دور سیم‌پیچی) یک میدان مغناطیسی کل با بزرگی

$$B_1 = N_1\frac{\mu_0 i_1}{2R_1} \qquad (۳۱\text{-}۷۰)$$

در نقاط درون پیچهٔ کوچک تولید می‌کند.

با جانشانی B_1 از معادلهٔ ۳۱-۷۰ و قرار دادن πR_2^2 به جای A_2 در معادلهٔ ۳۱-۶۹، داریم

$$N_2\Phi_{21} = \frac{\pi\mu_0 N_1 N_2 R_2^2 i_1}{2R_1}$$

با جانشانی این مقدار در معادلهٔ ۳۱-۶۸، خواهیم داشت

$$M = \frac{N_2\Phi_{21}}{i_1} = \frac{\pi\mu_0 N_1 N_2 R_2^2}{2R_1} \qquad \text{(پاسخ)} \quad (۳۱\text{-}۷۱)$$

(ب) مقدار M به ازای، دور ۱۲۰۰ $= N_1 = N_2$، $R_2 = 1.1\,\text{cm}$ و $R_1 = 15\,\text{cm}$، چیست؟

حل: با استفاده از معادلهٔ ۳۱-۷۱، داریم

$$M = \frac{(\pi)(4\pi\times10^{-7}\,\text{H/m})(1200)(1200)(0.011\,\text{m})^2}{(2)(0.15\,\text{m})} \Rightarrow$$

$$M = 2.29\times10^{-3}\,\text{H} \approx 2.3\,\text{mH} \qquad \text{(پاسخ)}$$

اکنون، حالتی را در نظر می‌گیریم که در آن نقش دو پیچه عوض شود، یعنی، جریان i_2 در پیچهٔ کوچک برقرار شود و بخواهیم M را از معادلهٔ ۳۱-۶۲ به صورت زیر حساب کنیم:

$$M = \frac{N_1\Phi_{12}}{i_2}$$

محاسبهٔ Φ_{12} (شار نایکنواخت حاصل از میدان مغناطیسی پیچهٔ کوچک و احاطه شده توسط پیچهٔ بزرگ) ساده نیست. می‌توانستیم با استفاده از یک رایانه این محاسبه را انجام دهیم، عدد ۲٫۳mH، یعنی همان مقدار بالا را برای M به دست می‌آوردیم! این موضوع ما را بر آن می‌دارد که به واقعیت بدیهی نبودن معادله ۳۱-۶۵ ($M_{21}=M_{12}=M$) توجه کنیم.

مرور و خلاصهٔ مطالب فصل

شار مغناطیسی شار مغناطیسی Φ_B گذرنده از سطحی به مساحت A در میدان مغناطیسی $\vec{B}$ چنین تعریف می‌شود:

$$\Phi_B = \int \vec{B}\cdot d\vec{A} \qquad (۳۱\text{-}۳)$$

که در آن انتگرال در روی سطح گرفته می‌شود. یکای SI شار مغناطیسی **وبر** (با نماد Wb) است، که $1\,\text{Wb} = 1\,\text{T.m}^2$. اگر $\vec{B}$ بر سطح عمود و در روی آن یکنواخت باشد، معادلهٔ ۳۱-۳ چنین نوشته می‌شود:

$$\Phi_B = BA \qquad (\vec{B}\ \text{یکنواخت و عمود بر سطح به مساحت}\ A) \qquad (۳۱\text{-}۴)$$

قانون القایش فارادی اگر Φ_B، شار مغناطیسی گذرنده از یک سطح احاطه شده توسط یک حلقهٔ رسانای بسته نسبت به زمان تغییر کند، یک جریان و یک نیروی محرک الکتریکی در حلقه به وجود می‌آید؛ این فرایند را القایش می‌نامند. نیروی محرک الکتریکی القا شده برابر است با:

$$\mathscr{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad \text{(قانون فارادی)} \qquad (۳۱\text{-}۶)$$

اگر به جای حلقه، پیچه‌ای شامل N دور سیم تنگ هم پیچیده داشته باشیم نیروی محرک الکتریکی القا شده برابر است با:

$$\mathscr{E} = -N\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad (۳۱\text{-}۷)$$

قانون لنز جهت جریان القایی به گونه‌ای است که میدان مغناطیسی ناشی از این جریان با تغییر شار مغناطیسی به وجود آورندهٔ آن مخالفت می‌کند. نیروی محرک الکتریکی القایی با جریان القایی در یک جهت است.

نیروی محرک الکتریکی و میدان الکتریکی القایی اگر حلقه‌ای که از آن شار مغناطیسی متغیر عبور می‌کند، نه یک رسانای فیزیکی، بلکه یک خط تصوری باشد، باز هم در اثر تغییر شار مغناطیسی نیروی محرک الکتریکی القایی به وجود می‌آید. میدان مغناطیسی متغیر در هر نقطه از چنین حلقه‌ای یک میدان الکتریکی $\vec{E}$ تولید می‌کند؛ رابطهٔ نیروی محرک الکتریکی القایی با $\vec{E}$ چنین است:

$$\mathscr{E} = \oint \vec{E}\cdot d\vec{s} \qquad (۳۱\text{-}۲۱)$$

این انتگرال در روی محیط حلقه گرفته می‌شود. با استفاده از معادلهٔ ۳۱-۲۱، معادلهٔ قانون فارادی را می‌توان به شکل کلی زیر نوشت

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad \text{(قانون فارادی)} \qquad (۳۱\text{-}۲۲)$$

چکیدهٔ قانون فارادی چنین است: **میدان مغناطیسی متغیر یک میدان مغناطیسی $\vec{E}$ القا می‌کند.**

القاگرها **القاگر** وسیله‌ای است که از آن می‌توان برای تولید میدان مغناطیسی معین در یک ناحیهٔ خاص استفاده کرد. اگر از هر یک از دورهای سیم‌پیچ N دوری یک القاگر جریان i عبور کند شار مغناطیسی Φ_B این سیم‌پیچ‌ها را به هم ارتباط می‌دهد. **القاییدگی** این القاگر L، برابر است با:

$$L = \frac{N\Phi_B}{i} \qquad \text{(تعریف القاییدگی)} \qquad (۳۱\text{-}۳۰)$$

یکای SI القاییدگی **هانری** (با نماد H) است:

$$\text{یک هانری} = 1\,\text{H} = 1\,\text{T.m}^2/\text{A} \qquad (۳۱\text{-}۳۱)$$

القاییدگی یکای طول یک سیملوله دراز با مساحت مقطع A و تعداد دورهای

سیم در یکای طول n، در نزدیکی میانهٔ سیملوله برابر است با:

$$\frac{L}{l} = \mu_0 n^2 A \qquad \text{(سیملوله)} \qquad (۳۱\text{-}۳۳)$$

خودالقایش اگر در یک پیچه جریان i نسبت به زمان تغییر کند، یک نیروی محرک الکتریکی در پیچه القا می‌شود. این نیروی محرک الکتریکی خودالقاییده برابر است با:

$$\mathscr{E}_L = -L\frac{di}{dt} \qquad (۳۱\text{-}۳۷)$$

جهت $\mathscr{E}_L$ با توجه به قانون لنز معین می‌شود: نیروی محرک الکتریکی خودالقاییده با تغییراتی که آن را به وجود می‌آورد، مخالفت می‌کند.

مدارهای RL سری اگر نیروی محرک الکتریکی ثابت $\mathscr{E}$ به یک مدار تک حلقه‌ای، شامل مقاومت R و القاگر L اعمال شود، جریان مدار طبق معادلهٔ زیر تا مقدار تعادلی $\mathscr{E}/R$ بالا می‌رود:

$$i = \frac{\mathscr{E}}{R}(1 - e^{-t/\tau_L}) \qquad \text{(خیز جریان)} \qquad (۳۱\text{-}۴۳)$$

در اینجا τ_L (مساوی با L/R) آهنگ خیز جریان را معین می‌کند و **ثابت زمانی القایی** مدار نامیده می‌شود. هرگاه چشمهٔ نیروی محرک الکتریکی ثابت حذف شود، جریان نسبت به زمان از مقدار آغازی i_0 به‌صورت زیر افت پیدا می‌کند

$$i = i_0 e^{-t/\tau_L} \qquad \text{(فروافت جریان)} \qquad (۳۱\text{-}۴۷)$$

انرژی مغناطیسی اگر القاگری حامل جریان i باشد میدان مغناطیسی القاگر مقداری انرژی ذخیره می‌کند که برابر است با:

$$U_B = \frac{1}{2}Li^2 \qquad \text{(انرژی مغناطیسی)} \qquad (۳۱\text{-}۵۱)$$

اگر B بزرگی میدان مغناطیسی در نقطه‌ای (درون القاگر یا هر جای دیگر) باشد، چگالی انرژی مغناطیسی ذخیره شده در آن نقطه برابر است با:

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} \qquad \text{(چگالی انرژی مغناطیسی)} \qquad (۳۱\text{-}۵۶)$$

القایش متقابل هرگاه دو پیچه (۱ و ۲) نزدیک هم قرار گیرند، جریان متغیر در یک پیچه می‌تواند یک نیروی محرک الکتریکی در پیچهٔ دیگر القا کند. این القایش متقابل با معادله‌های زیر توصیف می‌شود

$$\mathscr{E}_2 = -M\frac{di_1}{dt} \qquad (۳۱\text{-}۶۶)$$

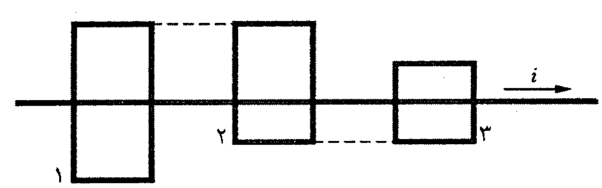
و

$$\mathscr{E}_1 = -M\frac{di_2}{dt} \qquad (۳۱\text{-}۶۷)$$

که در آنها M (برحسب هانری) القاییدگی متقابل برای آرایش پیچه‌هاست.

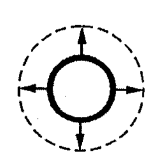
پرسش‌ها

۱. در شکل ۳۱-۲۴، یک سیم دراز مستقیم با جریان i از سه حلقهٔ سیمی مستطیل شکل به طول‌های L، $1.5L$ و $2L$ (بدون تماس) عبور می‌کند. فاصلهٔ این حلقه‌ها از یکدیگر به قدر کافی زیاد است (به گونه‌ای که یکی بر دیگری اثری ندارد). حلقه‌های ۱ و ۳ نسبت به سیم دراز تقارن دارند. این حلقه‌ها را با توجه به اندازهٔ جریان القا شده در آنها، هنگامی که i (الف) ثابت است، و (ب) افزایش می‌یابد، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



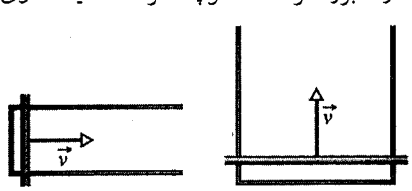
شکل ۳۱-۲۴ پرسش ۱.

۲. در شکل ۳۱-۲۵، اگر رسانای دایره‌ای واقع در یک میدان مغناطیسی یکنواخت از نظر گرمایی منبسط شود، در آن جریان در جهت ساعتگرد القا می‌شود. آیا میدان مغناطیسی به درون سوی صفحهٔ شکل است یا به برون سو؟



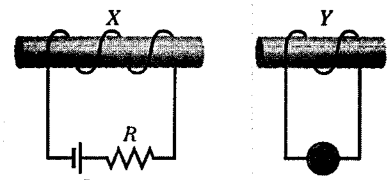
شکل ۳۱-۲۵ پرسش ۲.

۳. شکل ۳۱-۲۶، دو مدار را نشان می‌دهد که در آنها یک میلهٔ رسانا با تندی یکسان v در میدان مغناطیسی یکنواخت و مانند هم در طول یک سیم U ـ شکل می‌لغزد. فاصلهٔ طول‌های متوازی سیم، در مدار ۱ برابر با $2L$ و در مدار ۲ برابر با L است. جریان القا شده در مدار ۱ پادساعتگرد است. (الف) آیا میدان مغناطیسی به درون سوی صفحهٔ شکل است یا به برون سو؟ (ب) آیا جریان القا شده در مدار ۲ ساعتگرد است یا پادساعتگرد؟ (پ) آیا نیروی محرک الکتریکی القا شده در مدار ۱ نسبت به نیروی محرک الکتریکی القا شده در مدار ۲ بزرگ‌تر است، کوچک‌تر است، یا مساوی است؟



شکل ۳۱-۲۶ پرسش ۳.

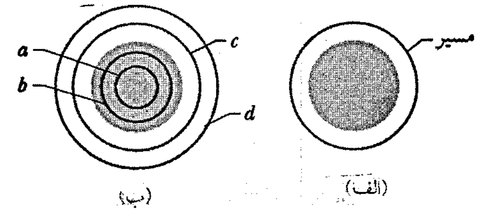
۴. شکل ۳۱-۲۷، دو پیچه را نشان می‌دهد که به دور میله‌های نارسانا پیچیده شده‌اند. پیچهٔ X به یک باتری و یک مقاومت تغییرپذیر وصل شده است. جهت جریان القایی گذرنده از دستگاه اندازه‌گیری جریان متصل به پیچهٔ Y در حالت‌های زیر چگونه است، (الف) وقتی که پیچهٔ Y به سمت پیچهٔ X حرکت داده می‌شود و (ب) وقتی که جریان در پیچهٔ X کاهش پیدا می‌کند، بدون آنکه مکان پیچه‌ها نسبت به هم تغییر کند؟



شکل ۳۱ـ۲۷ پرسش ۴.

۵. شکل ۳۱ـ۲۸ الف، ناحیه‌ای دایره‌ای را نشان می‌دهد، که در آن یک میدان مغناطیسی یکنواخت در حال افزایش در برون سوی صفحهٔ شکل و نیز یک مسیر دایره‌ای هم‌مرکز، که برآورد شدن $\oint \vec{E}.\vec{ds}$ در طول آن مورد نظر است، وجود دارد. جدول زیر، بزرگی آغازی میدان مغناطیسی، افزایش بزرگی آن، و بازهٔ زمانی مربوط به این افزایش را در سه حالت نشان می‌دهد. این حالت‌ها را با توجه به بزرگی میدان الکتریکی القا شده در طول مسیر، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.

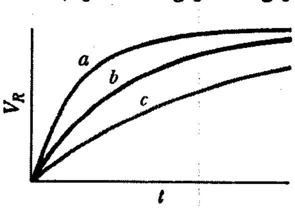
حالت	میدان آغازی	افزایش میدان	زمان
الف	B_1	ΔB_1	Δt_1
ب	$۲B_1$	$\Delta B_1/۲$	Δt_1
پ	$B_1/۴$	ΔB_1	$\Delta t_1/۲$



شکل ۳۱ـ۲۸ پرسش‌های ۵ و ۶.

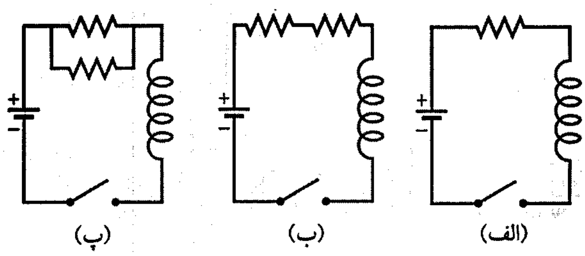
۶. شکل ۳۱ـ۲۸ ب، ناحیه‌ای دایره‌ای را که در آن میدان مغناطیسی یکنواخت، در حال کاهش در برون سوی صفحهٔ شکل و نیز چهار مسیر دایره‌ای هم‌مرکز وجود دارد، نشان می‌دهد. این مسیرها را با توجه به بزرگی $\oint \vec{B}.\vec{ds}$ برآورد شده در طول آنها، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.

۷. شکل ۳۱ـ۲۹، نمودارهای تغییرات زمانی اختلاف پتانسیل دو سر یک مقاومت V_R، را برای سه مدار وصل شده، مطابق شکل ۳۱ـ۱۸، نشان می‌دهد. این مدارها شامل مقاومت یکسان R و نیروی محرک الکتریکی یکسان $\mathscr{E}$ هستند، اما القاییدگی L در آنها متفاوت است. مدارها را با توجه به مقدار L، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



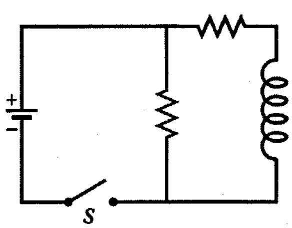
شکل ۳۱ـ۲۹ پرسش ۷.

۸. شکل ۳۱ـ۳۰، سه مدار شامل باتری‌ها، القاگرها و مقاومت‌های مشابه را نشان می‌دهد. این مدارها را با توجه به زمان رسیدن جریان به ۵۰ درصد مقدار تعادلی پس از بسته شدن کلید، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



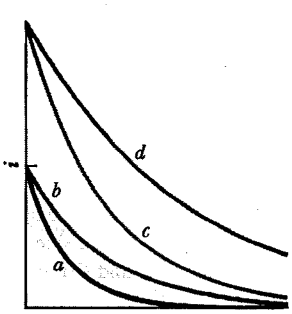
شکل ۳۱ـ۳۰ پرسش ۸.

۹. شکل ۳۱ـ۳۱، مداری شامل دو مقاومت مشابه و یک القاگر آرمانی را نشان می‌دهد. آیا جریان گذرنده از مقاومت میانی در حالت‌های (الف) درست پس از بستن کلید S، (ب) مدتی طولانی پس از بستن کلید S، (پ) درست پس از دوباره باز کردن کلید S، بعد از مدتی، و (ت) مدتی طولانی پس از دوباره باز کردن کلید S، نسبت به جریان گذرنده از مقاومت دیگر، بیشتر است، کمتر است یا مساوی است؟



شکل ۳۱ـ۳۱ پرسش ۹.

۱۰. کلید مدار شکل ۳۱ـ۱۷، به مدتی طولانی به نقطهٔ a وصل و سپس به نقطهٔ b وصل می‌شود. نمودار تغییرات زمانی جریان گذرنده از القاگر برای چهار مجموعه از مقادیر مقاومت R و القاییدگی L، در شکل ۳۱ـ۳۲، نشان داده شده است: (۱) R_0 و L_0، (۲) $۲R_0$ و L_0، (۳) R_0 و $۲L_0$، (۴) $۲R_0$ و $۲L_0$. کدام نمودار مربوط به کدام مجموعه است؟



شکل ۳۱ـ۳۲ پرسش ۱۰.

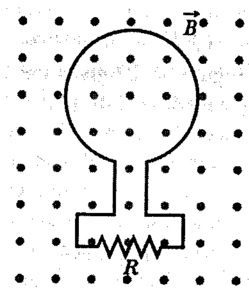
تمرین‌ها و مسأله‌ها

بخش ۳۱ـ۴ قانون لنز

۱ ت. قطر یک آنتن حلقه‌ای تلویزیون UHF برابر با ۱۱cm است. میدان مغناطیسی سیگنال تلویزیونی بر صفحهٔ حلقه عمود است و در لحظه‌ای از زمان بزرگی آن با آهنگ ۰٫۱۶T/s تغییر می‌کند. میدان مغناطیسی یکنواخت است. نیروی محرک الکتریکی القا شده در این آنتن چقدر است؟

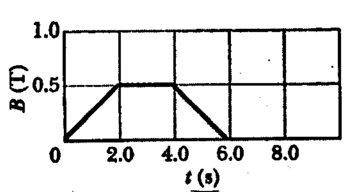
۲ ت. حلقهٔ کوچکی به مساحت A، به طور هم‌محور در درون سیملولهٔ درازی که دارای n دور سیم‌پیچی در یکای طول سیم و حامل جریان i است، قرار دارد. اگر معادلهٔ جریان $i=i_0\sin\omega t$ باشد، نیروی محرک الکتریکی القا شده در این حلقه را پیدا کنید.

۳ ت. در شکل ۳۱ـ۳۳، شار مغناطیسی گذرنده از حلقهٔ نشان داده شده طبق معادلهٔ $\Phi_B=۶٫۰t^2+۷٫۰t$ تغییر می‌کند. در این معادله Φ_B برحسب میلی وِبِر و t برحسب ثانیه است. (الف) بزرگی نیروی محرک الکتریکی القا شده در حلقه در زمان $t=۲٫۰$s چقدر است؟ (ب) جریان در R در چه جهتی است؟



شکل ۳۱ـ۳۳ تمرین ۳ و مسألهٔ ۱۱.

۴ ت. میدان مغناطیسی درون یک حلقهٔ سیمی تک دور به شعاع ۱۲cm و مقاومت ۸٫۵Ω، مطابق شکل ۳۱ـ۳۴، برحسب زمان تغییر می‌کند، نیروی محرک الکتریکی حلقه را به صورت تابعی از زمان حساب کنید. بازه‌های زمانی زیر را در نظر بگیرید: (الف) $t=۰$ تا $t=۲٫۰$s، (ب) $t=۲٫۰$s تا $t=۴٫۰$s، (پ) $t=۴٫۰$s تا $t=۶٫۰$s. میدان مغناطیسی (یکنواخت) بر صفحهٔ حلقه عمود است.



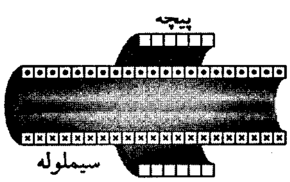
شکل ۳۱ـ۳۴ تمرین ۴.

۵ ت. میدان مغناطیسی یکنواختی بر صفحهٔ یک حلقهٔ دایره‌ای به قطر ۱۰cm، که از سیمی مسی (به قطر ۲٫۵mm) ساخته شده عمود است.

(الف) مقاومت سیم را حساب کنید (به جدول ۲۷ـ۱ رجوع کنید). (ب) اگر بخواهیم جریان القا شده در حلقه ۱۰A باشد، میدان مغناطیسی باید با چه آهنگی برحسب زمان تغییر کند؟

۶ م. جریان در سیملولهٔ مسألهٔ نمونهٔ ۳۱ـ۱، نه مانند آن مسأله، بلکه طبق معادلهٔ $i=۳٫۰t+۱٫۰t^2$، که در آن i برحسب آمپر و t برحسب ثانیه است، تغییر می‌کند. (الف) منحنی تغییرات نیروی محرک الکتریکی القا شده در پیچه را از $t=۰$ تا $t=۴٫۰$s رسم کنید. (ب) مقاومت پیچه ۰٫۱۵Ω است. جریان پیچه در زمان $t=۲٫۰$s چقدر است؟

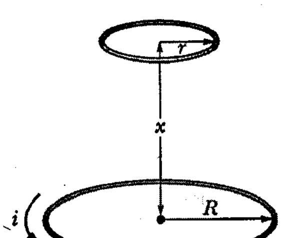
۷ م. در شکل ۳۱ـ۳۵، یک پیچهٔ ۱۲۰ دوری به شعاع ۱٫۸cm و مقاومت ۵٫۳Ω در خارج سیملوله‌ای مانند سیملولهٔ مسألهٔ نمونهٔ ۳۱ـ۱ قرار دارد. اگر جریان در سیملوله به گونه‌ای که در آن مسأله آمده است تغییر کند، در حین تغییر کردن جریان، چه جریانی در پیچه ظاهر می‌شود؟



شکل ۳۱ـ۳۵ مسألهٔ ۷.

۸ م. مادهٔ رسانای کشسانی به شکل حلقه‌ای دایره‌ای به شعاع ۱۲٫۰cm کشیده شده است. صفحهٔ این حلقه به طور عمود بر میدان مغناطیسی یکنواخت ۰٫۸۰۰T قرار داده می‌شود. وقتی حلقه رها می‌شود شعاع آن با آهنگ لحظه‌ای ۷۵٫۰cm/s شروع به کوچک شدن می‌کند. نیروی محرک الکتریکی القا شده در حلقه در آن لحظه چقدر است؟

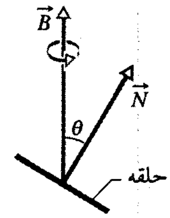
۹ م. شکل ۳۱ـ۳۶، دو حلقهٔ سیمی موازی هم محور را نشان می‌دهد. حلقهٔ کوچک‌تر (به شعاع r) در بالای حلقهٔ بزرگ‌تر (به شعاع R) و به فاصلهٔ x ($x\gg R$) از آن قرار دارد. در نتیجه، جریان i گذرنده از حلقهٔ بزرگ‌تر باعث تولید میدان مغناطیسی تقریباً ثابتی در حلقهٔ کوچک‌تر می‌شود. فرض کنید x با آهنگ ثابت $dx/dt=v$ افزایش می‌یابد. (الف) شار مغناطیسی گذرنده از سطح محصور شده به حلقهٔ کوچک‌تر را برحسب x به دست آورید.



شکل ۳۱ـ۳۶ مسألهٔ ۹.

(راهنمایی: معادلهٔ ۳۰ـ۲۹ را ببینید). مطلوب است تعیین (ب) نیروی محرک الکتریکی القاشده و (پ) جهت جریان القا شده، در حلقهٔ کوچک‌تر.

۱۰ م. در شکل ۳۱ـ۳۷، یک حلقهٔ سیمی دایره‌ای به قطر ۱۰cm (که به طور جانبی دیده می‌شود) طوری در میدان مغناطیسی $\vec{B}$ به بزرگی ۰ر۵۰T قرار داده شده است که خط عمود بر آن $\vec{N}$، با میدان زاویهٔ θ=۳۰° تشکیل می‌دهد. اکنون، حلقه طوری چرخانده می‌شود که $\vec{N}$ با آهنگ ثابت ۱۰۰ دور بر دقیقه در روی یک مخروط حول میدان مغناطیسی بچرخد. در طول این فرایند زاویهٔ θ ثابت می‌ماند. نیروی محرک الکتریکی القا شده در این حلقه چقدر است؟



شکل ۳۱ـ۳۷ مسألهٔ ۱۰.

۱۱ م. در شکل ۳۱ـ۳۳، فرض می‌کنیم شار گذرنده از حلقه در لحظهٔ t=۰، برابر با $\Phi_B(۰)$ باشد. آنگاه، فرض می‌کنیم میدان مغناطیسی $\vec{B}$ پیوسته، اما به طریقی نامشخص از نظر بزرگی و جهت، تغییر می‌کند، به گونه‌ای که شار مغناطیسی در زمان t با تابع $\Phi_B(t)$ نمایش داده می‌شود. (الف) نشان دهید که بار خالص $q(t)$، که در مدت زمان t از مقاومت R می‌گذرد، برابر است با:

$$q(t) = \frac{1}{R}[\Phi_B(۰)-\Phi_B(t)]$$

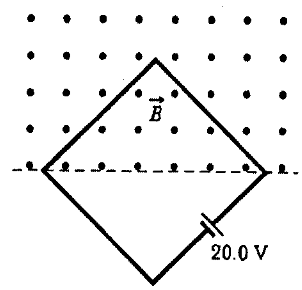
و این مقدار مستقل از چگونگی تغییر $\vec{B}$ است. (ب) اگر در حالت خاصی به‌ازای $\Phi_B(t)=\Phi_B(۰)$، داشته باشیم $q(t)$=۰، آیا جریان القا شده در سرتاسر بازهٔ صفر تا t الزاماً صفر است؟

۱۲ م. حلقهٔ دایره‌ای کوچکی به مساحت ۲ر۰۰cm² در صفحهٔ یک حلقهٔ دایره‌ای بزرگ به شعاع ۱ر۰۰m و هم مرکز با آن قرار گرفته است. حلقهٔ بزرگ در مدت ۱ر۰۰s، که از لحظهٔ t=۰ آغاز می‌شود، جریان به طور یکنواخت از ۲۰۰A تا ۲۰۰A- تغییر می‌کند (تغییر جهت می‌دهد). (الف) میدان مغناطیسی در مرکز حلقهٔ دایره‌ای کوچک، که در زمان‌های t=۰، t=۰ر۵۰۰s و t=۱ر۰۰s، از جریان حلقهٔ بزرگ ناشی می‌شود، چقدر است؟ (ب) در زمان t=۱ر۰۰s، نیروی محرک الکتریکی القا شده در حلقهٔ کوچک چقدر است؟ (چون حلقهٔ درونی کوچک است، فرض کنید میدان مغناطیسی $\vec{B}$ ناشی از حلقهٔ بیرونی در سرتاسر مساحت حلقهٔ کوچک‌تر یکنواخت است).

۱۳ م. ۱۰۰ دور سیم مسی روپوش‌دار روی یک هستهٔ استوانه‌ای چوبی با مساحت مقطع $۱ر۲۰\times۱۰^{-۳}m^۲$ پیچیده شده و دو سر سیم به یک مقاومت وصل شده است. مقاومت کل مدار ۱۳ر۰Ω است. اگر میدان مغناطیسی طولی و یکنواخت اعمال شدهٔ خارجی در هسته از ۱ر۶۰T در یک جهت تا ۱ر۶۰T در جهت دیگر تغییر کند، چه مقدار بار الکتریکی از مدار عبور می‌کند؟ (راهنمایی: مسأله ۱۱ را ببینید).

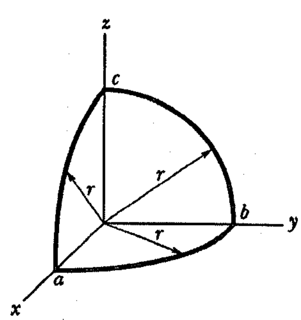
۱۴ م. در مکان خاصی بزرگی میدان مغناطیسی زمین B=۰ر۵۹۰gauss و زاویهٔ شیب آن نسبت به راستای افقی در سمت پایین ۷۰ر۰ درجه است. یک پیچهٔ دایره‌ای تخت به شعاع ۱۰ر۰cm دارای ۱۰۰۰ دور سیم و مقاومت کل ۸۵ر۰Ω است. این پیچه به یک دستگاه اندازه‌گیری جریان با مقاومت ۱۴۰Ω وصل می‌شود. پیچه حول یکی از قطرهای خود به اندازهٔ نیم دور می‌چرخد و دوباره به حالت افقی برمی‌گردد. در مدت چرخیدن پیچه چه مقدار بار الکتریکی از دستگاه اندازه‌گیری می‌گذرد؟ (راهنمایی: مسألهٔ ۱۱ را ببینید).

۱۵ م. یک حلقهٔ سیمی مربعی شکل به ضلع ۲ر۰۰m بر یک میدان مغناطیسی یکنواخت عمود است، به گونه‌ای که، مطابق شکل ۳۱ـ۳۸، نیمی از مساحت حلقه در میدان قرار دارد. این حلقه شامل یک باتری با نیروی محرک الکتریکی ۲۰ر۰V و مقاومت درونی قابل چشم‌پوشی است. بزرگی میدان مغناطیسی برحسب زمان طبق معادلهٔ B=۰ر۰۴۲۰−۰ر۸۷۰t تغییر می‌کند، که در آن B برحسب تسلا و t برحسب ثانیه است. (الف) نیروی محرک الکتریکی خالص در مدار چقدر است؟ (ب) جریان گذرنده از باتری در چه جهتی است؟



شکل ۳۱ـ۳۸ مسألهٔ ۱۵.

۱۶ م. سیمی مطابق شکل ۳۱ـ۳۹، به صورت سه بخش دایره‌ای به شعاع r=۱۰cm خم شده است. هر بخش شامل یک ربع دایره است، و ab در صفحهٔ xy، bc در صفحهٔ yz و ca در صفحهٔ zx قرار دارد. (الف) اگر میدان



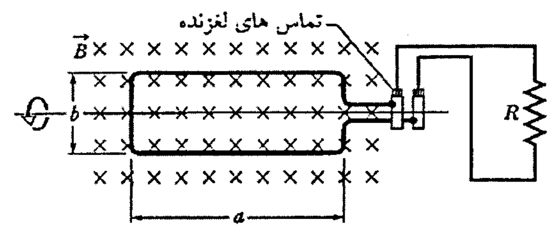
شکل ۳۱ـ۳۹ مسألهٔ ۱۶.

مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ در جهت مثبت محور x باشد، بزرگی نیروی محرک الکتریکی تولید شده در سیم در حین افزایش یافتن B با آهنگ $0.3\ \mathrm{mT/s}$ چقدر است؟ جهت جریان در بخش bc چگونه است؟

۱۷ م. یک پیچهٔ مستطیل شکل با N دور سیم، طول a و پهنای b، مطابق شکل ۳۱-۴۰، در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ با بسامد f می‌چرخد. سرهای این پیچه به استوانه‌هایی که با هم می‌چرخند وصل شده است و با لغزیدن جاروهای فلزی متکی بر روی آنها اتصال برقرار می‌شود. (الف) نشان دهید که نیروی محرک الکتریکی القا شده در پیچه از معادلهٔ زیر (به صورت تابعی از زمان t) به دست می‌آید:

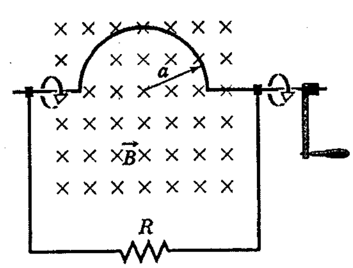
$$\mathscr{E} = 2\pi fNabB\sin(2\pi ft) = \mathscr{E}_0\sin(2\pi ft)$$

این آرایش اساس مولدهای جریان متناوب تجارتی را تشکیل می‌دهد. (ب) حلقه‌ای طراحی کنید که وقتی با بسامد 60.0 دور بر ثانیه در میدان مغناطیسی $0.500\ \mathrm{T}$ می‌چرخد، یک نیروی محرک الکتریکی $\mathscr{E}_0 = 150\ \mathrm{V}$ تولید کند.



شکل ۳۱-۴۰ مسألهٔ ۱۷.

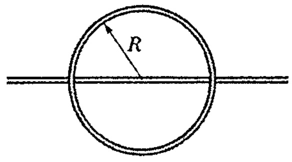
۱۸ م. یک سیم سفت که به شکل نیمدایره‌ای به شعاع a خم شده است، با بسامد f در میدان مغناطیسی یکنواختی، مطابق شکل ۳۱-۴۱، می‌چرخد. مطلوب است تعیین (الف) بسامد، و (ب) دامنهٔ نیروی محرک الکتریکی القا شدهٔ متغیر در حلقه.



شکل ۳۱-۴۱ مسألهٔ ۱۸.

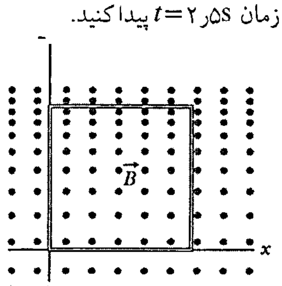
۱۹ م. یک مولد برق شامل ۱۰۰ دور سیم به شکل حلقه‌ای مستطیلی به ابعاد $50.0\ \mathrm{cm}$ در $30.0\ \mathrm{cm}$ است، که تمام آن در میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی $B = 3.50\ \mathrm{T}$ قرار دارد. اگر این حلقه با آهنگ ۱۰۰۰ دور بر دقیقه حول یک محور عمود بر $\vec{B}$ بچرخد، مقدار بیشینهٔ نیروی محرک الکتریکی تولید شده چقدر است؟

۲۰ م. در شکل ۳۱-۴۲، سیمی یک حلقهٔ دایره‌ای بسته به شعاع $R = 2.0\ \mathrm{m}$ و مقاومت $4.0\ \Omega$ تشکیل داده است. مرکز این دایره روی یک سیم دراز مستقیم قرار دارد؛ در لحظهٔ $t = 0$، جریان در سیم مستقیم $5.0\ \mathrm{A}$ به سمت راست است. پس از آن جریان طبق معادلهٔ $i = 5.0\ \mathrm{A} - (2.0\ \mathrm{A/s^2})t^2$ تغییر می‌کند. (سیم مستقیم روپوش‌دار است و در نتیجه با حلقهٔ سیمی هیچ تماس الکتریکی ندارد). بزرگی و جهت جریان القا شده در حلقه در زمان‌های $t > 0$ چیست؟



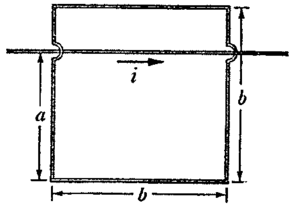
شکل ۳۱-۴۲ مسألهٔ ۲۰.

۲۱ م. در شکل ۳۱-۴۳، هر ضلع حلقهٔ سیمی مربعی شکل $2.0\ \mathrm{cm}$ است. میدان مغناطیسی در برون سوی صفحهٔ شکل است و بزرگی‌اش از معادلهٔ $B = 4.0t^2y$ به دست می‌آید، که در آن B برحسب تسلا، t برحسب ثانیه و y برحسب متر است. نیروی محرک الکتریکی و جهت آن را در پیرامون این مربع سیمی در زمان $t = 2.5\ \mathrm{s}$ پیدا کنید.



شکل ۳۱-۴۳ مسألهٔ ۲۱.

۲۲ م. در وضعیت نشان داده شده در شکل ۳۱-۴۴، داریم $a = 12.0\ \mathrm{cm}$ و $b = 16.0\ \mathrm{cm}$. جریان در سیم دراز مستقیم از معادلهٔ $i = 4.50t^2 - 10.0t$ به دست می‌آید، که در آن i برحسب آمپر و t برحسب ثانیه است. (الف) نیروی محرک الکتریکی در حلقهٔ مربعی را در زمان $t = 3.00\ \mathrm{s}$ پیدا کنید. (ب) جهت جریان القا شده در این حلقه چگونه است؟

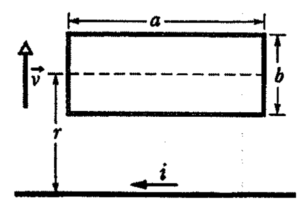


شکل ۳۱-۴۴ مسألهٔ ۲۲.

*۲۳ م. دو سیم مسی دراز و موازی، هر یک به قطر $2.5\ \mathrm{mm}$، حامل جریان‌های ناهمسوی $10\ \mathrm{A}$ هستند. (الف) اگر فاصلهٔ محورهای سیم‌ها از یکدیگر $20\ \mathrm{mm}$ باشد، شار مغناطیسی موجود در فضای میان محورهای

سیم‌ها را برای هر متر سیم حساب کنید. (ب) چه کسری از این شار مغناطیسی در درون سیم‌ها قرار دارد؟ (پ) محاسبهٔ قسمت (الف) را برای جریان‌های همسو تکرار کنید.

۲۴ م. یک حلقهٔ سیمی مستطیل شکل به طول a، پهنای b، و مقاومت R در مجاورت یک سیم بسیار دراز حامل جریان i، مطابق شکل ۳۱-۴۵، قرار گرفته است. فاصلهٔ میان سیم دراز تا مرکز حلقه r است. مطلوب است تعیین (الف) بزرگی شار مغناطیسی گذرنده از حلقه، و (ب) جریان در حلقه هنگام دور شدن با تندی v از سیم دراز.



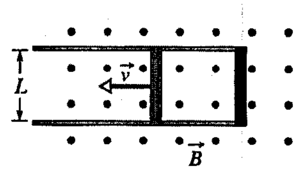
شکل ۳۱-۴۵ مسألهٔ ۲۴.

بخش ۳۱-۵ القایش و انتقال انرژی

۲۵ ت. یک سیم مسی به طول ۵۰٫۰ cm (به قطر ۱٫۰۰ mm) را به شکل یک حلقهٔ دایره‌ای در می‌آوریم و آن را به طور عمود بر یک میدان مغناطیسی که با آهنگ ثابت ۱۰٫۰ mT/s افزایش می‌یابد قرار می‌دهیم. در این حلقه انرژی گرمایی با چه آهنگی تولید می‌شود؟

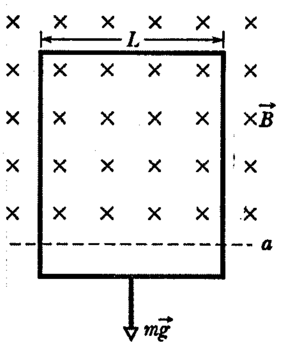
۲۶ ت. یک آنتن حلقه‌ای به مساحت A و مقاومت R، بر میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ عمود است. این میدان در بازهٔ زمانی Δt به طور خطی تا صفر کاهش می‌یابد. رابطهٔ مربوط به انرژی گرمایی کل تلف شده در این حلقه را پیدا کنید.

۲۷ ت. یک میلهٔ فلزی با سرعت ثابت $\vec{v}$ در طول دو ریل فلزی موازی به حرکت درمی‌آید. انتهای ریل‌ها، مطابق شکل ۳۱-۴۶، به وسیلهٔ یک نوار فلزی به هم وصل شده است. در این شکل یک میدان مغناطیسی با بزرگی $B=0.350\,\text{T}$ در برون سوی صفحهٔ شکل وجود دارد. (الف) اگر فاصلهٔ ریل‌ها از هم ۲۵٫۰ cm و تندی میله ۵۵٫۰ cm/s باشد، نیروی محرک الکتریکی تولید شده چقدر است؟ (ب) اگر مقاومت میله ۱۸٫۰ Ω و مقاومت ریل‌ها و نوار فلزی ناچیز باشد، جریان در میله چقدر است؟ (پ) انرژی با چه آهنگی به انرژی گرمایی تبدیل می‌شود؟



شکل ۳۱-۴۶ تمرین ۲۷ و مسألهٔ ۲۹.

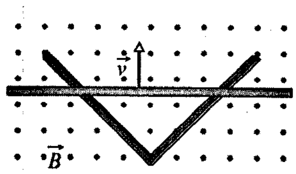
۲۸ م. در شکل ۳۱-۴۷، یک حلقهٔ رسانای مستطیل شکل، به پهنای L، مقاومت R، و جرم m، در میدان مغناطیسی افقی و یکنواخت $\vec{B}$، که در درون سوی صفحهٔ شکل است و فقط بالای خط aa را در بر می‌گیرد، آویخته شده است. اکنون، این حلقه رها می‌شود و در حین سقوط کردن شتاب می‌گیرد تا به تندی حد v_t می‌رسد. با چشم‌پوشی از نیروی پس‌کشی هوا تندی حد حلقه را پیدا کنید.



شکل ۳۱-۴۷ مسألهٔ ۲۸.

۲۹ م. میلهٔ رسانای نشان داده شده در شکل ۳۱-۴۶، دارای طول L است و با سرعت ثابت $\vec{v}$ در راستای ریل‌های رسانای افقی و بدون اصطکاک کشیده می‌شود. انتهای ریل‌ها به وسیلهٔ یک نوار فلزی به هم وصل شده است. میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ در برون سوی صفحهٔ شکل، ناحیهٔ حرکت میله را فرا گرفته است. فرض کنید $L=10\,\text{cm}$، $v=5.0\,\text{m/s}$، و $B=1.2\,\text{T}$. (الف) بزرگی و جهت نیروی محرک الکتریکی القا شده در میله چیست؟ (ب) جریان در حلقهٔ رسانا چیست؟ فرض کنید مقاومت میله ۰٫۴۰ Ω و مقاومت ریل‌ها و نوار فلزی ناچیز است. (پ) با چه آهنگی انرژی گرمایی در میله تولید می‌شود؟ (ت) چه نیرویی باید به وسیلهٔ یک عامل خارجی وارد شود تا حرکت میله ادامه پیدا کند؟ (ث) این عامل خارجی با چه آهنگی روی میله کار انجام می‌دهد؟ این پاسخ را با پاسخ مربوط به قسمت (پ) مقایسه کنید.

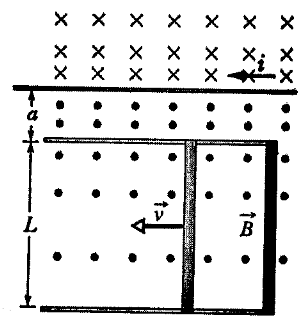
۳۰ م. دو ریل رسانای مستقیم از یک طرف به هم وصل شده و یک زاویهٔ قائمه تشکیل داده‌اند. یک میلهٔ رسانا، که با ریل‌ها در تماس است، در لحظهٔ $t=0$ با سرعت ثابت ۵٫۲۰ m/s، مطابق شکل ۳۱-۴۸، از رأس زاویه شروع به حرکت می‌کند. در این شکل یک میدان مغناطیسی ۰٫۳۵۰ T در برون سوی صفحهٔ شکل وجود دارد. مطلوب است محاسبهٔ



شکل ۳۱-۴۸ مسألهٔ ۳۰.

(الف) شار مغناطیسی گذرنده از مثلث تشکیل شده توسط ریل‌ها و میله، در زمان $t=$ ۳٫۰۰ s، و (ب) نیروی محرک الکتریکی تولید شده در پیرامون مثلث در همان زمان. (پ) اگر معادلهٔ نیروی محرک الکتریکی به صورت $\mathscr{E}=at^n$ نوشته شود و در آن a و n مقادیر ثابتی باشند، مقدار n چقدر است؟

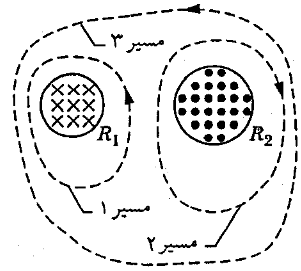
۳۱ م. شکل ۳۱-۴۹، میله‌ای به طول L را نشان می‌دهد که با تندی ثابت v در طول ریل‌های رسانای افقی دراز حرکت می‌کند. میدان مغناطیسی‌ای که میله در آن حرکت می‌کند یکنواخت نیست و به وسیلهٔ جریان i در یک سیم دراز و موازی با ریل‌ها تولید می‌شود. فرض کنید $v=$ ۵٫۰۰ m/s، $a=$ ۱۰٫۰ mm، $L=$ ۱۰٫۰ cm و $i=$ ۱۰۰ A. (الف) نیروی محرک الکتریکی القا شده در میله را حساب کنید. (ب) جریان در حلقهٔ رسانا چقدر است؟ فرض کنید مقاومت میله ۰٫۴۰۰Ω و مقاومت ریل‌ها و نوار متصل کنندهٔ انتهای ریل‌ها در سمت راست ناچیز است. (پ) با چه آهنگی انرژی گرمایی در میله تولید می‌شود؟ (ت) چه نیرویی باید به وسیلهٔ عامل خارجی وارد شود تا حرکت میله ادامه پیدا کند؟ (ث) عامل خارجی با چه آهنگی روی میله کار انجام می‌دهد؟ پاسخ این قسمت را با پاسخ قسمت (پ) مقایسه کنید.



شکل ۳۱-۴۹ مسألهٔ ۳۱.

بخش ۳۱-۶ میدان‌های الکتریکی القایی

۳۲ ت. شکل ۳۱-۵۰، دو ناحیهٔ دایره‌ای R_1 و R_2 به شعاع‌های $r_1=$ ۲۰٫۰ cm و $r_2=$ ۳۰٫۰ cm را نشان می‌دهد. در ناحیهٔ R_1 میدان مغناطیسی یکنواخت $B_1=$ ۵۰٫۰ mT در درون سوی صفحهٔ شکل و در ناحیهٔ R_2 میدان مغناطیسی یکنواخت $B_2=$ ۷۵٫۰ mT در برون سوی صفحهٔ شکل وجود دارد (از فریز شدن این میدان‌ها چشم‌پوشی می‌کنیم). هر دو میدان با آهنگ ۸٫۵۰ mT/s کاهش می‌یابند. انتگرال $\oint \vec{E}\cdot d\vec{s}$ را برای هر یک از سه مسیر نشان داده شده با خط‌چین حساب کنید.

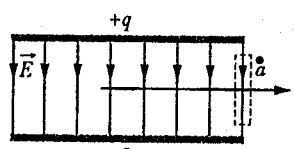


شکل ۳۱-۵۰ تمرین ۳۲.

۳۳ ت. قطر سیملولهٔ درازی ۱۲٫۰ cm است. وقتی از این سیملوله جریان i عبور می‌کند، درون آن میدان مغناطیسی یکنواخت $B=$ ۳۰٫۰ mT به‌وجود می‌آید. با کاهش دادن i، میدان مغناطیسی با آهنگ ۶٫۵۰ mT/s کاهش پیدا می‌کند. مطلوب است محاسبهٔ بزرگی میدان الکتریکی القایی در فاصلهٔ (الف) ۲٫۲۰ cm، و (ب) ۸٫۲۰ cm، از محور سیملوله.

۳۴ م. در اوایل سال ۱۹۸۱ در **آزمایشگاه ملی فرانسیس بیتر**[1] در M.I.T.[2] (ایالات متحد امریکا) یک آهن‌ربای استوانه‌ای به قطر ۳٫۳ cm آغاز به کار کرد. این آهن‌ربا یک میدان مغناطیسی ۳۰ T تولید می‌کند، که قوی‌ترین میدان مغناطیسی دارای حالت پایا در جهان است. این میدان می‌تواند به‌طور سینوسی بین دو حد ۲۹٫۶ T و ۳۰٫۰ T با بسامد ۱۵Hz تغییر کند. وقتی این کار صورت می‌گیرد، بیشینهٔ مقدار میدان الکتریکی القایی در فاصلهٔ شعاعی ۱٫۶ cm از محور چقدر است؟ (راهنمایی: به مسألهٔ نمونه ۳۱-۴ رجوع کنید).

۳۵ م. ثابت کنید که در حین طی کردن یک خازن صفحه - موازی و باردار به‌طور عمود بر میدان الکتریکی $\vec{E}$ و در جهت پیکان افقی در شکل ۳۱-۵۱، میدان نمی‌تواند در یک نقطه ناگهان به صفر برسد (نقطهٔ a را ببینید). در خازن‌های واقعی فریز شدن خط‌های میدان همیشه صورت می‌گیرد و در این صورت $\vec{E}$ پیوسته و به تدریج به صفر می‌رسد. (به مسألهٔ ۳۳ در فصل ۳۰ رجوع کنید). (راهنمایی: قانون فارادی را برای مسیر مستطیل شکل خط‌چین به کار ببرید).



شکل ۳۱-۵۱ مسألهٔ ۳۵.

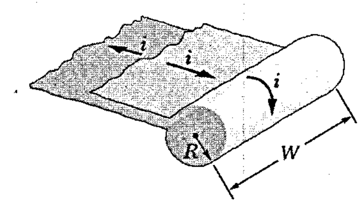
بخش ۳۱-۷ القاگرها و القاییدگی

۳۶ ت. یک پیچهٔ دایره‌ای دارای شعاع ۱۰٫۰ cm و شامل ۳۰٫۰ دور سیم تنگ هم پیچیده است. یک میدان مغناطیسی خارجی ۲٫۶۰ mT بر این پیچه عمود است. (الف) اگر جریانی از پیچه نگذرد ارتباط شاری دورهای آن چقدر است؟ (ب) هنگامی که یک جریان ۳٫۸۰ آمپری در جهت خاصی از پیچه می‌گذرد شار خالص گذرنده از پیچه صفر می‌شود. القاییدگی پیچه چقدر است؟

1. Francis Bitter National Magnet Laboratory
2. Massachusetts Institute of Technology

۳۷ ت. القاییدگی یک پیچه با ۴۰۰ دور سیم تنگ هم پیچیده شده ۸٫۰mH است. اگر جریان پیچه ۵٫۰mA باشد، شار مغناطیسی گذرنده از آن را حساب کنید.

۳۸ م. یک نوار پهن مسی به پهنای W، مطابق شکل ۳۱-۵۲، به صورت لوله‌ای به شعاع R و با دو دنبالهٔ تخت خم شده است. از این نوار جریان i که به طور یکنواخت در پهنای آن توزیع شده است، می‌گذرد. به این ترتیب، یک «سیملولهٔ تک دوری» تشکیل می‌شود. (الف) رابطهٔ مربوط به بزرگی میدان مغناطیسی $\vec{B}$ را در بخش لوله‌ای (دور از لبه‌ها) پیدا کنید. (راهنمایی: فرض کنید میدان در خارج این سیملولهٔ تک دوری ناچیز باشد). (ب) القاییدگی این سیملولهٔ تک دوری را با چشم‌پوشی از دو دنبالهٔ تخت، معین کنید.



شکل ۳۱-۵۲ مسألهٔ ۳۸.

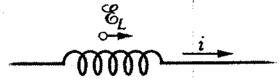
۳۹ م. دو سیم دراز و موازی به شعاع a، که محورهای آنها به فاصلهٔ d از هم قرار دارند، حامل جریان‌های مساوی در جهت‌های مخالف‌اند. با چشم‌پوشی از شار مغناطیسی درون خود سیم‌ها، نشان دهید که القاییدگی طول l از این زوج سیم از معادلهٔ زیر به دست می‌آید

$$L = \frac{\mu_0 l}{\pi}\ln\frac{d-a}{a}$$

(راهنمایی: شار گذرنده از مربع مستطیلی را که دو ضلع مقابل آن سیم‌ها هستند حساب کنید).

بخش ۳۱-۸ خودالقایش

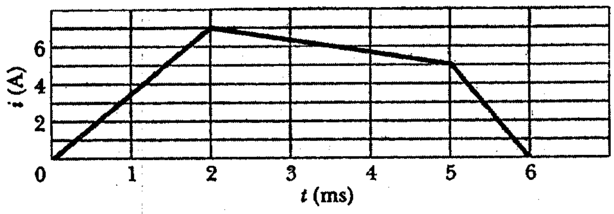
۴۰ ت. در لحظهٔ معینی جریان و نیروی محرک الکتریکی خوالقاییده در یک القاگر در جهت نشان داده شده در شکل ۳۱-۵۳ است. (الف) آیا جریان در حال افزایش است یا در حال کاهش؟ (ب) نیروی محرک الکتریکی القایی ۱۷V و آهنگ تغییر جریان ۲۵kA/s است. مقدار القاییدگی را پیدا کنید.



شکل ۳۱-۵۳ تمرین ۴۰.

۴۱ ت. القاگری با القاییدگی ۱۲H حامل جریان پایای ۲٫۰A است. چگونه می‌توان در القاگر یک نیروی محرک خودالقاییدهٔ ۶۰ ولتی ایجاد کرد؟

۴۲ م. شکل ۳۱-۵۴، نمودار تغییرات جریان i گذرنده از القاگری با القاییدگی ۴٫۶H را برحسب زمان t نشان می‌دهد. مقاومت القاگر ۱۲Ω است.



شکل ۳۱-۵۴ مسألهٔ ۴۲.

مطلوب است تعیین نیروی محرک الکتریکی القایی $\mathscr{E}$، در بازه‌های زمانی (الف) $t=0$ تا $t=2$ms، (ب) $t=2$ms تا $t=5$ms، (پ) $t=5$ms تا $t=6$ms. (از رفتار پیچه در انتهای این بازه‌های زمانی چشم‌پوشی کنید).

۴۳ م. القاگرهای سری. دو القاگر L_1 و L_2، که به طور سری به هم بسته شده‌اند، در فاصلهٔ زیادی از هم قرار دارند. (الف) نشان دهید که القاییدگی معادل آنها از معادلهٔ زیر به دست می‌آید

$$L_{eq} = L_1 + L_2$$

(راهنمایی: چگونگی محاسبهٔ مقاومت‌های سری و خازن‌های سری را مرور کنید. کدام‌یک در اینجا شبیه القاگر هستند؟). (ب) چرا باید فاصلهٔ دو القاگر زیاد باشد تا رابطهٔ بالا برقرار شود؟ (پ) رابطهٔ کلی مربوط به قسمت (الف) برای N القاگر سری چگونه است؟

۴۴ م. القاگرهای موازی. دو القاگر L_1 و L_2، که به طور موازی به هم بسته شده‌اند، در فاصلهٔ زیادی از هم قرار دارند. (الف) نشان دهید که القاییدگی معادل آنها از معادلهٔ زیر به دست می‌آید

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$

(راهنمایی: چگونگی محاسبهٔ مقاومت‌های موازی و خازن‌های موازی را مرور کنید. کدام‌یک در اینجا شبیه القاگر هستند؟). (ب) چرا باید فاصلهٔ دو القاگر زیاد باشد تا رابطهٔ بالا برقرار شود؟ (پ) رابطهٔ کلی مربوط به قسمت (الف) برای N القاگر موازی چگونه است؟

بخش ۳۱-۹ مدارهای RL

۴۵ ت. در یک مدار RL چند τ_L باید منتظر بمانیم تا جریان به ۰٫۱۰۰ درصد مانده به مقدار تعادلی‌اش، برسد؟

۴۶ ت. در یک مدار RL جریان در مدت ۵٫۰۰s به یک سوم مقدار حالت پایای خود می‌رسد. ثابت زمانی القایی را حساب کنید.

۴۷ ت. در یک مدار RL پس از حذف کردن باتری از مدار، جریان در ثانیهٔ اول از ۱٫۰A به ۱۰mA فرو می‌افتد. به ازای $L=10$H، مقاومت مدار، R، را پیدا کنید.

۴۸ ت. مدار RL شکل ۳۱-۱۷ را در نظر بگیرید. (الف) درست در لحظه‌ای که کلید به نقطهٔ a وصل می‌شود، نیروی محرک الکتریکی خودالقاییده، $\mathscr{E}_L$، برحسب نیروی محرک الکتریکی باتری، $\mathscr{E}$، چقدر است؟ (ب) مقدار $\mathscr{E}_L$ به ازای $t=2.0\tau_L$ چقدر است؟ (پ) $\mathscr{E}_L$، پس از گذشت چند

ثابت زمانی τ_L، درست برابر با نصف $\mathscr{E}$، نیروی محرک الکتریکی باتری خواهد شد؟

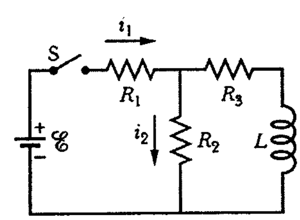
۴۹ ت. سیملوله‌ای که دارای القاییدگی ۶ر۳۰μH است، به طور سری به یک مقاومت ۱ر۲۰kΩ بسته شده است. (الف) اگر به دو سر این ترکیب یک باتری ۱۴ر۰ ولتی وصل شود، چه مدت طول می‌کشد تا جریان در مقاومت به ۸۰ر۰ درصد مقدار پایانی خود برسد؟ (ب) در زمان $t=$۱ر۰τ_L، جریان در مقاومت چقدر است؟

۵۰ م. فرض کنید نیروی محرک الکتریکی باتری در مدار شکل ۳۱ـ۱۸، نسبت به زمان t، طوری تغییر می‌کند که جریان مدار از معادلهٔ $i(t)=$۳ر۰+۵ر۰t به دست می‌آید. در این معادله i برحسب آمپر و t برحسب ثانیه است. به ازای $R=$۴ر۰Ω و $L=$۶ر۰H، رابطهٔ مربوط به نیروی محرک الکتریکی باتری را به صورت تابعی از زمان به دست آورید. (راهنمایی: از قاعدهٔ حلقه استفاده کنید).

۵۱ م. در لحظهٔ $t=$۰، ناگهان یک اختلاف پتانسیل ۴۵ر۰ ولتی به دو سر پیچه‌ای با مشخصات $L=$۵۰ر۰mH و $R=$۱۸۰Ω اعمال می‌شود. در زمان $t=$۱ر۲۰ms جریان مدار با چه آهنگی افزایش می‌یابد؟

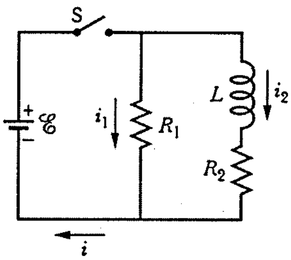
۵۲ م. یک هستهٔ چنبره‌ای چوبی با مقطع مربعی دارای شعاع درونی ۱۰cm و شعاع بیرونی ۱۲cm است. روی این هسته یک لایهٔ سیم (با قطر ۱ر۰mm و مقاومت یکای طول ۰ر۰۲۰Ω/m) پیچیده شده است. (الف) القاییدگی و (ب) ثابت زمانی القایی چنبره چقدر است؟ از ضخامت روپوش سیم چشم‌پوشی کنید.

۵۳ م. در مدار شکل ۳۱ـ۵۵، داریم $\mathscr{E}=$ ۱۰۰V، $R_1=$ ۱۰ر۰Ω، $R_2=$۲۰ر۰Ω، $R_3=$۳۰ر۰Ω، و $L=$۲ر۰۰H. مطلوب است تعیین مقادیر i_1 و i_2، (الف) بی‌درنگ پس از بستن کلید S، (ب) مدتی طولانی پس از بستن کلید S، (پ) بی‌درنگ پس از باز کردن کلید S و (ت) مدتی طولانی پس از باز کردن کلید S.



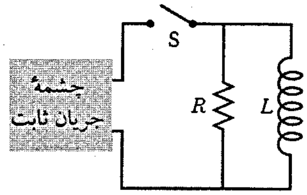
شکل ۳۱ـ۵۵ مسألهٔ ۵۳.

۵۴ م. در مدار شکل ۳۱ـ۵۶، داریم $\mathscr{E}=$۱۰V، $R_1=$۵ر۰Ω، $R_2=$۱۰Ω، و $L=$۵ر۰H. در دو حالت جداگانهٔ (۱) درست در لحظهٔ بسته شدن کلید S و (۲) بسته بودن کلید S به مدتی طولانی، مطلوب است محاسبهٔ (الف) جریان i_1 در R_1، (ب) جریان i_2 در R_2، (پ) جریان i که از کلید می‌گذرد، (ت) اختلاف پتانسیل دو سر R_2، (ث) اختلاف پتانسیل دو سر L، و (ج) آهنگ تغییر di_2/dt.



شکل ۳۱ـ۵۶ مسألهٔ ۵۴.

***۵۵ م.** در مدار شکل ۳۱ـ۵۷، کلید S در لحظهٔ $t=$۰ بسته می‌شود. از آن به بعد، چشمهٔ جریان ثابت با تغییر کردن نیروی محرک الکتریکی‌اش، جریان i را در پایانهٔ بالایی خود ثابت نگه می‌دارد. (الف) رابطهٔ مربوط به جریان گذرنده از القاگر را به صورت تابعی از زمان به دست آورید. (ب) نشان دهید که در زمان $t=(L/R)\ln$۲، جریان‌های گذرنده از مقاومت و القاگر باهم برابرند.



شکل ۳۱ـ۵۷ مسألهٔ ۵۵.

بخش ۳۱ـ۱۰ انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی

۵۶ ت. مدار شکل ۳۱ـ۱۸ را در نظر بگیرید. چند ثابت زمانی القایی باید بگذرد تا پس از وصل کردن باتری انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی القاگر نصف مقدار انرژی در حالت پایا بشود؟

۵۷ ت. فرض کنید ثابت زمانی القایی مدار شکل ۳۱ـ۱۸، ۳۷ر۰ms و در لحظهٔ $t=$۰، جریان مدار صفر است. در چه زمانی آهنگ اتلاف انرژی در مقاومت، با آهنگ ذخیره شدن انرژی در القاگر برابر می‌شود؟

۵۸ ت. پیچه‌ای با القاییدگی ۲ر۰H و مقاومت ۱۰Ω ناگهان به یک باتری بدون مقاومت درونی و $\mathscr{E}=$۱۰۰V وصل می‌شود. ۰ر۱۰s پس از این اتصال، آهنگ (الف) ذخیره شدن انرژی در میدان مغناطیسی، (ب) تولید انرژی گرمایی در مقاومت، و (پ) انرژی تحویل داده شده توسط باتری، چقدر است؟

۵۹ م. پیچه‌ای به طور سری به یک مقاومت ۱۰ر۰kΩ وصل شده است. هرگاه به دو سر این ترکیب یک باتری ۵۰ر۰ ولتی وصل شود، جریان مدار پس از ۵ر۰۰ms به ۲ر۰۰mA می‌رسد. (الف) القاییدگی پیچه را پیدا کنید. (ب) در این مدت چه مقدار انرژی در پیچه ذخیره می‌شود؟

۶۰ م. در مدار شکل ۳۱ـ۱۸، فرض کنید $\mathscr{E}=$۱۰ر۰V، $R=$۶ر۷۰Ω و $L=$۵ر۵۰H. در لحظهٔ $t=$۰ باتری را وصل می‌کنیم. (الف) در ۲ر۰۰ ثانیهٔ

اول چه مقدار انرژی از باتری دریافت می‌شود؟ (ب) چه مقدار از این انرژی در میدان مغناطیسی القاگر ذخیره می‌شود؟ (پ) چه مقدار از انرژی در مقاومت تلف می‌شود؟

۶۱ م. ثابت کنید پس از آنکه کلید S در شکل ۳۱-۱۷ از نقطهٔ a به نقطهٔ b وصل می‌شود تمام انرژی ذخیره شده در القاگر در نهایت به صورت انرژی گرمایی در مقاومت ظاهر می‌شود.

بخش ۳۱-۱۱ چگالی انرژی میدان مغناطیسی

۶۲ ت. یک القاگر چنبره‌ای با القاییدگی ۹۰٫۰ mH حجم ۰٫۰۲۰۰ $\mathrm{m^3}$ را محصور کرده است. اگر چگالی انرژی متوسط در این چنبره ۷۰٫۰ $\mathrm{J/m^3}$ باشد، جریان گذرنده از القاگر چقدر است؟

۶۳ ت. سیملوله‌ای به طول ۸۵٫۰ cm دارای مساحت مقطع ۱۷٫۰ $\mathrm{cm^2}$ است. این سیملوله ۹۵۰ دور سیم دارد و حامل جریان ۶٫۶۰ A است. (الف) چگالی انرژی میدان مغناطیسی درون سیملوله را حساب کنید. (ب) انرژی کل ذخیره شده در میدان مغناطیسی درون سیملوله را پیدا کنید. (از اثرهای انتهایی سیملوله چشم‌پوشی کنید).

۶۴ ت. میدان مغناطیسی در فضای میان ستاره‌های کهکشان، در حدود 10^{-10} T است. در این میدان چه مقدار انرژی در مکعبی به ضلع ۱۰ سال نوری ذخیره می‌شود؟ (به عنوان مقایسهٔ مقیاس، توجه کنید که فاصلهٔ نزدیک‌ترین ستاره ۴٫۳ سال نوری و شعاع کهکشان، در حدود 8×10^4 سال نوری است).

۶۵ ت. بزرگی یک میدان الکتریکی یکنواخت چقدر باید باشد تا چگالی انرژی آن با چگالی انرژی مربوط به میدان مغناطیسی ۰٫۵۰ T برابر شود؟

۶۶ ت. یک حلقهٔ دایره‌ای سیمی به شعاع ۵۰ mm حامل جریان ۱۰۰ A است. مطلوب است تعیین (الف) شدت میدان مغناطیسی، و (ب) چگالی انرژی، در مرکز حلقه.

۶۷ م. یک سیم مسی با توزیع یکنواخت جریان در مقطعش حامل جریان ۱۰ A است. مطلوب است محاسبهٔ (الف) چگالی انرژی میدان مغناطیسی، و (ب) چگالی انرژی میدان الکتریکی در سطح سیم. قطر سیم ۲٫۵ mm و مقاومت یکای طول آن ۳٫۳ Ω/km است.

بخش ۳۱-۱۲ القایش متقابل

۶۸ ت. مشخصات پیچهٔ ۱، $L_1=$ ۲۵ mH، $N_1=$ ۱۰۰ دور و مشخصات پیچهٔ ۲، $L_2=$ ۴۰ mH، $N_2=$ ۲۰۰ دور است. این پیچه‌ها نسبت به هم در موقعیت ثابتی قرار گرفته و القاییدگی متقابل آنها $M=$ ۳٫۰ mH است. در پیچهٔ ۱ جریان ۶٫۰ mA با آهنگ ۴٫۰ A/s تغییر می‌کند. (الف) شار مغناطیسی Φ_{12} مرتبط با پیچهٔ ۱ و نیروی محرک الکتریکی خودالقاییده در آن چقدر است؟ (ب) شار مغناطیسی Φ_{21} مرتبط با پیچهٔ ۲ و نیروی محرک القایی متقابل ظاهر شده در آن چقدر است؟

۶۹ ت. دو پیچه در جای خود ثابت شده‌اند. وقتی از پیچهٔ ۱ جریانی نمی‌گذرد و جریان پیچهٔ ۲ با آهنگ ۱۵٫۰ A/s افزایش می‌یابد، نیروی محرک الکتریکی در پیچهٔ ۱، برابر با ۲۵٫۰ mV است. (الف) القاییدگی متقابل دو پیچه چقدر است؟ (ب) وقتی از پیچهٔ ۲ جریانی نمی‌گذرد و جریان در پیچهٔ ۱ برابر با ۳٫۶۰ A است، ارتباط شاری در پیچهٔ ۲ چقدر است؟

۷۰ ت. دو سیملوله بخشی از یک پیچهٔ جرقه زن اتومبیل را تشکیل می‌دهند. وقتی در مدت ۲٫۵ ms در یک سیملوله جریان از ۶٫۰ A به صفر کاهش می‌یابد، در سیملولهٔ دیگر نیروی محرک الکتریکی ۳۰ kV القا می‌شود. القاییدگی متقابل این سیملوله‌ها M، چقدر است؟

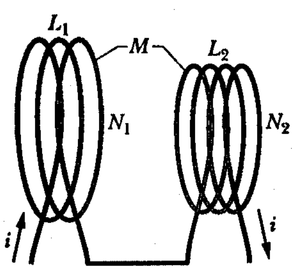
۷۱ م. دو پیچه مطابق شکل ۳۱-۵۸، به‌یکدیگر وصل شده‌اند. القاییدگی‌های پیچه‌ها L_1 و L_2 و القاییدگی متقابل آنها M است. (الف) نشان دهید که این ترکیب را می‌توان با پیچهٔ معادلی با القاییدگی

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + 2M$$

جانشین کرد. (ب) پیچه‌های شکل ۳۱-۵۸ را چگونه باید به هم ببندیم تا القاییدگی معادل آنها برابر با:

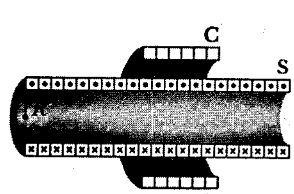
$$L_{eq} = L_1 + L_2 - 2M$$

باشد؟ (این مسأله تعمیمی از مسأله ۴۳ است، که در آن پیچه‌ها باید از هم دور باشند).



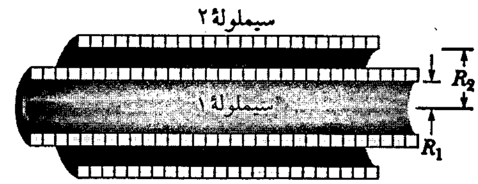
شکل ۳۱-۵۸ مسألهٔ ۷۱.

۷۲ م. پیچهٔ C با N دور سیم، سیملولهٔ دراز S به شعاع R و n دور سیم در یکای طول را، مطابق شکل ۳۱-۵۹، احاطه کرده است. نشان دهید که القاییدگی متقابل ترکیب پیچه - سیملوله از معادلهٔ $M=\mu_0\pi R^2 nN$ به‌دست می‌آید. توضیح دهید چرا M به شکل، اندازه، یا تنگ هم پیچیده نشدن سیم‌های پیچه بستگی ندارد.



شکل ۳۱-۵۹ مسألهٔ ۷۲.

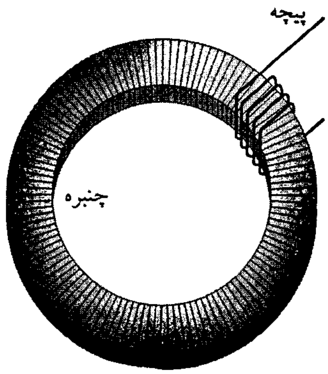
۷۳ م. شکل ۳۱-۶۰، مقطع دو سیملولهٔ هم‌محور را نشان می‌دهد. نشان دهید که القاییدگی متقابل M برای طول l این ترکیب سیملوله - سیملوله برابر با $M=\pi R_1^2 l\mu_0 n_1 n_2$ است، که در آن n_1 و n_2 به ترتیب تعداد دورهای سیم در یکای طول و R_1 شعاع سیملولهٔ درونی است. چرا M به R_1 بستگی دارد، اما به R_2 بستگی ندارد؟



شکل ۳۱-۶۰ مسألهٔ ۷۳.

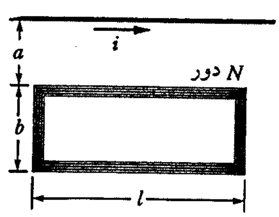
۷۴ م. شکل ۳۱-۶۱، پیچه‌ای با N_2 دور سیم را نشان می‌دهد که بر روی بخشی از چنبرهٔ با N_1 دور سیم پیچیده شده است. چنبره دارای شعاع درونی a، شعاع بیرونی b و ارتفاع h است. نشان دهید که M، القاییدگی متقابل ترکیب چنبره - پیچه برابر است با:

$$M=\frac{\mu_0 N_1 N_2 h}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$



شکل ۳۱-۶۱ مسألهٔ ۷۴.

۷۵ م. حلقه‌ای مستطیلی با N دور سیم تنگ هم پیچیده شده در نزدیکی یک سیم دراز مستقیم، مطابق شکل ۳۱-۶۲، قرار گرفته است. (الف) القاییدگی متقابل این ترکیب حلقه - سیم M، چقدر است؟ (ب) مقدار M را به ازای $N=100$، $a=1.0\,\text{cm}$، $b=8.0\,\text{cm}$، و $l=30\,\text{cm}$، به دست آورید.



شکل ۳۱-۶۲ مسألهٔ ۷۵.

۳۲

خاصیت مغناطیسی مواد: معادله‌های ماکسول



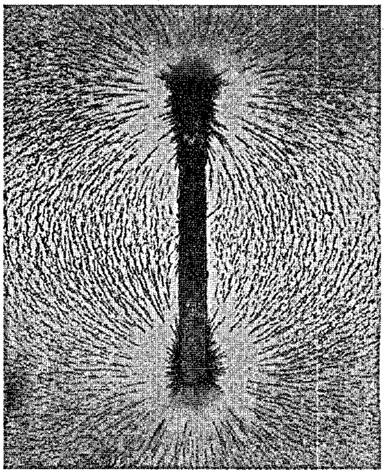
این تصویر، با دید از بالا، قورباغه‌ای را نشان می‌دهد که در میدان مغناطیسی حاصل از جریان گذرنده از یک سیملولهٔ قائم، واقع در زیر قورباغه، معلق مانده است. نیروی مغناطیسی رو به بالای وارد بر قورباغه با نیروی گرانشی رو به پایین وارد بر آن متوازن شده است. (قورباغه، مانند وقتی که در آب غوطه‌ور است، احساس ناراحتی نمی‌کند و غوطه‌ور ماندن در آب را خیلی دوست می‌دارد). اما قورباغه که خاصیت مغناطیسی ندارد (مثلاً، مانند آهن‌ربا به دَر یخچال نمی‌چسبد).

پس، نیروی مغناطیسی چگونه به قورباغه اثر می‌کند؟

در این فصل به این پرسش پاسخ داده خواهد شد.

۳۲ـ۱ آهن‌ربا

نخستین آهن‌رباهای شناخته شده، سنگ‌های آهن‌ربا بودند، سنگ‌هایی که به طور طبیعی **مغناطیده** (آهن‌ربا شده)اند. وقتی یونانی‌ها و چینی‌های باستان این سنگ‌های کمیاب را کشف کردند از توانایی آنها در جذب کردن فلزات در فاصله‌های نزدیک، به گونهٔ یک کار سحرآمیز، لذت می‌بردند. تنها مدتی طولانی پس از آن بود که آنها توانستند کاربرد سنگ‌های آهن‌ربا (و قطعه‌های آهنی مغناطیده شده به طور مصنوعی) را در قطب‌نما برای تعیین جهت جغرافیایی بیاموزند.



شکل ۳۲ـ۱ آهن‌ربای میله‌ای یک دوقطبی مغناطیسی است. براده‌های آهن نقش خط‌های میدان مغناطیسی را نشان می‌دهند. (زمینهٔ این تصویر با نور رنگی روشن شده است.)

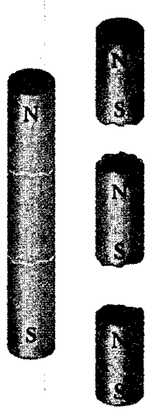
امروزه آهن‌رباها و مواد مغناطیسی در همه جا حضوری فراگیر دارند و آنها را در نوارهای صوتی و تصویری، دستگاه‌های خودکار اسکناس شمار و کارت‌های اعتباری، گوشی‌های صوتی، و حتی در جوهر چاپ اسکناس‌ها، می‌توان یافت. در واقع، برخی مواد غذایی و غلات «سرشار از آهن» شامل قطعه‌های ریز مواد مغناطیسی هستند (شما با استفاده از یک آهن‌ربا می‌توانید آنها را از محلول‌های آبکی غلات جمع‌آوری کنید). مهم‌تر از همه اینکه، صنعت الکترونیک نوین، چنانکه می‌دانیم، عاری از وجود مواد مغناطیسی (به ویژه، در بخش‌های مربوط به موسیقی و اطلاعات) نیست.

خواص مغناطیسی مواد را می‌توان در اتم‌ها و الکترون‌های آنها جستجو کرد. ما در اینجا موضوع را از آهن‌ربای میله‌ای شکل ۳۲ـ۱ آغاز می‌کنیم. همان طور که دیده‌ایم، براده‌های آهن پاشیده شده در پیرامون آهن‌ربا میل دارند با راستای میدان مغناطیسی آهن‌ربا ردیف شوند و نقش قرار گرفتن آنها وجود خط‌های میدان مغناطیسی را نشان می‌دهد. متراکم شدن این خط‌ها در دو سر آهن‌ربا نشانهٔ این است که یک سر آهن‌ربا **چشمهٔ** خط‌ها (محل واگرا شدن میدان مغناطیسی) و سر دیگر **چاهک خط‌ها** (محل همگرا شدن میدان مغناطیسی) است. بنا به قرارداد، چشمه را **قطب شمال** آهن‌ربا و سر دیگر را **قطب جنوب** آهن‌ربا می‌نامند و گفته می‌شود که آهن‌ربا با دو قطب خود مثالی از یک **دوقطبی مغناطیسی** است.

فرض کنید یک آهن‌ربای میله‌ای را، مانند شکستن یک قطعه گچ، بشکنیم (شکل ۳۲ـ۲). به نظر می‌رسد که با این کار قادر به داشتن یک قطب مغناطیسی منزوی، یا یک **تک قطبی** هستیم. اما، چنین نیست ـ حتی اگر آهن‌ربا را تا سطح اتم‌های مجزای آن و سپس تا الکترون‌ها و هسته‌های آن بشکنیم، هر پارهٔ آهن‌ربا باز هم یک قطب شمال و یک قطب جنوب خواهد داشت. پس می‌توان گفت که:

◀ ساده‌ترین ساختار مغناطیسی‌ای که می‌تواند وجود داشته باشد، یک دوقطبی مغناطیسی است. تک قطبی مغناطیسی (تا جایی که می‌دانیم) وجود ندارد.

۳۲ـ۲ قانون گاؤس دربارهٔ میدان‌های مغناطیسی



شکل ۳۲ـ۲ اگر یک آهن‌ربا را بشکنیم هر پارهٔ آن به صورت یک آهن‌ربای مجزا، که دارای قطب‌های شمال و جنوب است، در می‌آید.

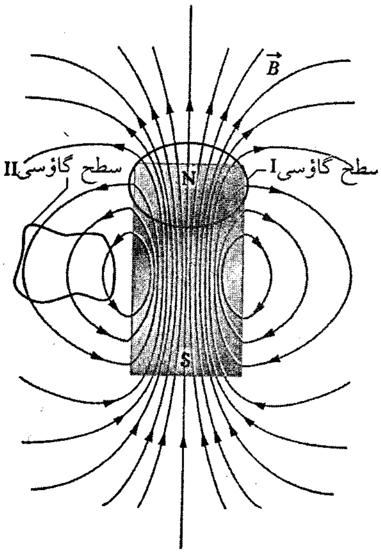
قانون گاؤس دربارهٔ میدان‌های مغناطیسی ارائهٔ روشی صوری برای این نکته است که بگوییم تک قطبی مغناطیسی وجود ندارد. این قانون تصریح می‌کند که Φ_B، شار مغناطیسی خالص گذرنده از هر سطح گاؤسی بسته صفر است:

$$\Phi_B = \oint \vec{B}.d\vec{A} = 0 \qquad \text{(قانون گاؤس دربارهٔ میدان‌های مغناطیسی)} \qquad (۳۲ـ۱)$$

این قانون را با قانون گاؤس دربارهٔ میدان‌های الکتریکی مقایسه می‌کنیم:

$$\Phi_E = \oint \vec{E}.d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} \qquad \text{(قانون گاؤس دربارهٔ میدان‌های الکتریکی)}$$

در هر دو معادلهٔ بالا انتگرال در روی یک سطح گاؤسی بسته گرفته می‌شود. بنا به قانون گاؤس دربارهٔ میدان‌های الکتریکی این انتگرال (شار الکتریکی خالص گذرنده از سطح) با بار الکتریکی خالص q_{enc} محصور شده توسط سطح متناسب است. قانون گاؤس دربارهٔ میدان‌های مغناطیسی نشان می‌دهد که هیچ شار مغناطیسی خالصی از سطح عبور نمی‌کند چون هیچ «بار مغناطیسی» خالص (قطب مغناطیسی مجزا) محصور



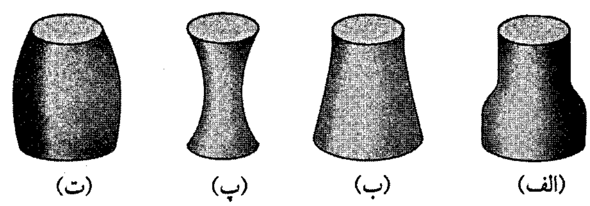
شکل ۳۲ـ۳ نمودار خط‌های میدان مربوط به $\vec{B}$، میدان مغناطیسی یک آهن‌ربای میله‌ای کوتاه منحنی‌های پررنگ مقطع‌ها سطح‌های گاؤسی سه بعدی بسته را نشان می‌دهند.

شده توسط سطح نمی‌تواند وجود داشته باشد. ساده‌ترین ساختار مغناطیسی‌ای که می‌تواند وجود داشته باشد، و در نتیجه با یک سطح گاؤسی محصور شود، یک دوقطبی است که شامل چشمه و چاهک برای خط‌های میدان است. بنابراین، همیشه شار مغناطیسی به همان اندازه که به سطح وارد می‌شود باید از سطح خارج شود و شار مغناطیسی خالص باید همیشه صفر باشد.

قانون گاؤس دربارهٔ میدان‌های مغناطیسی، برای ساختارهای پیچیده‌تر از یک دوقطبی مغناطیسی، و حتی در مورد سطح گاؤسی‌ای که ساختار را به طور کامل محصور نمی‌کند، نیز صادق است. در شکل ۳۲ـ۳، سطح گاؤسی II، واقع در نزدیکی آهن‌ربای میله‌ای، هیچ قطبی را محصور نمی‌کند و ما به سادگی می‌توانیم نتیجه بگیریم که شار مغناطیسی خالص گذرنده از آن صفر است. شرایط سطح گاؤسی I مشکل‌تر است. ممکن است به نظر برسد که این سطح فقط قطب شمال آهن‌ربا را محصور می‌کند زیرا نشانهٔ N را در بر می‌گیرد نه نشانهٔ S را. اما قطب جنوب باید به مرز پایینی سطح وابسته باشد، زیرا در آنجا خط‌های میدان مغناطیسی به سطح وارد می‌شوند. (بخش محصور شده مانند یک قطعه از آهن‌ربای میله‌ای شکسته شده در شکل ۳۲ـ۲ است). بنابراین، سطح گاؤسی I یک دوقطبی مغناطیسی را محصور می‌کند و شار خالص گذرنده از آن سطح صفر است.

خودآزمایی ۱: شکل زیر، چهار سطح بسته را نشان می‌دهد که وجه‌های بالا و پایین آنها تخت و بدنهٔ آنها خمیده است. در جدول زیر، مساحت‌های وجه‌های بالا (A_{top}) و پایین (A_{bot}) و بزرگی‌های میدان‌های مغناطیسی یکنواخت و عمود بر وجه‌های بالا (B_{top}) و پایین (B_{bot}) درج شده است؛ یکاهای A و B اختیاری، اما سازگارند. این سطح‌ها را با توجه به بزرگی شار مغناطیسی گذرنده از وجه‌های خمیدهٔ آنها، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.

سطح	A_{top}	B_{top}	A_{bot}	B_{bot}
الف	۲	۶، برون سو	۴	۳، درون سو
ب	۲	۱، درون سو	۴	۲، درون سو
پ	۲	۶، درون سو	۲	۸، برون سو
ت	۲	۳، برون سو	۳	۲، برون سو



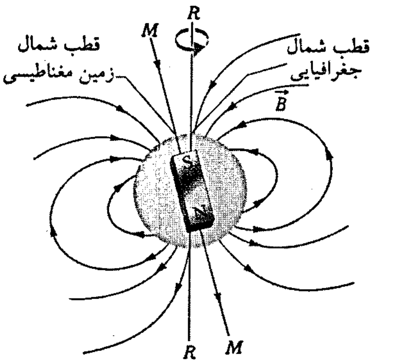
۳۲ـ۳ مغناطیس زمین

زمین یک آهن‌ربای بسیار بزرگ است؛ در نقاط نزدیک سطح آن میدان مغناطیسی را به تقریب می‌توان مانند میدان یک آهن‌ربای میله‌ای عظیم ـ یک دوقطبی مغناطیسی ـ که در مرکز زمین قرار گرفته است، در نظر گرفت. شکل ۳۲ـ۴، یک نقش متقارن آرمانی مربوط به میدان دوقطبی را، بدون واپیچش ناشی از عبور ذرات باردار گسیل شده از خورشید نشان می‌دهد.

چون میدان مغناطیسی زمین همان میدان مربوط به یک دوقطبی مغناطیسی است، به این میدان یک گشتاور دوقطبی مغناطیسی $\vec{\mu}$ وابسته است. در میدان آرمانی شکل ۳۲ـ۴، بزرگی $\vec{\mu}$ برابر با $۸٫۰ \times ۱۰^{۲۲}$ J/T است و راستای $\vec{\mu}$ با محور چرخش زمین (RR) زاویهٔ ۱۱٫۵ درجه می‌سازد. محور دوقطبی (MM در شکل ۳۲ـ۴) در راستای $\vec{\mu}$ قرار دارد و سطح زمین را در قطب شمال زمین مغناطیسی، واقع در شمال غربی گرینلند[1]،

1. Greenland

و در قطب جنوب زمین مغناطیسی، واقع در جنوبگان[1]، قطع می‌کند. به طور کلی، خط‌های میدان مغناطیسی $\vec{B}$ در نیمکرهٔ جنوبی از سطح زمین خارج و در نیمکرهٔ شمالی به سطح زمین وارد می‌شوند. بنابراین، قطب مغناطیسی واقع در نیمکرهٔ شمالی زمین، که «قطب مغناطیسی شمال» نامیده می‌شود، واقعاً، قطب جنوب دوقطبی مغناطیسی زمین است.



شکل ۳۲ـ۴ نمایش میدان مغناطیسی زمین به صورت میدان یک دوقطبی مغناطیسی. محور دوقطبی MM، با محور دوران زمین RR، زاویهٔ ۱۱٫۵ درجه می‌سازد. قطب جنوب این دوقطبی در نیمکرهٔ شمالی زمین قرار دارد.

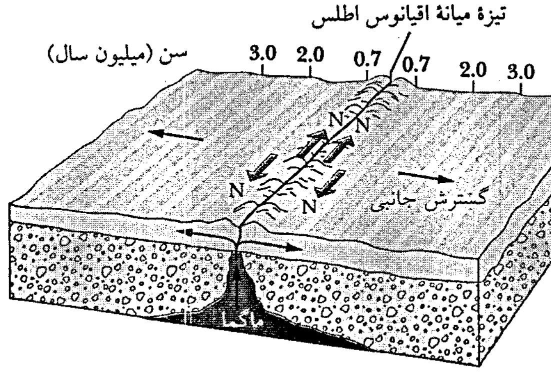
راستای میدان مغناطیسی در هر نقطه از سطح زمین، معمولاً با دو زاویه مشخص می‌شود. **زاویهٔ انحراف میدان**، زاویهٔ (چپ یا راست) میان شمال جغرافیایی (که به طرف عرض جغرافیایی ۹۰ درجه است) و مؤلفهٔ افقی میدان است. **زاویهٔ میل میدان**، زاویهٔ (بالا یا پایین) میان یک صفحهٔ افقی و راستای میدان است.

مغناطیس سنج‌ها با اندازه‌گیری این زاویه‌ها میدان مغناطیسی را با دقت زیاد معین می‌کنند. اما اندازه‌گیری قابل قبول را به سادگی می‌توان با یک قطب‌نما و یک شیب سنج انجام داد. قطب‌نما آهن‌ربای عقربه‌ای شکلی است که روی پایه‌ای سوار شده است و می‌تواند آزادانه حول یک محور قائم بچرخد. وقتی قطب‌نما در یک صفحهٔ افقی نگه داشته می‌شود، معمولاً قطب شمال عقربه به سمت قطب شمال زمین مغناطیسی (در واقع قطب مغناطیسی جنوب) می‌ایستد. زاویهٔ میان عقربه و شمال جغرافیایی، زاویهٔ انحراف میدان است. شیب‌سنج آهن‌ربای مشابهی است که می‌تواند آزادانه حول یک محور افقی بچرخد. وقتی صفحهٔ قائم دوران در راستای قطب‌نما قرار می‌گیرد، زاویهٔ میان عقربهٔ شیب‌سنج و صفحهٔ افق زاویهٔ میل میدان خواهد بود.

در هر نقطه از سطح زمین میدان مغناطیسی اندازه‌گیری شده ممکن است با مقدار آرمانی میدان دوقطبی شکل ۳۲ـ۴، از نظر بزرگی و جهت به طور کامل تفاوت داشته باشد. در واقع، نقطه‌ای که در آنجا میدان بر سطح زمین عمود و در درون سوی زمین است، در قطب شمال زمین مغناطیسی در گرینلند، چنانکه انتظار داریم، قرار ندارد؛ بلکه، این نقطه که قطب شمال شیب نامیده می‌شود، در جزایر ملکه الیزابت[2] در کانادای شمالی، و دور از گرینلند، واقع است.

علاوه بر این، میدان مشاهده شده در محل‌های گوناگون سطح زمین، برحسب زمان به میزان قابل اندازه‌گیری در یک دورهٔ چند ساله و به مقدار چشمگیر در مدت مثلاً، ۱۰۰ سال تغییر می‌کند. برای مثال، در فاصلهٔ میان سال‌های ۱۵۸۰ و ۱۸۲۰، راستای عقربهٔ قطب‌نما در لندن به اندازهٔ ۳۵ درجه تغییر کرده است.

به رغم این تغییرات محلی، میدان متوسط دوقطبی در دوره‌های زمانی نسبتاً کوتاه به کندی تغییر می‌کند. تغییرات میدان زمین در دوره‌های زمانی طولانی‌تر را می‌توان با اندازه‌گیری خاصیت مغناطیسی ضعیف موجود در کف اقیانوس اطلس و در دو طرف تیزهٔ میانهٔ اقیانوس مطالعه کرد (شکل ۳۲ـ۵). رسوب کف اقیانوس در اثر ماگمای (تفتال) مذابی که از راه تیزه از درون زمین به بیرون نشت کرده تشکیل شده است. این



شکل ۳۲ـ۵ نمایش نیمرخ مغناطیسی کف دریا در دو طرف تیزهٔ میانهٔ اقیانوس اطلس. کف دریا که در تیزه بالا آمده و به صورت بخشی از سیستم رانش زمین ساختی گسترش یافته است، چگونگی سابقهٔ مغناطیسی گذشتهٔ هستهٔ زمین را نمایش می‌دهد. جهت میدان مغناطیسی تولید شده توسط هسته تقریباً در هر چند میلیون سال وارو می‌شود.

1. Antarctica
2. Queen Elizabeth

ماگما سفت شده و با آهنگ چند سانتی‌متر در سال به برون سوی تیزه (بر اثر رانش صفحه‌های زمین ساختی) کشیده شده است. ماگما در حین سفت شدن به نحو ضعیفی مغناطیده شده و در زمان سفت شدن میدان مغناطیسی آن با میدان مغناطیسی زمین همسو بوده است. مطالعهٔ ماگمای سفت شده در کف اقیانوس نشان می‌دهد که قطبیت (جهت‌های قطب شمال و قطب جنوب) میدان مغناطیسی زمین تقریباً در هر میلیون سال یک بار وارو شده است. دلیل وارو شدن قطب‌ها معلوم نیست. در واقع، ساز و کار تولید میدان مغناطیسی زمین هم فقط به نحوی مبهم شناخته شده است.

۴-۳۲ مغناطیس و الکترون‌ها

مواد مغناطیسی از سنگ‌های مغناطیسی طبیعی گرفته تا نوارهای تصویری، به خاطر الکترون‌های درون‌شان دارای خاصیت مغناطیسی‌اند. پیش از این دیدیم برای آنکه الکترون‌ها بتوانند میدان مغناطیسی تولید کنند، یکی از روشها عبور دادن آنها از یک سیم به صورت جریان الکتریکی بود تا در اثر حرکت کردن آنها در پیرامون سیم یک میدان مغناطیسی به وجود آید. دو روش دیگر هم وجود دارد که در هر کدام آنها گشتاور دوقطبی مغناطیسی در فضای پیرامون خود یک میدان مغناطیسی تولید می‌کند. اما تشریح این مطلب نیاز به فیزیک کوانتومی دارد که از سطح فیزیک این کتاب فراتر است و ما در اینجا فقط نتیجه‌های عمده را بیان می‌کنیم.

گشتاور دوقطبی مغناطیسی اسپینی

هر الکترون یک تکانهٔ زاویه‌ای ذاتی به نام **تکانهٔ زاویه‌ای اسپینی** (یا به طور ساده **اسپین**) $\vec{S}$، دارد که به این اسپین یک **گشتاور دوقطبی مغناطیسی اسپینی** ذاتی $\vec{\mu}_s$، وابسته است. (منظور از واژهٔ ذاتی این است که $\vec{S}$ و $\vec{\mu}_s$ از مشخصه‌های اصلی یک الکترون، همانند جرم و بار الکتریکی آن، هستند). $\vec{S}$ و $\vec{\mu}_s$ با یکدیگر به صورت زیر با هم رابطه دارند:

$$\vec{\mu}_s = -\frac{e}{m}\vec{S} \qquad (۲-۳۲)$$ ■

که در آن e بار بنیادی ($۱٫۶۰ \times ۱۰^{-۱۹}$C) و m جرم الکترون ($۹٫۱۱ \times ۱۰^{-۳۱}$kg) است. معنای علامت منها این است که $\vec{\mu}_s$ و $\vec{S}$ ناهمسو هستند.

اسپین $\vec{S}$ از دو نظر با تکانه‌های زاویه‌ای فصل ۱۲ تفاوت دارد:

۱. اسپین $\vec{S}$ خودش نمی‌تواند اندازه‌گیری شود، اما مؤلفهٔ آن را در راستای هر محوری می‌توان اندازه‌گیری کرد.

۲. مؤلفهٔ انداه‌گیری شدهٔ $\vec{S}$، کوانتیده است و این اصطلاحی عمومی است که نشان می‌دهد اسپین محدود به مقادیر خاصی است. مؤلفهٔ اندازه‌گیری شدهٔ $\vec{S}$ فقط می‌تواند دو مقدار داشته باشد که تفاوت آنها فقط در علامت است.

اکنون، فرض می‌کنیم مؤلفهٔ اسپین $\vec{S}$ را در راستای محور z یک دستگاه محورهای مختصات اندازه‌گیری می‌کنیم. در این صورت، مؤلفهٔ اندازه‌گیری شدهٔ S_z فقط می‌تواند دو مقدار داشته باشد:

$$S_z = m_s \frac{h}{۲\pi} \qquad \text{به ازای} \quad m_s = \pm\frac{۱}{۲} \qquad (۳-۳۲)$$

که در آن m_s عدد کوانتومی مغناطیسی اسپینی است و h (مساوی با $۶٫۶۳ \times ۱۰^{-۳۴}$J.s) ثابت پلانک[1] نام دارد، که یک ثابت فراگیر فیزیک کوانتومی است. علامت‌های به کار رفته در معادلهٔ ۳-۳۲ برای نشان دادن جهت S_z در راستای محور z هستند. هرگاه S_z با محور z موازی (همسو) باشد، m_s برابر با $+\frac{۱}{۲}$ است و گفته می‌شود که الکترون در حالت اسپین بالا است. هرگاه S_z با محور z پادموازی (ناهمسو) باشد، m_s برابر با $-\frac{۱}{۲}$ است و گفته می‌شود که الکترون در حالت اسپین پایین است.

گشتاور دوقطبی مغناطیسی اسپینی الکترون $\vec{\mu}_s$، را نیز نمی‌توان اندازه گرفت؛ فقط مؤلفهٔ آن در راستای هر محوری قابل اندازه‌گیری است که این مؤلفه هم کوانتیده و دارای دو مقدار ممکن با بزرگی یکسان و

1. Planck

علامت‌های مخالف است. با بازنویسی معادلهٔ ۳۲-۲ برحسب مؤلفه‌ها در راستای محور z می‌توان رابطهٔ مؤلفهٔ $\mu_{s,z}$ اندازه‌گیری شده در روی محور z با مولفهٔ S_z را به صورت زیر نوشت

$$\mu_{s,z} = -\frac{e}{m} S_z$$

مقدار S_z از معادلهٔ ۳۲-۳ را در این معادله قرار می‌دهیم، داریم

$$\mu_{s,z} = \pm \frac{eh}{4\pi m} \qquad (۳۲-۴)$$

که در آن علامت‌های به علاوه و منها، به ترتیب، متناظر با $\mu_{s,z}$ موازی و پادموازی با محور z هستند.

کمیت سمت راست معادلهٔ ۳۲-۴ را مگنتون بور[1]، μ_B، می‌نامند:

$$\mu_B = \frac{eh}{4\pi m} = 9{,}27 \times 10^{-24} J/T \qquad \text{(مگنتون بور)} \qquad (۳۲-۵)$$ ■

گشتاورهای دوقطبی مغناطیسی اسپینی الکترون‌ها و ذرات بنیادی دیگر را می‌توان برحسب μ_B بیان کرد. برای الکترون، بزرگی مؤلفهٔ اندازه‌گیری شدهٔ $\vec{\mu}_s$ در راستای محور z، برابر است با:

$$\mu_{s,z} = 1\mu_B \qquad (۳۲-۶)$$

(فیزیک کوانتومی الکترون، که الکترودینامیک کوانتومی، یا QED[2] نامیده می‌شود، نشان می‌دهد که $\mu_{s,z}$ اندکی از $1\mu_B$ بیشتر است و از این واقعیت چشم‌پوشی می‌شود).

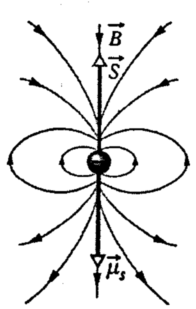
هنگام قرار دادن یک الکترون در میدان مغناطیسی خارجی $\vec{B}_{ext}$ می‌توان انرژی پتانسیلی مانند U را به سمتگیری گشتاور دوقطبی مغناطیسی اسپینی $\vec{\mu}_s$ نسبت داد و این درست مانند انرژی پتانسیل نسبت داده شده به سمتگیری گشتاور دوقطبی مغناطیسی $\vec{\mu}$ مربوط به حلقهٔ جریان واقع در میدان $\vec{B}_{ext}$ است. با توجه به معادلهٔ ۲۹-۳۸، انرژی پتانسیل مربوط به الکترون برابر است با:

$$U = -\vec{\mu}_s \cdot \vec{B}_{ext} = -\mu_{s,z} B_{ext} \qquad (۳۲-۷)$$ ■

در اینجا محور z در جهت $\vec{B}_{ext}$ اختیار شده است.

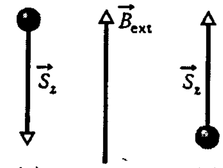
هرگاه الکترونی را به صورت کره‌ای میکروسکوپی تصور کنیم (که چنین نیست)، می‌توانیم اسپین $\vec{S}$، گشتاور دوقطبی مغناطیسی اسپینی $\vec{\mu}_s$، و میدان دوقطبی مغناطیسی متناظر را مانند شکل ۳۲-۶، نمایش دهیم. اگرچه در اینجا از واژهٔ «اسپین» استفاده می‌کنیم، اما الکترون‌ها مانند فرفره نمی‌چرخند. پس، چنین چیزی بدون آنکه واقعاً بچرخد چگونه می‌تواند تکانهٔ زاویه‌ای داشته باشد؟ باز هم، برای پاسخ دادن به این پرسش به فیزیک کوانتومی نیازمندیم.

پروتون‌ها و نوترون‌ها هم یک تکانهٔ زاویه‌ای ذاتی به نام اسپین و یک گشتاور دوقطبی مغناطیسی اسپینی ذاتی دارند. این دو بردار برای پروتون همسو و برای نوترون ناهمسو هستند. در اینجا سهم این گشتاورهای دوقطبی را در میدان‌های مغناطیسی اتم‌ها در نظر نمی‌گیریم زیرا بزرگی آنها هزاران بار کوچکتر از مقادیر مربوط به الکترون است.



شکل ۳۲-۶ نمایش اسپین $\vec{S}$، گشتاور دوقطبی مغناطیسی اسپینی $\vec{\mu}_s$، و میدان دوقطبی مغناطیسی $\vec{B}$ مربوط به الکترونی که به صورت کره‌ای میکروسکوپی نشان داده می‌شود.

خودآزمایی ۲: شکل زیر، سمتگیری اسپین دو ذره را در میدان مغناطیسی خارجی $\vec{B}_{ext}$ نشان می‌دهد. (الف) اگر این ذرات الکترون باشند انرژی پتانسیل کدام سمتگیری اسپینی پایین‌تر است؟ (ب) حال، اگر این ذرات پروتون باشند، انرژی پتانسیل کدام سمتگیری اسپینی پایین‌تر است؟



1. Bohr magneton 2. quntum electrodynamics

گشتاور دوقطبی مغناطیسی مداری

هنگامی که الکترونی در درون اتم است یک تکانهٔ زاویه‌ای دیگر هم به نام **تکانهٔ زاویه‌ای مداری** $\vec{L}_{orb}$، دارد، که به آن یک **گشتاور دوقطبی مغناطیسی مداری** $\vec{\mu}_{orb}$، وابسته است؛ رابطهٔ این دو کمیت چنین است:

$$\vec{\mu}_{orb} = -\frac{e}{2m}\vec{L}_{orb} \qquad (۸-۳۲)$$

علامت منها نشان می‌دهد که $\vec{\mu}_{orb}$ و $\vec{L}_{orb}$ ناهمسو هستند.

تکانهٔ زاویه‌ای مداری $\vec{L}_{orb}$ را نمی‌توان اندازه گرفت؛ فقط مؤلفهٔ آن در راستای یک محور است که می‌تواند اندازه‌گیری شود و این مؤلفه کوانتیده است. این مؤلفه، مثلاً در راستای محور z، فقط می‌تواند مقادیر زیر را داشته باشد:

$$L_{orb,z} = m_l \frac{h}{2\pi} \qquad m_l = 0\,,\ \pm 1\,,\ \pm 2\,,\ \ldots\,,\ \pm\ (\text{حد}) \quad \text{به ازای} \qquad (۹-۳۲)$$

که در آن m_l **عدد کوانتومی مغناطیسی مداری** نام دارد و «حد» مربوط به بزرگترین مقدار درست مجاز m_l است. علامت‌ها در معادلهٔ ۳۲-۹، جهت $L_{orb,z}$ را در راستای محور z مشخص می‌کنند.

گشتاور دوقطبی مغناطیسی مداری $\vec{\mu}_{orb}$ یک الکترون را نیز نمی‌توان اندازه گرفت؛ فقط مؤلفه آن در راستای یک محور است که می‌تواند اندازه‌گیری شود و این مؤلفه هم کوانتیده است. با نوشتن معادلهٔ ۳۲-۸ برای یک مؤلفه در راستای همان محور z و جانشانی مقدار $L_{orb,z}$ از معادلهٔ ۳۲-۹ در آن، مؤلفهٔ z گشتاور دوقطبی مغناطیسی مداری $\mu_{orb,z}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\mu_{orb,z} = -m_l \frac{eh}{4\pi m} \qquad (۱۰-۳۲)$$

و برحسب مگنتون بور، داریم

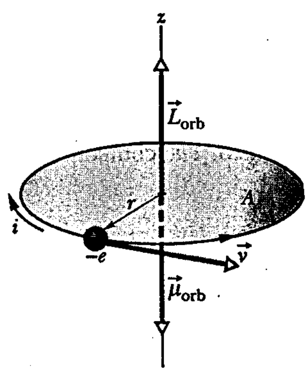
$$\mu_{orb,z} = -m_l \mu_B \qquad (۱۱-۳۲)$$

هنگام قرار دادن یک اتم در میدان مغناطیسی خارجی $\vec{B}_{ext}$ می‌توان انرژی پتانسیلی مانند U را به سمتگیری گشتاور دوقطبی مغناطیسی مداری هر الکترون در اتم، نسبت داد. مقدار این انرژی برابر است با:

$$U = -\vec{\mu}_{orb} \cdot \vec{B}_{ext} = -\mu_{orb,z} B_{ext} \qquad (۱۲-۳۲)$$

که در آن محور z در جهت $\vec{B}_{ext}$ اختیار شده است.

اگرچه در اینجا واژه‌های «مدار» و «مداری» را به کار بردیم، اما باید بدانیم که مانند گردش سیاره‌ها به دور خورشید، الکترون‌ها به دور هسته نمی‌گردند. پس، یک الکترون بدون آنکه به معنای واقعی کلمه گردش کند، چگونه می‌تواند تکانهٔ زاویه‌ای مداری داشته باشد؟ باز هم، این موضوع فقط با استفاده فیزیک کوانتومی قابل توجیه است.



شکل ۳۲-۷ الکترونی با تندی ثابت v در یک مسیر دایره‌ای به شعاع r، که مساحت A را محصور کرده است، حرکت می‌کند. تکانهٔ زاویه‌ای مداری الکترون $\vec{L}_{orb}$ و گشتاور دوقطبی مغناطیسی مداری وابسته به آن $\vec{\mu}_{orb}$ است. جریان ساعتگرد i (مربوط به بارهای مثبت) هم‌ارز با دوران پادساعتگرد الکترون‌های با بار منفی است.

مدل حلقه‌ای مربوط به مدارهای الکترونی

معادلهٔ ۳۲-۸ را می‌توان با استنتاجی ناکوانتومی، که در زیر توضیح داده می‌شود، به دست آورد. در اینجا فرض می‌کنیم الکترونی در یک مسیر دایره‌ای با شعاعی خیلی بزرگتر از شعاع اتم حرکت می‌کند (نام «مدل حلقه‌ای» بدین جهت انتخاب شده است). اما این استنتاج در مورد الکترون درون اتم به کار نمی‌رود. (و در این مورد به فیزیک کوانتومی نیاز داریم).

الکترونی را در نظر می‌گیریم که با تندی ثابت v در یک مسیر دایره‌ای به شعاع r، مطابق شکل ۳۲-۷، در جهت پادساعتگرد حرکت می‌کند. حرکت کردن الکترون با بار منفی هم‌ارز با جریان قراردادی i (مربوط به بارهای مثبت) است که، مطابق شکل ۳۲-۷، در جهت ساعتگرد عبور می‌کند. بزرگی گشتاور دوقطبی مغناطیسی مداری این حلقهٔ جریان، به ازای $N=1$، از معادلهٔ ۲۹-۳۵ به دست می‌آید:

$$\mu_{orb} = iA \qquad (۱۳-۳۲)$$

که در آن A مساحت محصور شده توسط حلقه است. جهت این گشتاور دوقطبی مغناطیسی طبق قاعدهٔ دست راست شکل ۳۰-۲۱، در شکل ۳۲-۷ به سمت پایین است.

برای براورد معادلهٔ ۳۲-۱۳، به جریان i نیاز داریم. جریان، عبارت است از آهنگ عبور بار الکتریکی از هر نقطه از مدار. در اینجا مدتی به اندازهٔ $T=2\pi r/v$ طول می‌کشد تا بار الکتریکی به بزرگی e مسیری را از نقطه‌ای دور بزند و به همان نقطه برگردد. در این صورت، داریم

$$i = \frac{\text{بار الکتریکی}}{\text{زمان}} = \frac{e}{2\pi r/v} \qquad (۳۲\text{-}۱۴)$$

با جانشانی این مقدار و مساحت حلقه، $A=\pi r^2$، در معادلهٔ ۳۲-۱۳ داریم

$$\mu_{\text{orb}} = \frac{e}{2\pi r/v}\pi r^2 = \frac{evr}{2} \qquad (۳۲\text{-}۱۵)$$

برای تعیین تکانهٔ زاویه‌ای مداری الکترون $\vec{L}_{\text{orb}}$، از معادلهٔ ۱۲-۱۸، به صورت $\vec{l}=m(\vec{r}\times\vec{v})$، استفاده می‌کنیم. چون $\vec{r}$ و $\vec{v}$ برهم عمودند، بزرگی $\vec{L}_{\text{orb}}$ برابر است با:

$$L_{\text{orb}} = mrv \sin 90^\circ = mrv \qquad (۳۲\text{-}۱۶)$$

جهت $\vec{L}_{\text{orb}}$ در شکل ۳۲-۷ به سمت بالاست (شکل ۱۲-۱۱ را ببینید). از ترکیب معادله‌های ۳۲-۱۵ و ۳۲-۱۶، برای تعمیم فرمولبندی برداری، و نشان دادن جهت مخالف بردارها با علامت منها، داریم

$$\vec{\mu}_{\text{orb}} = -\frac{e}{2m}\vec{L}_{\text{orb}}$$

که همان معادلهٔ ۳۲-۸ است. بنابراین، با تحلیل «کلاسیکی» (ناکوانتومی) به همان نتیجه‌ای، از نظر بزرگی و جهت، رسیدیم که از راه فیزیک کوانتومی به آن رسیده بودیم. ممکن است از این مطلب تعجب کنید، زیرا این استنتاج که برای الکترون درون اتم نتیجهٔ درستی به دست می‌دهد، چرا استنتاج نامعتبری برای این وضعیت است. پاسخ این است که از این روش استدلال نتیجه‌های دیگری هم به دست می‌آید که با تجربه در تناقض است.

مدل حلقه‌ای در میدان نایکنواخت

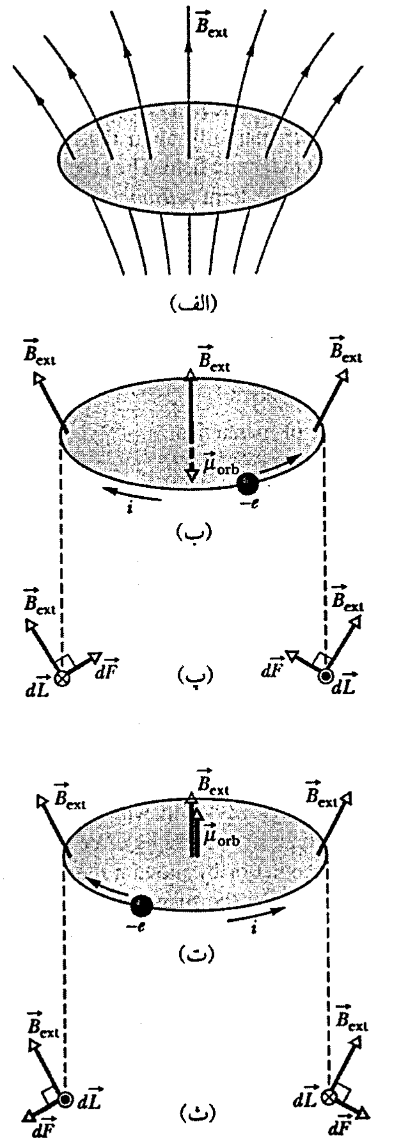
با در نظر گرفتن مدار حرکت الکترون به صورت یک حلقهٔ جریان، مطابق شکل ۳۲-۷، بحث را ادامه می‌دهیم. اما در اینجا حلقه را، مطابق شکل ۳۲-۸ الف، در میدان مغناطیسی نایکنواخت $\vec{B}_{\text{ext}}$، قرار می‌دهیم. (این میدان می‌تواند میدان واگرای نزدیک به قطب شمال آهن‌ربا در شکل ۳۲-۳ باشد). این تغییر را به منظور آماده شدن برای چند بخش بعدی کتاب، که در آنها دربارهٔ نیروهای وارد بر مواد مغناطیسی در یک میدان مغناطیسی نایکنواخت بحث خواهد شد، انجام می‌دهیم. این نیروها را با این فرض مورد بحث قرار خواهیم داد که مدارهای الکترونی در مواد حلقه‌های جریان کوچکی مانند حلقهٔ شکل ۳۲-۸ الف، هستند.

در اینجا فرض می‌کنیم که بردارهای میدان مغناطیسی روی مسیر دایره‌ای الکترون همه یکسان‌اند و مطابق شکل‌های ۳۲-۸ ب و ۳۲-۸ ت، با راستای قائم زاویهٔ مساوی تشکیل می‌دهند. هم‌چنین، فرض می‌کنیم که تمام الکترون‌ها در یک اتم در جهت پادساعتگرد (شکل ۳۲-۸ ب) یا ساعتگرد (شکل ۳۲-۸ ت) حرکت می‌کنند. در شکل‌ها جریان قراردادی وابستهٔ i، در طول حلقهٔ جریان و $\vec{\mu}_{\text{orb}}$، گشتاور دوقطبی مغناطیسی مداری حاصل از جریان i، برای هر یک از این جهت‌های حرکت، نشان داده شده‌اند.

شکل‌های ۳۲-۸ پ و ۳۲-۸ ث، به طور قطری عنصر طول $\vec{dL}$ از حلقه را، که با جریان i همسو است، با دید از صفحهٔ مدار نشان می‌دهند. در ضمن، میدان $\vec{B}_{\text{ext}}$ و $\vec{dF}$، نیروی مغناطیسی برایند وارد بر $\vec{dL}$، نشان داده شده است. یادآوری می‌شود که جریان عنصر $\vec{dL}$ واقع در یک میدان مغناطیسی $\vec{B}_{\text{ext}}$، تحت تأثیر نیروی مغناطیسی $\vec{dF}$ قرار می‌گیرد که از معادلهٔ ۲۹-۲۸ به دست می‌آید:

$$\vec{dF} = i\,\vec{dL} \times \vec{B}_{\text{ext}} \qquad (۳۲\text{-}۱۷)$$

معادلهٔ ۳۲-۱۷ نشان می‌دهد که نیروی $\vec{dF}$ در سمت چپ شکل ۳۲-۸ پ، به طرف بالا و سمت راست است.



شکل ۳۲-۸ (الف) نمایش مدل حلقه‌ای مربوط به الکترونی که در یک اتم گردش می‌کند و اتم در میدان مغناطیسی نایکنواخت $\vec{B}_{\text{ext}}$ قرار دارد. (ب) بار الکتریکی $-e$ در جهت پادساعتگرد حرکت می‌کند و جریان قراردادی وابستهٔ i، در جهت ساعتگرد است. (پ) نمودار نیروهای مغناطیسی $\vec{dF}$، با دید از صفحهٔ حلقه، که به کناره‌های چپ و راست حلقه وارد می‌شوند. نیروی برایند وارد بر حلقه به سمت بالاست. (ت) اکنون، بار الکتریکی $-e$ در جهت ساعتگرد حرکت می‌کند. (ث) در این حالت، نیروی برایند وارد بر حلقه به سمت پایین است.

در سمت راست نیروی $d\vec{F}$ درست به همان بزرگی است و به طرف بالا و به سمت چپ است. چون زاویه‌های این نیروها نسبت به راستای قائم یکسان‌اند، مؤلفه‌های افقی دو نیرو یکدیگر را خنثی می‌کنند و مؤلفه‌های قائم آنها با هم جمع می‌شوند. این موضوع در مورد هر دو نقطهٔ متقارن دیگر بر روی حلقه، صادق است. بنابراین، نیروی برایند وارد بر حلقهٔ جریان در شکل ۳۲ـ۸ ب باید به طرف بالا باشد. همین استدلال در مورد نیروی برایند رو به پایین وارد بر حلقهٔ شکل ۳۲ـ۸ ت نیز صادق است. ما از این دو نتیجه در هنگام بررسی رفتار مواد مغناطیسی در میدان‌های مغناطیسی نایکنواخت، به اختصار استفاده خواهیم کرد.

۳۲ـ۵ مواد مغناطیسی

در یک اتم هر الکترون دارای یک گشتاور دوقطبی مغناطیسی مداری و یک گشتاور دوقطبی مغناطیسی اسپینی است، که به صورت برداری با هم ترکیب می‌شوند. برایند این دو کمیت برداری با برایندهای مشابه مربوط به تمام الکترون‌های دیگر در اتم، و برایند مربوط به هر اتم نیز با برایندهای مربوط به اتمهای دیگر نمونه‌ای از یک ماده، به صورت برداری، ترکیب می‌شود. اگر ترکیب تمام این گشتاورهای دوقطبی مغناطیسی یک میدان مغناطیسی به وجود آورد، در آن صورت، ماده دارای خاصیت مغناطیسی است. خاصیت مغناطیسی سه نوع کلی دارد: دیامغناطیس، پارامغناطیس، و فرومغناطیس.

۱. ***دیامغناطیس*** خاصیت دیامغناطیسی در تمام مواد وجود دارد اما آن‌قدر ضعیف است که اگر ماده دارای دو نوع خاصیت مغناطیسی دیگر هم باشد، پوشیده می‌ماند. در دیامغناطیس، اگر ماده در میدان مغناطیسی خارجی $\vec{B}_{\text{ext}}$ قرار گیرد در اتم‌های آن گشتاورهای دوقطبی مغناطیسی ضعیفی به وجود می‌آیند؛ ترکیب تمام گشتاورهای دوقطبی القایی باعث می‌شود کل ماده فقط یک میدان مغناطیسی برایند ناچیز پیدا کند. اگر $\vec{B}_{\text{ext}}$ حذف شود گشتاورهای این دوقطبی و میدان برایند ناشی از آنها هم ناپدید می‌شوند. اصطلاح مادهٔ دیامغناطیسی، معمولاً، به موادی اطلاق می‌شود که فقط خاصیت دیامغناطیسی از خود نشان می‌دهند.

۲. ***پارامغناطیس*** این خاصیت در مواد شامل عنصرهای واسطه، عنصرهای خاک نادر و عنصرهای اکتینیدی (به پیوست چ کتاب رجوع کنید) وجود دارد. هر اتمی از این نوع ماده یک گشتاور دوقطبی مغناطیسی برایند دایمی دارد، اما سمتگیری این گشتاورها در ماده کاتوره‌ای است و کل ماده فاقد میدان مغناطیسی است. با وجود این، یک میدان مغناطیسی خارجی $\vec{B}_{\text{ext}}$ می‌تواند گشتاورهای دوقطبی مغناطیسی اتمها را به طور جزئی ردیف کند و یک میدان مغناطیسی برایند به ماده بدهد. اگر $\vec{B}_{\text{ext}}$ حذف شود، این ردیف شدن و در نتیجه، میدان ناشی از آن ناپدید می‌شود. اصطلاح مادهٔ پارامغناطیسی، معمولاً به موادی اطلاق می‌شود که در اصل خاصیت پارامغناطیسی از خود نشان می‌دهند.

۳. ***فرومغناطیس*** خاصیتی است که در آهن، نیکل و برخی عنصرهای دیگر (و ترکیب‌ها و آلیاژهای این عنصرها) وجود دارد. برخی الکترون‌های این مواد گشتاورهای دوقطبی مغناطیسی برایند ردیف شده دارند که ناحیه‌هایی با گشتاورهای دوقطبی مغناطیسی قوی ایجاد می‌کنند. در این صورت، میدان خارجی $\vec{B}_{\text{ext}}$ می‌تواند گشتاورهای مغناطیسی این ناحیه‌ها را ردیف کند و یک میدان مغناطیسی قوی برای نمونه‌ای از ماده به وجود آورد. ما معمولاً، اصطلاح مادهٔ فرومغناطیس، و حتی اصطلاح عمومی مادهٔ مغناطیسی، را به موادی اطلاق می‌کنیم که در اصل خاصیت فرومغناطیسی از خود نشان می‌دهند.

در سه بخش بعدی به تحقیق دربارهٔ این نوع خاصیت‌های مغناطیسی می‌پردازیم.

۳۲ـ۶ دیامغناطیس

در تبیین خاصیت دیامغناطیسی از جنبهٔ فیزیک کوانتومی هنوز نمی‌توان وارد بحث شد، اما با استفاده از مدل حلقه‌ای شکل‌های ۳۲ـ۷ و ۳۲ـ۸، می‌توان یک توجیه کلاسیکی ارائه داد. برای آغاز کردن کار فرض می‌کنیم در اتم مادهٔ دیامغناطیسی هر الکترون می‌تواند، مطابق شکل ۳۲ـ۸ ت، فقط در جهت ساعتگرد یا، مطابق شکل ۳۲ـ۸ ب، فقط در جهت پادساعتگرد بچرخد. برای توجه به نبود خاصیت مغناطیسی در غیاب میدان

مغناطیسی خارجی $\vec{B}_{ext}$، فرض می‌کنیم اتم فاقد گشتاور دوقطبی مغناطیسی برایند باشد. این امر ایجاب می‌کند که پیش از برقرار کردن میدان $\vec{B}_{ext}$ هر تعداد الکترون که در یک سو می‌چرخد همان تعداد هم در سوی دیگر بچرخد، و در نتیجه گشتاور دوقطبی مغناطیسی برایند رو به بالای اتم با گشتاور دوقطبی مغناطیسی برایند رو به پایین برابر باشد.

اکنون، میدان نایکنواخت $\vec{B}_{ext}$ در شکل ۳۲ـ۸ الف را برقرار می‌کنیم. میدان $\vec{B}_{ext}$ واگرا و به سمت بالاست (خط‌های میدان مغناطیسی واگرا هستند). برای ایجاد چنین میدانی می‌توان جریان گذرنده از یک آهن‌ربای الکتریکی را افزایش داد یا قطب شمال یک آهن‌ربای میله‌ای را از زیر به مدارها نزدیک کرد. در حین افزایش یافتن $\vec{B}_{ext}$ از صفر تا مقدار بیشینهٔ پایانی آن، که یک مقدار پایاست، طبق قانون فارادی و قانون لنز، یک میدان الکتریکی ساعتگرد در حلقهٔ مداری هر الکترون القا می‌شود. اکنون، می‌خواهیم بدانیم این میدان الکتریکی القایی چه اثری روی الکترون‌های در حال گردش در شکل‌های ۳۲ـ۸ ب و ۳۲ـ۸ ت، دارد.

در شکل ۳۲ـ۸ ب، الکترون پادساعتگرد در میدان الکتریکی ساعتگرد شتاب پیدا می‌کند. بنابراین، وقتی میدان مغناطیسی $\vec{B}_{ext}$ تا مقدار بیشینه‌اش افزایش می‌یابد، تندی الکترون تا یک مقدار بیشینه زیاد می‌شود. منظور این است که جریان قراردادی وابستهٔ i و گشتاور دوقطبی مغناطیسی رو به پایین ناشی از i نیز افزایش پیدا می‌کند.

در شکل ۳۲ـ۸ ت، الکترون ساعتگرد توسط میدان الکتریکی ساعتگرد حرکتش کند می‌شود. بنابراین، در اینجا تندی الکترون، جریان وابستهٔ i، و $\vec{\mu}$، گشتاور دوقطبی مغناطیسی رو به بالای ناشی از i، همگی کاهش پیدا می‌کنند. با برقرار کردن میدان $\vec{B}_{ext}$، یک گشتاور دوقطبی مغناطیسی برایند به اتم داده می‌شود، که رو به بالاست. اگر میدان مغناطیسی یکنواخت هم باشد، همین عمل این اتفاق می‌افتد.

نایکنواخت بودن میدان $\vec{B}_{ext}$ نیز بر اتم اثر می‌کند. در شکل ۳۲ـ۸ ب، چون جریان i افزایش می‌یابد نیروهای مغناطیسی رو به بالای $d\vec{F}$ در شکل ۳۲ـ۸ پ، هم افزایش پیدا می‌کنند و همین طور نیروی رو به بالای برایند وارد بر حلقه نیز افزایش می‌یابد. در شکل ۳۲ـ۸ ت، چون جریان i کاهش می‌یابد، نیروهای مغناطیسی رو به پایین $d\vec{F}$ در شکل ۳۲ـ۸ ث، هم کاهش پیدا می‌کنند و نیروی رو به پایین برایند وارد بر حلقهٔ جریان نیز کاهش می‌یابد. بنابراین، با برقرار کردن میدان نایکنواخت $\vec{B}_{ext}$، یک نیروی برایند به اتم وارد می‌شود؛ علاوه بر این، جهت این نیرو در برون سوی ناحیهٔ با میدان مغناطیسی قوی‌تر است.

با آنکه بررسی خود را با مدارهای الکترونی خیالی (حلقه‌های جریان) آغاز کردیم، اما کار را دقیقاً چنان به‌پایان بردیم که برای یک مادهٔ دیامغناطیسی اتفاق می‌افتد: اگر میدان مغناطیسی شکل ۳۲ـ۸ را اعمال کنیم، ماده یک گشتاور دوقطبی مغناطیسی رو به پایین پیدا می‌کند و تحت تأثیر یک نیروی رو به بالا قرار می‌گیرد. چنانچه میدان حذف شود گشتاور دوقطبی و نیرو، هر دو، ناپدید می‌شوند. میدان خارجی لازم نیست حتماً به صورت شکل نشان داده شده اعمال شود؛ دربارهٔ سمتگیری‌های دیگر $\vec{B}_{ext}$ هم می‌توان استدلال‌های مشابهی ارائه داد. به طور کلی:

◄ مادهٔ دیامغناطیسی واقع در میدان مغناطیسی خارجی $\vec{B}_{ext}$ یک گشتاور دوقطبی مغناطیسی ناهمسو با $\vec{B}_{ext}$ از خود بروز می‌دهد. اگر میدان نایکنواخت باشد مادهٔ دیامغناطیسی از ناحیهٔ با میدان مغناطیسی قوی‌تر به سمت ناحیهٔ با میدان ضعیف‌تر رانده می‌شود.

قورباغهٔ تصویر سرآغاز این فصل یک مادهٔ دیامغناطیسی (مانند هر حیوان دیگر) است. وقتی قورباغه در میدان مغناطیسی واگرای نزدیک انتهای بالایی یک سیملولهٔ قائم حامل جریان قرار می‌گیرد، هر اتم بدنش به سمت بالا رانده می‌شود و از ناحیهٔ با میدان مغناطیسی قوی‌تر در آن انتهای سیملوله دور می‌شود. قورباغه آن‌قدر به سمت بالا و درون میدان مغناطیسی ضعیف‌تر پیش می‌رود تا نیروی مغناطیسی رو به بالا با نیروی

گرانشی وارد بر آن متوازن شود و قورباغه در هوا معلق بماند. اگر سیملوله‌ای را به قدر کافی بزرگ بسازیم به همین طریق می‌توانیم یک انسان را به خاطر داشتن خاصیت دیامغناطیسی، در هوا معلق نگه داریم.

خودآزمایی ۳: شکل زیر، دو کرهٔ دیامغناطیسی واقع در نزدیکی قطب جنوب یک آهن‌ربای میله‌ای را نشان می‌دهد. آیا (الف) نیروهای مغناطیسی وارد بر کره‌ها و (ب) گشتاورهای دوقطبی مغناطیسی کره‌ها، به درون سوی آهن‌ربا یا به برون سوی آهن‌ربا هستند؟ (پ) آیا نیروی مغناطیسی وارد بر کرهٔ ۱ نسبت به کرهٔ ۲، بزرگ‌تر است، کوچک‌تر است، یا مساوی است؟



۳۲-۷ پارامغناطیس

در مواد پارامغناطیسی گشتاورهای دوقطبی مغناطیسی اسپینی و مداری الکترون‌ها در هر اتم یکدیگر را خنثی نمی‌کنند بلکه به صورت برداری با هم جمع می‌شوند و یک گشتاور دوقطبی مغناطیسی برایند (و دایمی) $\vec{\mu}$ به اتم می‌دهند. در نبود میدان مغناطیسی خارجی این گشتاورهای دوقطبی اتمی سمتگیری کاتوره‌ای دارند و گشتاور دوقطبی مغناطیسی برایند ماده صفر است. اما اگر نمونه‌ای از ماده را در میدان مغناطیسی خارجی $\vec{B}_{\text{ext}}$ قرار دهیم گشتاورهای دوقطبی مغناطیسی میل به ردیف شدن با میدان پیدا می‌کنند و در نتیجه، به نمونهٔ ماده یک گشتاور دوقطبی مغناطیسی برایند داده می‌شود. این ردیف شدن با میدان خارجی برخلاف آن چیزی است که در مورد مواد دیامغناطیسی مشاهده کردیم.

◄ مادهٔ پارامغناطیسی واقع در میدان مغناطیسی خارجی $\vec{B}_{\text{ext}}$ یک گشتاور دوقطبی مغناطیسی همسو با $\vec{B}_{\text{ext}}$ از خود بروز می‌دهد. اگر میدان نایکنواخت باشد مادهٔ پارامغناطیسی از ناحیهٔ با میدان ضعیف‌تر به سمت ناحیهٔ با میدان قوی‌تر جذب می‌شود.

یک نمونهٔ پارامغناطیسی شامل N اتم در صورت ردیف شدن کامل دوقطبی‌های اتمی‌اش دارای گشتاور دوقطبی مغناطیسی $N\mu$ می‌شود. اما برخوردهای کاتوره‌ای اتم‌ها بر اثر تبادل انرژی ناشی از اغتشاش گرمایی فرایند ردیف شدن آنها را به هم می‌زند و گشتاور دوقطبی مغناطیسی نمونهٔ ماده را کاهش می‌دهد.

اهمیت اغتشاش گرمایی را با مقایسهٔ دو انرژی می‌توان ارزیابی کرد. یکی از این انرژی‌ها، با توجه به معادلهٔ ۲۰-۲۴، انرژی جنبشی انتقالی متوسط یک اتم K (مساوی با $\frac{۳}{۲}kT$) در دمای T است، که در آن k ثابت بولتزمن[1] (مساوی با $۱٫۳۸ \times ۱۰^{-۲۳}$ J/K) و T برحسب کلوین (نه برحسب درجه سلسیوس) است. انرژی دیگر، با توجه به معادلهٔ ۲۹-۳۸، اختلاف انرژی ΔU_B (مساوی با $۲\mu B_{\text{ext}}$) میان ردیف شدن موازی (همسو) و ردیف شدن پادموازی (ناهمسو) گشتاور دوقطبی مغناطیسی یک اتم با میدان خارجی است. چنانکه خواهیم دید، حتی در مقادیری از دماها و میدان‌های عادی، داریم $K \gg \Delta U_B$. بنابراین، تبادل انرژی در حین برخوردهای بین اتم‌ها می‌تواند ردیف شدن گشتاورهای دوقطبی اتمی را به طور معنی‌داری برهم زند و گشتاور دوقطبی مغناطیسی نمونهٔ ماده را به مقداری خیلی کمتر از $N\mu$ برساند.

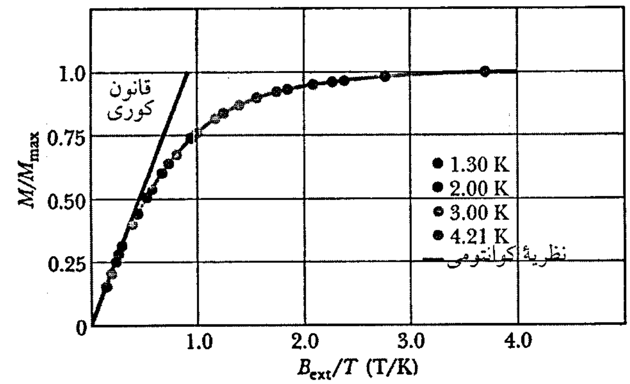

اکسیژن مایع در بین دو قطب یک آهن‌ربا معلق مانده است، زیرا این مایع پارامغناطیسی است و از نظر مغناطیسی به طرف آهن‌ربا جذب می‌شود.

میزان مغناطیسی شدن یک نمونهٔ پارامغناطیسی را می‌توان با تعیین نسبت گشتاور دوقطبی مغناطیسی به حجم نمونه V، بیان کرد. این کمیت برداری، یعنی گشتاور دوقطبی مغناطیسی یکای حجم را **مغناطش** $\vec{M}$، می‌نامند، که بزرگی‌اش برابر است با:

$$M = \frac{\text{گشتاور مغناطیسی اندازه‌گیری شده}}{V} \qquad (۱۸\text{-}۳۲)$$

1. Boltzmann

یکای $\vec{M}$، **آمپر. مترمربع بر مترمکعب**، یا **آمپر بر متر** (با نماد A/m) است. ردیف شدن کامل گشتاورهای دوقطبی اتمی، که حالت اشباع نمونهٔ ماده نامیده می‌شود، متناظر با مقدار بیشینهٔ $M_{max}=N\mu/V$ است.



شکل ۳۲ـ۹ منحنی مغناطش مربوط به سولفات پتاسیوم کروم، که یک نمک پارامغناطیسی است. در اینجا نمودار، تغییرات نسبت مغناطش M این نمک به مغناطش بیشینهٔ ممکن M_{max}، برحسب نسبت میدان مغناطیسی اعمال شدهٔ B_{ext} به دمای T رسم شده است. داده‌های سمت چپ منحنی با قانون کوری و همهٔ داده‌ها با نظریهٔ کوانتومی سازگارند. اقتباس از هِنری[1].

در سال ۱۸۹۵/۱۲۷۴ **پیرکوری**[2] به طور تجربی کشف کرد که مغناطش یک نمونهٔ پارامغناطیسی با میدان مغناطیسی خارجی $\vec{B}_{ext}$ نسبت مستقیم و با دمای T، برحسب کلوین، نسبت معکوس دارد؛ یعنی

$$M = C\frac{B_{ext}}{T} \qquad (۱۹\text{ـ}۳۲)$$

معادلهٔ ۳۲ـ۱۹ بیان کنندهٔ قانون کوری است و C را **ثابت کوری** می‌نامند. قانون کوری از این رو موجه است که افزایش یافتن B باعث ردیف شدن دوقطبی‌های اتمی در نمونهٔ ماده می‌شود و M را افزایش می‌دهد، در حالی که افزایش یافتن T این ردیف شدن را برهم می‌زند و M را کاهش می‌دهد. به هر حال، قانون کوری یک قانون تقریبی است که فقط وقتی نسبت B_{ext}/T خیلی بزرگ نباشد صدق می‌کند.

شکل ۳۲ـ۹، نسبت M/M_{max} را به صورت تابعی از B_{ext}/T برای نمونه‌ای از نمک سولفات پتاسیوم کروم نشان می‌دهد، که در آن یون‌های کروم مادهٔ پارامغناطیسی هستند. این نمودار را **منحنی مغناطش** می‌نامند. خط راست مربوط به قانون کوری با داده‌های تجربی طرف چپ منحنی و به ازای نسبت B_{ext}/T پایین‌تر از حدود ۰٫۵T/K سازگار است. منحنی‌ای که با تمام داده‌های ارائه شده سازگار باشد، مبتنی بر فیزیک کوانتومی است. به دست آوردن داده‌های طرف راست، در نزدیکی حالت اشباع بسیار مشکل است زیرا، حتی در دماهای بسیار پایین، به میدان‌های مغناطیسی خیلی قوی (در حدود ۱۰۰۰۰۰ برابر میدان مغناطیسی زمین) نیاز است.

خودآزمایی ۴: شکل زیر، دو کرهٔ پارامغناطیسی واقع در نزدیکی قطب جنوب یک آهن‌ربای میله‌ای را نشان می‌دهد. آیا (الف) نیروهای مغناطیسی وارد بر کره‌ها و (ب) گشتاورهای دوقطبی مغناطیسی کره‌ها، به درون سوی آهن‌ربا یا به برون سوی آهن‌ربا هستند؟ (پ) آیا نیروی مغناطیسی وارد بر کرهٔ ۱ نسبت به کرهٔ ۲، بزرگ‌تر است، کوچک‌تر است، یا مساوی است؟



1. W.E.Henry 2. Pierre Curie

مسألهٔ نمونهٔ ۳۲ـ۱

یک گاز پارامغناطیسی در دمای اتاق ($T=$۳۰۰K) در میدان مغناطیسی یکنواخت خارجی، به بزرگی $B=$۱٫۵T، قرار دارد؛ گشتاور دوقطبی مغناطیسی اتم‌های این گاز $\mu=$۱٫۰μ_B است. K، انرژی جنبشی انتقالی متوسط یک اتم این گاز و ΔU_B، اختلاف انرژی میان ردیف شدن موازی و ردیف شدن پادموازی گشتاور دوقطبی مغناطیسی اتم با میدان خارجی را حساب کنید.

حل: نکتهٔ کلیدی اول این است که K، انرژی جنبشی انتقالی متوسط اتم این گاز به دما بستگی دارد. با استفاده از معادلهٔ ۲۰ـ۲۴، داریم

$$K = \frac{۳}{۲}kT = \frac{۳}{۲}(۱٫۳۸\times۱۰^{-۲۳}\text{J/K})(۳۰۰\text{K}) \Rightarrow$$

$$K = ۶٫۲ \times ۱۰^{-۲۱}\text{J} = ۰٫۰۳۹\text{eV} \qquad \text{(پاسخ)}$$

نکتهٔ کلیدی دوم این است که U_B، انرژی پتانسیل دوقطبی مغناطیسی $\vec{\mu}$، در میدان مغناطیسی خارجی $\vec{B}$، به θ، زاویهٔ میان بردارهای $\vec{\mu}$ و $\vec{B}$ بستگی دارد. با استفاده از معادلهٔ ۲۹ـ۳۸ ($U_B = -\vec{\mu}.\vec{B}$) می‌توان ΔU_B، اختلاف پتانسیل میان ردیف شدن موازی ($\theta=$۰°) و ردیف شدن پادموازی ($\theta=$۱۸۰°) را به صورت زیر نوشت

$$\Delta U_B = -\mu B\cos۱۸۰° - (-\mu B\cos۰°) = ۲\mu B$$

$$\Delta U_B = ۲\mu_B B = ۲(۹٫۲۷\times۱۰^{-۲۴}\text{J/T})(۱٫۵\text{T}) \Rightarrow$$

$$\Delta U_B = ۲٫۸ \times ۱۰^{-۲۳}\text{J} = ۰٫۰۰۰۱۷\text{eV} \qquad \text{(پاسخ)}$$

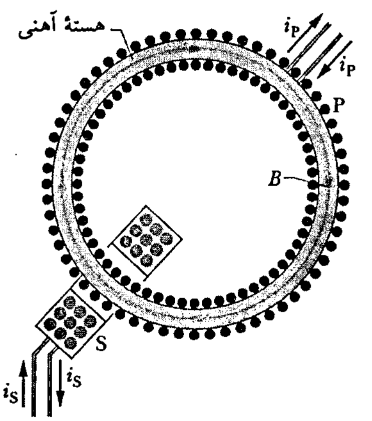
در اینجا K در حدود ۲۳۰ برابر ΔU_B است. در نتیجه، تبادل انرژی در حین برخورد اتم‌ها با یکدیگر، به راحتی می‌تواند سمتگیری گشتاورهای دوقطبی مغناطیسی را که ممکن است با میدان مغناطیسی خارجی ردیف شوند، به‌هم بزند. در این صورت، گشتاور دوقطبی مغناطیسی این گاز پارامغناطیس باید مربوط به ردیف شدن جزئی گشتاورهای دوقطبی اتمی باشد.

۳۲ـ۸ فرومغناطیس

در گفتگوهای روزانه هنگامی که سخن از خاصیت مغناطیسی به میان می‌آید، تقریباً همیشه، در ذهن خود تصویری از یک میلهٔ آهن‌ربا یا یک قرص آهن‌ربا (که احتمالاً با آن برگ یادداشتی را به دَر یخچال می‌چسبانیم) داریم. یعنی، به مادهٔ فرومغناطیسی فکر می‌کنیم، که دارای خاصیت مغناطیسی قوی و دایمی است، نه به مواد دیامغناطیسی و پارامغناطیسی، که خاصیت مغناطیسی ضعیف و موقتی دارند.

آهن، کبالت، نیکل، گادولینیوم، دیسپروزیوم و آلیاژهای حاوی این عنصرها خاصیت فرومغناطیسی از خود بروز می‌دهند. این خاصیت به خاطر یک اثر فیزیک کوانتومی به نام **جفت‌شدگی تبادلی** است، که در آن اسپین‌های الکترونی یک اتم با اسپین‌های اتم‌های مجاور برهم کنش پیدا می‌کنند. نتیجهٔ این برهم کنش، به‌رغم تمایل به کاتوره‌ای بودن برخوردهای اتمی، ردیف شدن گشتاورهای دوقطبی مغناطیسی اتم‌هاست. این پایداری در ردیف شدن چیزی است که به مواد فرومغناطیسی خاصیت مغناطیسی دایمی می‌بخشد.

اگر دمای یک مادهٔ فرومغناطیسی از یک مقدار بحرانی به نام **دمای کوری** بالاتر برود اثر جفت‌شدگی تبادلی به طور مؤثر از میان می‌رود. در این صورت، بیشتر این مواد به آسانی پارامغناطیسی می‌شوند؛ یعنی، دوقطبی‌ها باز هم میل به ردیف شدن با میدان خارجی پیدا می‌کنند، اما با شدت بسیار کمتر، و در این حالت اغتشاش گرمایی به آسانی می‌تواند این ردیف شدن را به هم بزند. دمای کوری برای آهن ۱۰۴۳K (مساوی با ۷۷۰°C) است.



شکل ۳۲ـ۱۰ تصویری از یک حلقهٔ رولند. جریان i_P به پیچهٔ اولی P داده می‌شود که هستهٔ آن یک مادهٔ فرومغناطیسی مورد مطالعه (در اینجا آهن) است و به وسیلهٔ جریان مغناطیده می‌شود. (دورهای سیم این پیچه با خال‌های سیاه نشان داده شده‌اند). میزان مغناطش هسته، میدان مغناطیسی کل $\vec{B}$ درون پیچهٔ P را معین می‌کند. میدان $\vec{B}$ را با استفاده از پیچهٔ دومی S می‌توان اندازه گرفت.

مغناطش یک مادهٔ فرومغناطیسی، مانند آهن، را می‌توان با آرایشی به نام **حلقهٔ رولند**[1] (شکل ۳۲ـ۱۰) مطالعه کرد. در اینجا مادهٔ فرومغناطیسی از یک هستهٔ چنبره‌ای باریک با سطح مقطع دایره‌ای تشکیل شده است. پیچهٔ اولی P، که n دور سیم در یکای طول دارد، به دوِر هسته پیچیده شده و حامل جریان i_P است. (این پیچه اساساً یک سیملولهٔ دراز است که به شکل دایره خم شده است). اگر هستهٔ آهنی وجود نداشته باشد، بزرگی میدان مغناطیسی درون پیچه با استفاده از معادلهٔ ۳۰ـ۲۵ به دست می‌آید:

$$B_0 = \mu_0 i_P n \qquad (۳۲\text{ـ}۲۰)$$

اما با وجود هستهٔ آهنی بزرگی میدان درون پیچهٔ $\vec{B}$، معمولاً تا حد زیادی از $\vec{B}_0$ بیشتر است. بزرگی این میدان را می‌توان به صورت زیر نوشت

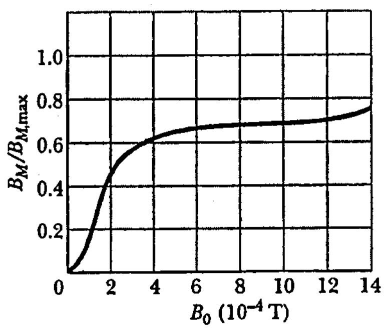
$$B = B_0 + B_M \qquad (۳۲\text{ـ}۲۱)$$

1. Rowland ring

که در آن B_M بزرگی میدان مغناطیسی مربوط به سهم هستهٔ آهنی است. این سهم از ردیف شدن گشتاورهای دوقطبی اتمی درون آهن ناشی می‌شود که حاصل جفت‌شدگی تبادلی و اثر میدان مغناطیسی اعمال شدهٔ B_0 و متناسب با مغناطش آهن M، است. یعنی، مقدار B_M با گشتاور دوقطبی مغناطیسی یکای حجم آهن نسبت مستقیم دارد. برای تعیین B_M، پیچهٔ دوم S، را برای اندازه‌گیری B به کار می‌بریم، B_0 را از معادلهٔ ۳۲-۲۰ محاسبه و سپس از معادلهٔ ۳۲-۲۱ استفاده می‌کنیم.

شکل ۳۲-۱۱، منحنی مغناطش مربوط به یک مادهٔ پارامغناطیسی درون یک حلقهٔ رولند را نشان می‌دهد. در اینجا تغییرات نسبت $B_M/B_{M,\max}$، که در آن $B_{M,\max}$ مقدار بیشینهٔ ممکن B_M و متناظر با حالت اشباع است، برحسب B_0 رسم شده است. این منحنی مانند منحنی مغناطش یک مادهٔ پارامغناطیسی در شکل ۳۲-۹ است؛ هر دو منحنی نشان می‌دهند که میدان مغناطیسی اعمال شده تا چه حد می‌تواند گشتاورهای دوقطبی اتمی یک ماده را ردیف بکند.

برای مادهٔ فرومغناطیسی به کار رفته به عنوان هسته در شکل ۳۲-۱۱، ردیف شدن گشتاورهای دوقطبی در میدان $B_0 \approx 1 \times 10^{-3}\,\mathrm{T}$ در حدود ۷۰ درصد حالت کامل است. اگر B_0 تا یک تسلا افزایش پیدا کند، ردیف شدن تقریباً کامل خواهد بود (اما تهیه کردن میدان $B_0 = 1\,\mathrm{T}$، و در نتیجه رسیدن به حالت اشباع کامل، بسیار مشکل است).



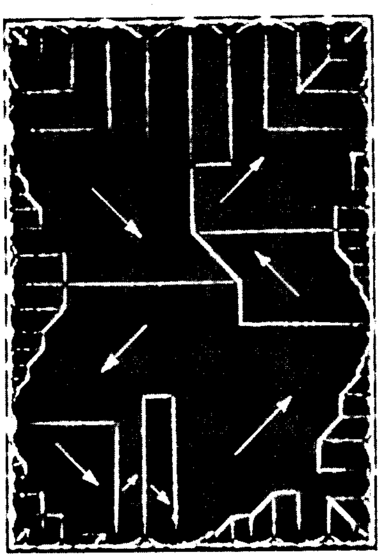
شکل ۳۲-۱۱ منحنی مغناطش مربوط به مادهٔ هستهٔ حلقهٔ رولند در شکل ۳۲-۱۰. عدد ۱٫۰ در روی محور قائم متناظر با ردیف شدن کامل (حالت اشباع) دوقطبی‌های اتمی درون ماده است.

حوزه‌های مغناطیسی

جفت‌شدگی تبادلی می‌تواند دوقطبی‌های اتمی مجاور در یک مادهٔ فرومغناطیسی در دمای زیر دمای کوری را به شدت ردیف کند. پس، چرا حتی بدون اعمال میدان مغناطیسی B_0، این ماده به طور طبیعی در حالت اشباع نیست؟ یعنی، چرا هر قطعهٔ آهن، مانند یک میخ آهنی، یک آهن‌ربای طبیعی قوی نیست؟

برای درک این موضوع، ابتدا نمونه‌ای از یک مادهٔ فرومغناطیسی، نظیر آهن، را به شکل تک بلور در نظر می‌گیریم؛ یعنی، آرایشی را در نظر می‌گیریم که اتم‌های تشکیل دهندهٔ بلور ـ شبکهٔ بلوری ـ بدون به هم خوردن نظم، در تمام حجم نمونه گسترش یافته‌اند. چنین بلوری در حالت عادی خود، از تعدادی حوزه‌های مغناطیسی تشکیل شده است. این حوزه‌ها ناحیه‌هایی هستند که در آنها اساساً ردیف شدن دوقطبی‌های اتمی کامل است. اما همهٔ حوزه‌ها ردیف شده نیستند، زیرا در کل بلور سمتگیری حوزه‌ها به گونه‌ای است که برای ظاهر شدن اثرهای مغناطیسی خارجی یکدیگر را به شدت خنثی می‌کنند.

شکل ۳۲-۱۲، تصویر بزرگ شده‌ای از مجموعه‌ای از این حوزه‌ها را در یک تک بلور نیکل نشان می‌دهد. این تصویر از پاشیدن محلول کلوییدی گرد اکسید آهن بر سطح بلور گرفته شده است. مرزهای حوزه‌ها ناحیه‌های باریکی هستند که در آنها ردیف شدن دوقطبی‌های مقدماتی از سمتگیری معینی در یک حوزه تا سمتگیری متفاوتی در حوزهٔ دیگر تغییر می‌کنند. این ناحیه‌ها جایگاه‌های میدان‌های مغناطیسی شدید، اما بسیار جایگزیده و نایکنواخت، هستند. ذرات کلوییدی معلق به طرف این مرزها که در شکل به صورت خط‌های سفید نشان داده شده‌اند، جذب می‌شوند (تمام مرزهای حوزه‌ها در شکل ۳۲-۱۲ ظاهر نشده‌اند). با آنکه دوقطبی‌های اتمی در هر کدام از حوزه‌ها ـ چنانکه پیکان‌های سفید نشان می‌دهند ـ ردیف نیستند، کل بلور ممکن است گشتاور دوقطبی مغناطیسی برایند بسیار کوچکی داشته باشد.



شکل ۳۲-۱۲ تصویری از نقش‌های حوزه‌های مغناطیسی در یک تک بلور نیکل؛ خط‌های سفید نشان دهندهٔ مرزهای میان حوزه‌ها هستند. پیکان‌های سفید ترسیم شده بر روی تصویر سمتگیری‌های دوقطبی‌های مغناطیسی درون حوزه‌ها، و در نتیجه، سمتگیری‌های دوقطبی‌های مغناطیسی برایند حوزه‌ها را نشان می‌دهند. اگر میدان مغناطیسی برایند (جمع برداری روی تمام حوزه‌ها) صفر باشد، کل بلور نامغناطیده می‌شود.

در واقع، یک قطعه آهن در حالت عادی به صورت تک بلور نیست، بلکه مجموعه‌ای است از بلورهای ریز که به طور کاتوره‌ای آرایش یافته‌اند؛ این ماده را جامد چند بلورین می‌نامند. با وجود این، هر بلور ریز آرایه‌ای از حوزه‌های با سمتگیری‌های گوناگون، درست مانند شکل ۳۲-۱۲، دارد. اگر چنین نمونه‌ای از ماده را با قرار دادن در یک میدان مغناطیسی خارجی، که شدتش به تدریج افزایش می‌یابد، مغناطیده کنیم، دو اثر بروز می‌کند؛ این دو اثر با هم، منحنی مغناطش شکل ۳۲-۱۱ را به وجود می‌آورند. یکی از دو اثر رشد کردن اندازهٔ حوزه‌های سمتگیری شده در طول میدان خارجی به زیان بقیهٔ حوزه‌هاست. اثر دیگر جابه‌جایی سمتگیری دوقطبی‌ها در درون یک حوزه، به صورت واحد، برای نزدیک‌تر شدن به راستای میدان است.

نتیجهٔ جفت‌شدگی تبادلی و جابه‌جا شدن حوزه‌ها چنین است:

◀ مادهٔ فرومغناطیسی واقع در یک میدان مغناطیسی خارجی $\vec{B}_{ext}$ یک گشتاور دوقطبی مغناطیسی قوی همسو با $\vec{B}_{ext}$ از خود بروز می‌دهد. اگر میدان نایکنواخت باشد، مادهٔ فرومغناطیسی از ناحیهٔ با میدان ضعیف‌تر به سمت میدان مغناطیسی قوی‌تر جذب می‌شود.

شما واقعاً می‌توانید صدای تولید شده از جابه‌جایی حوزه‌ها را بشنوید: یک دستگاه پخش صوت را بدون قرار دادن نوار (یا با یک نوار خام) روشن کنید و حجم صدا را به مقدار بیشینه برسانید. سپس یک آهن‌ربای قوی را به هِد دستگاه (که فرومغناطیسی است) نزدیک کنید. میدان مغناطیسی سبب می‌شود حوزه‌ها در هِد دستگاه به سرعت جابه‌جا شوند. این عمل باعث تغییر ناگهانی میدان مغناطیسی پیچهٔ پوشش هِد می‌شود. جریان‌های ناگهانی القا شده در پیچه تقویت می‌شوند و به بلندگو می‌رسند و صدایی مانند فش فش گاز تولید می‌کنند.

مسألهٔ نمونهٔ ۳۲ـ۲

عقربهٔ قطب‌نمایی که از آهن خالص (با چگالی $۷۹۰۰\text{kg/m}^۳$) ساخته شده دارای طول L برابر با $۳٫۰\text{cm}$، پهنای $۱٫۰\text{mm}$ و ضخامت $۰٫۵۰\text{mm}$ است. بزرگی گشتاور دوقطبی مغناطیسی اتم آهن $\mu_{Fe}=۲٫۱\times۱۰^{-۲۳}\text{J/T}$ است. اگر مغناطش این عقربه هم‌ارز با ردیف شدن ۱۰ درصد اتم‌های آن باشد، بزرگی گشتاور دوقطبی مغناطیسی عقربه $\vec{\mu}$، چیست؟

حل: در اینجا یک **نکتهٔ کلیدی** این است که ردیف شدن تمام N اتم عقربه به‌ازای گشتاور دوقطبی مغناطیسی $\vec{\mu}$، دارای بزرگی $N\mu_{Fe}$ است. اما چون فقط ۱۰ درصد اتم‌های عقربه ردیف شده‌اند (سمتگیری کاتوره‌ای بقیهٔ اتم‌ها هیچ سهمی در $\vec{\mu}$ ندارند). بنابراین، داریم

$$\mu = ۰٫۱۰N\mu_{Fe} \qquad (۳۲\text{ـ}۲۲)$$

نکتهٔ کلیدی دیگر این است که با استفاده از جرم عقربه می‌توان اتم‌های آن N، را به دست آورد:

$$N = \frac{\text{جرم عقربه}}{\text{جرم اتمی آهن}} \qquad (۳۲\text{ـ}۲۳)$$

در پیوست ج کتاب، جرم اتمی آهن نیامده، اما جرم مولی آن M، درج شده است. در نتیجه، می‌توان نوشت

$$\text{جرم اتمی آهن} = \frac{\text{جرم مولی آهن } M}{\text{عدد آووگادرو } N_A} \qquad (۳۲\text{ـ}۲۴)$$

بنابراین، معادلهٔ ۳۲ـ۲۳ به صورت زیر نوشته می‌شود

$$N = \frac{mN_A}{M} \qquad (۳۲\text{ـ}۲۵)$$

جرم عقربه m، برابر با حاصل‌ضرب چگالی در حجم آن است. حجم عقربه را $۱٫۵\times۱۰^{-۸}\text{m}^۳$ به دست آوردیم. در نتیجه، می‌توانیم بنویسیم

$$m\ \text{جرم عقربه} = \text{(چگالی عقربه)(حجم عقربه)}$$

$$m = (۷۹۰۰\text{kg/m}^۳)(۱٫۵\times۱۰^{-۸}\text{m}^۳) = ۱٫۱۸۵\times۱۰^{-۴}\text{kg}$$

با جانشانی این مقدار m و نیز $M=۵۵٫۸۴۷\text{g/mole}=۰٫۰۵۵۸۴۷\text{kg/mole}$ و $N_A = ۶٫۰۲\times۱۰^{۲۳}$ در معادلهٔ ۳۲ـ۲۵، خواهیم داشت

$$N = \frac{(۱٫۱۸۵\times۱۰^{-۴}\text{kg})(۶٫۰۲\times۱۰^{۲۳})}{۰٫۰۵۵۸۴۷\text{kg/mole}} = ۱٫۲۷۷۴\times۱۰^{۲۱}$$

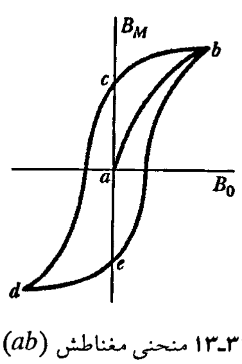
این مقدار و مقدار μ_{Fe} را در معادلهٔ ۳۲ـ۲۲ جانشانی می‌کنیم، در نتیجه، داریم

$$\mu = (۰٫۱۰)(۱٫۲۷۷۴\times۱۰^{۲۱})(۲٫۱\times۱۰^{-۲۳}\text{J/T}) \Rightarrow$$

$$\mu = ۲٫۶۸۲\times۱۰^{-۳}\text{J/T} \approx ۲٫۷\times۱۰^{-۳}\text{J/T} \quad \textbf{(پاسخ)}$$

پسماند

منحنی‌های مغناطش مواد فرومغناطیسی هنگامی که میدان مغناطیسی خارجی B_0 را افزایش و سپس کاهش می‌دهیم بر روی هم نمی‌افتند. شکل ۳۲ـ۱۳، منحنی تغییرات B_M برحسب B_0، را هنگام انجام دادن عملیات زیر با حلقهٔ رولاند نشان می‌دهد: (۱) عمل را با آهن نامغناطیده (نقطهٔ a) آغاز می‌کنیم و جریان چنبره را افزایش می‌دهیم تا B_0 (مساوی با $\mu_0 ni$) به مقدار متناظر با نقطهٔ b برسد؛ (۲) جریان سیم‌پیچ چنبره (و در نتیجه B_0) را تا صفر کاهش می‌دهیم (نقطهٔ c)؛ (۳) جریان چنبره را وارو می‌کنیم و بزرگی آن را افزایش می‌دهیم تا B_0 به مقدار متناظر با نقطهٔ d برسد؛ (۴) جریان را دوباره تا صفر کاهش می‌دهیم (نقطهٔ e)؛ (۵) بار دیگر جهت جریان را عوض می‌کنیم تا دوباره به نقطهٔ b برسیم.

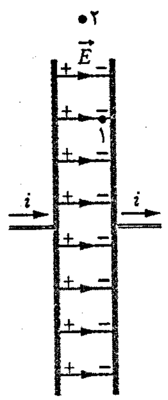


شکل ۳۲ـ۱۳ منحنی مغناطش (ab) مربوط به یک نمونهٔ فرومغناطیسی و حلقهٔ پسماندی مربوط ($bcdeb$).

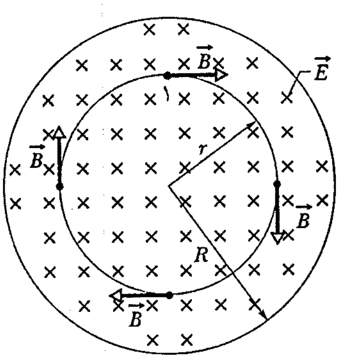
این عدم قابلیت باز ترسیم نشان داده شده در شکل ۳۲ـ۱۳ را **پسماند** و منحنی $bcdeb$ را **حلقهٔ پسماند** می‌نامند. توجه کنید که در نقطه‌های c و e با آنکه در سیم‌پیچ چنبره جریانی وجود ندارد هستهٔ آهنی مغناطیده است؛ این پدیدهٔ آشنا را خاصیت مغناطیسی دایمی می‌نامند.

پدیدهٔ پسمانی را می‌توان بر پایهٔ مفهوم حوزه‌های مغناطیسی درک کرد. واضح است که حرکت مرزهای میان حوزه‌ها و باز سمتگیری جهت حوزه‌ها کاملاً برگشت‌پذیر نیست. وقتی که میدان مغناطیسی اعمال شدهٔ B_0 افزایش و سپس به مقدار آغازی‌اش کاهش می‌یابد حوزه‌ها به پیکربندی اولی خود به طور کامل برنمی‌گردند، بلکه پس از افزایش یافتن آغازی، تا حدی حالت ردیف شدن را در «حافظه» نگه می‌دارند. حافظهٔ مواد مغناطیسی اساس کار ذخیره کردن اطلاعات به طریق مغناطیسی است. از این خاصیت در نوارهای ضبط صوت و دیسک‌های رایانه‌ای استفاده می‌شود.

این حافظهٔ ردیف شدن حوزه‌ها می‌تواند به طور طبیعی هم صورت گیرد. وقتی آذرخش جریان‌هایی را در طول مسیرهای پیچ در پیچ گوناگون به زمین می‌فرستد، این جریان‌ها میدان‌های مغناطیسی شدیدی تولید می‌کنند که می‌توانند ناگهان هر مادهٔ فرومغناطیسی در صخره‌های زمین را مغناطیده کند. این مواد صخره‌ای پس از برخورد آذرخش (پس از ناپدید شدن جریان‌ها) به خاطر پسمانی، تا اندازه‌ای این اثر مغناطیدگی را در خود نگه می‌دارند. بعداً، قطعاتی از این صخره‌ها می‌شکنند و تحت اثر آب و هوا از هم جدا و سپس به سنگ آهن‌ربا تبدیل می‌شوند.



(الف)



(ب)

شکل ۳۲-۱۴ (الف) نمودار یک خازن صفحه ـ موازی دایره‌ای، که از پهلو نشان داده شده است و با جریان ثابت i باردار می‌شود. (ب) نمایی از درون خازن، که از بالای صفحهٔ سمت راست مشاهده شده است. میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$، در درون سوی صفحهٔ شکل (به طرف صفحهٔ سمت راست خازن) است و بزرگی‌اش با افزایش یافتن بار خازن زیاد می‌شود. میدان مغناطیسی $\vec{B}$ القا شده توسط این میدان الکتریکی متغیر در چهار نقطه از دایره‌ای به شعاع r کوچکتر از R، شعاع صفحه، نشان داده شده است.

۳۲-۹ میدان‌های مغناطیسی القایی

در فصل ۳۱ دیدیم که تغییر شار مغناطیسی یک میدان الکتریکی القا می‌کند و این موضوع را با بیان کردن قانون القایش فارادی به صورت زیر

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad \text{(قانون القایش فارادی)} \qquad (۳۲-۲۶)$$

به پایان بردیم. در اینجا $\vec{E}$ میدان الکتریکی القا شده در طول یک حلقهٔ بسته توسط Φ_B، شار مغناطیسی متغیر احاطه شده با حلقه، است. چون تقارن اغلب ابزار قدرتمندی در فیزیک است، می‌توان این پرسش را مطرح کرد که آیا القایش می‌تواند در جهت مخالف صورت گیرد؛ یعنی، آیا شار الکتریکی متغیر می‌تواند یک میدان مغناطیسی القا کند؟

پاسخ این است که بله می‌تواند؛ علاوه بر این، معادلهٔ حاکم بر القایش میدان مغناطیسی تقریباً قرینهٔ معادلهٔ ۳۲-۲۶ است، که ما اغلب آن را به نام **جیمز کلرک ماکسول**، **قانون القایش ماکسول** می‌نامیم و آن را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\Phi_E}{dt} \quad \text{(قانون القایش ماکسول)} \qquad (۳۲-۲۷)$$

■

در اینجا $\vec{B}$ میدان مغناطیسی القا شده در یک حلقهٔ بسته توسط Φ_E، شار الکتریکی متغیر در ناحیهٔ احاطه شده با حلقه، است.

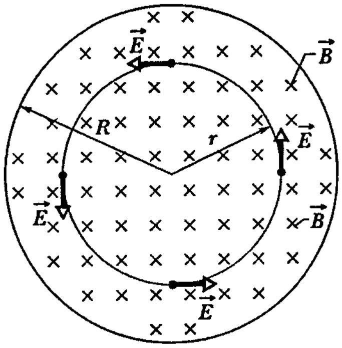
به عنوان مثالی از این نوع القایش، باردار شدن یک خازن صفحه ـ موازی با صفحه‌های دایره‌ای (شکل ۳۲-۱۴ الف) را در نظر می‌گیریم. (با آنکه توجه خود را به این آرایش خاص معطوف می‌کنیم، یک شار الکتریکی متغیر همیشه در هر جایی که باشد می‌تواند یک میدان مغناطیسی القا کند). فرض می‌کنیم که بار روی خازن با آهنگی پایا توسط جریان ثابت i در سیم‌های رابط، افزایش می‌یابد. در این صورت، بزرگی میدان الکتریکی میان صفحه‌های خازن هم باید با آهنگی پایا افزایش پیدا کند.

شکل ۳۲-۱۴ ب، نمایی از صفحهٔ سمت راست شکل ۳۲-۱۴ الف را با مشاهده از میان صفحه‌ها، نشان می‌دهد. میدان الکتریکی در درون سوی صفحهٔ شکل است. اکنون، یک حلقهٔ دایره‌ای گذرنده از نقطهٔ ۱ در شکل‌های ۳۲-۱۴ الف و ۳۲-۱۴ ب را در نظر می‌گیریم که با صفحه‌های خازن هم‌مرکز و شعاع آن از شعاع صفحه‌ها کوچکتر است. چون میدان الکتریکی گذرنده از حلقه تغییر می‌کند، شار الکتریکی مربوط به حلقه نیز باید تغییر کند. طبق معادلهٔ ۳۲-۲۷، این شار الکتریکی متغیر در پیرامون حلقه یک میدان مغناطیسی القا می‌کند.

تجربه ثابت می‌کند که میدان مغناطیسی $\vec{B}$ در پیرامون چنین حلقه‌ای به واقع القا می‌شود و جهتش مطابق شکل است. بزرگی این میدان مغناطیسی در هر نقطه از پیرامون حلقه یکسان است و از این رو نسبت به محور مرکزی صفحه‌های خازن دارای تقارن دایره‌ای است.

اکنون، اگر حلقهٔ بزرگتری را، مثلاً، حلقهٔ گذرنده از نقطهٔ ۲ واقع در بیرون صفحه‌های شکل‌های ۳۲-۱۴ الف و ۳۲-۱۴ ب، در نظر بگیریم در می‌یابیم که در این شرایط هم یک میدان مغناطیسی در پیرامون حلقه القا می‌شود. بنابراین، وقتی میدان الکتریکی تغییر می‌کند، میدان‌های مغناطیسی در میان صفحه‌های خازن، چه در درون و چه در بیرون شکاف القا می‌شوند. هرگاه تغییر کردن میدان الکتریکی متوقف شود این میدان‌های مغناطیسی القایی هم ناپدید می‌شوند.

اگرچه معادلهٔ ۳۲-۱۷ مشابه با معادلهٔ ۳۲-۲۶ است، این معادله‌ها از دو جنبه با هم تفاوت دارند. نخست آنکه، معادلهٔ ۳۲-۲۷ شامل دو نهاد اضافی $\mu_\circ$ و $\varepsilon_\circ$ است که فقط به خاطر استفاده از یکاهای SI ظاهر شده‌اند. دوم آنکه، معادلهٔ ۳۲-۲۷ علامت منفی معادلهٔ ۳۲-۲۶ را ندارد، و این بدان معناست که میدان الکتریکی القایی $\vec{E}$ و میدان مغناطیسی القایی $\vec{B}$، وقتی در وضعیت‌های مشابه تولید می‌شوند، ناهمسو هستند. برای دیدن این ناهمسویی، به شکل ۳۲-۱۵ توجه کنید که در آن میدان مغناطیسی در حال افزایش $\vec{B}$، در درون سوی صفحهٔ شکل، میدان الکتریکی $\vec{E}$ را القا می‌کند. در اینجا میدان القایی $\vec{E}$ در جهت پادساعتگرد و ناهمسو با میدان مغناطیسی القایی $\vec{B}$ در شکل ۳۲-۱۴ ب، است.



شکل ۳۲-۱۵ نمودار میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ در یک ناحیهٔ دایره‌ای. این میدان که به درون سوی صفحهٔ شکل است، از نظر بزرگی تغییر می‌کند. میدان الکتریکی القا شدهٔ $\vec{E}$ توسط میدان مغناطیسی متغیر، در چهار نقطه از یک دایرهٔ هم‌مرکز با ناحیهٔ دایره‌ای نشان داده شده است. این وضعیت را با وضعیت شکل ۳۲-۱۴ ب، مقایسه کنید.

قانون آمپر ـ ماکسول

اکنون، یادآوری می‌کنیم که طرف چپ معادلهٔ ۳۲-۲۷، یعنی انتگرال حاصل‌ضرب نقطه‌ای $\vec{B}.\vec{ds}$ در روی یک حلقهٔ بسته، در معادلهٔ دیگری ـ به نام قانون آمپر ـ ظاهر می‌شود:

$$\oint \vec{B}.\vec{ds} = \mu_\circ i_{\text{enc}} \qquad \text{(قانون آمپر)} \qquad (۳۲\text{-}۲۸)$$

در این معادله i_{enc} جریان احاطه شده توسط حلقهٔ بسته است. بنابراین، دو معادله‌ای که میدان مغناطیسی $\vec{B}$ تولید شده توسط چیزی غیر از یک مادهٔ مغناطیسی (یعنی، میدان حاصل از جریان یا تغییر میدان الکتریکی) را مشخص می‌کنند، میدان را دقیقاً به همان صورت به ما می‌دهند. ما می‌توانیم این دو معادله را به صورت یک تک معادله ترکیب کنیم:

$$\oint \vec{B}.\vec{ds} = \mu_\circ\varepsilon_\circ \frac{d\Phi_E}{dt} + \mu_\circ i_{\text{enc}} \qquad \text{(قانون آمپر ـ ماکسول)} \qquad (۳۲\text{-}۲۹)$$ ■

وقتی که جریان وجود دارد اما شار الکتریکی تغییر نمی‌کند (مانند حالت یک سیم حامل جریان ثابت) جملهٔ اول سمت راست معادلهٔ ۳۲-۲۹ صفر است. در نتیجه، معادله ۳۲-۲۹ به صورت معادلهٔ ۳۲-۲۸ یعنی قانون آمپر، ساده می‌شود. وقتی که شار الکتریکی تغییر می‌کند اما جریانی وجود ندارد (مانند درون یا بیرون شکاف یک خازن باردار شده)، جملهٔ دوم سمت راست معادلهٔ ۳۲-۲۹ صفر است. در نتیجه، معادلهٔ ۳۲-۲۹ به صورت معادلهٔ ۳۲-۲۷، یعنی قانون القایش ماکسول، ساده می‌شود.

مسألهٔ نمونهٔ ۳۲-۳

یک خازن صفحه ـ موازی دایره‌ای به شعاع R مطابق شکل ۳۲-۱۴ الف، باردار شده است.

(الف) رابطهٔ مربوط به میدان مغناطیسی را برای شعاع‌های r به ازای $r \le R$ به دست آورید.

حل: در اینجا **نکتهٔ کلیدی** این است که میدان مغناطیسی را می‌توان با یک جریان و با القایش ناشی از تغییر شار الکتریکی، تولید کرد؛ این اثرها هر دو در معادلهٔ ۳۲-۲۹ ذکر شده‌اند. در اینجا، هیچ جریانی در بین صفحه‌های خازن شکل ۳۲-۱۴ وجود ندارد، اما شار الکتریکی در حال تغییر کردن است. بنابراین، معادلهٔ ۳۲-۲۹ به صورت زیر ساده می‌شود

$$\oint \vec{B}.\vec{ds} = \mu_\circ\varepsilon_\circ \frac{d\Phi_E}{dt} \qquad (۳۲\text{-}۳۰)$$

جمله‌های طرف راست و طرف چپ این معادله را به‌طور جداگانه حساب می‌کنیم.

جملهٔ طرف چپ معادلهٔ ۳۲-۳۰: چون می‌خواهیم میدان مغناطیسی را به ازای $r \le R$، یعنی، در درون خازن حساب کنیم، یک حلقهٔ آمپری دایره‌ای به شعاع $r \le R$، مطابق شکل ۳۲-۱۴، انتخاب می‌کنیم. در تمام نقاط روی حلقه میدان مغناطیسی $\vec{B}$ و همین طور عنصر مسیر $\vec{ds}$، بر حلقه مماس است. بنابراین، $\vec{B}$ و $\vec{ds}$ در هر نقطه از حلقه موازی (همسو) یا

پادموازی (ناهمسو) هستند. به خاطر سادگی فرض می‌کنیم این بردارها موازی باشند (انتخابی که در اینجا نتیجه را تغییر نمی‌دهد). در این صورت، داریم

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \oint B\,ds\cos 0^\circ = \oint B\,ds$$

به خاطر تقارن دایره‌ای صفحه‌های خازن می‌توان فرض کرد که بزرگی $\vec{B}$ در هر نقطه از روی حلقه یکسان است. پس، در طرف چپ معادلهٔ بالا B را می‌توان از انتگرال خارج کرد. انتگرال باقی مانده $\oint ds$ است که برابر با محیط حلقه $2\pi r$، است. پس، جملهٔ طرف چپ معادلهٔ ۳۲-۳۰ برابر با $(B)(2\pi r)$ است.

جملهٔ طرف راست معادلهٔ ۳۲-۳۰: فرض می‌کنیم که $\vec{E}$، میدان الکتریکی میان صفحه‌های خازن یکنواخت و بر صفحه‌ها عمود است. پس، Φ_E، شار الکتریکی گذرنده از حلقهٔ آمپری برابر با EA است، که در آن A مساحت احاطه شده توسط حلقه در درون میدان الکتریکی است. بنابراین، جملهٔ طرف راست معادلهٔ ۳۲-۳۰ به صورت $\mu_0\varepsilon_0 d(EA)/dt$ است.

با جانشانی نتیجه‌های مربوط به طرف راست و طرف چپ معادلهٔ ۳۲-۳۰، داریم

$$(B)(2\pi r) = \mu_0\varepsilon_0\frac{d(EA)}{dt}$$

چون A ثابت است، $d(EA)$ را به صورت $A\,dE$ می‌نویسیم و داریم

$$(B)(2\pi r) = \mu_0\varepsilon_0 A\frac{dE}{dt} \qquad (۳۲\text{-}۳۱)$$

اکنون از این **نکتهٔ کلیدی** استفاده می‌کنیم: مساحت A که توسط حلقهٔ آمپری در درون میدان الکتریکی احاطه شده است، برابر با مساحت کامل حلقه، πr^2، است، چون شعاع حلقه r، کوچکتر از (یا مساوی با) شعاع صفحه R، است. با قرار دادن πr^2 به جای A در معادلهٔ ۳۲-۳۱ و حل کردن معادلهٔ حاصل نسبت به B، به ازای $r \le R$، داریم

$$B = \frac{\pi_0\varepsilon_0 r}{2}\frac{dE}{dt} \qquad \text{(پاسخ)}\ (۳۲\text{-}۳۲)$$

این معادله نشان می‌دهد که در درون خازن با زیاد شدن فاصلهٔ شعاعی r از صفر در مرکز صفحه‌ها تا مقدار بیشینه در لبهٔ صفحه‌ها $(r=R)$، مقدار B به‌طور خطی افزایش می‌یابد.

(ب) بزرگی میدان B را به ازای $r = R/5 = 11.0\ \text{mm}$ و $dE/dt = 1.50 \times 10^{12}\ \text{V/m.s}$ حساب کنید.

حل: با استفاده از پاسخ قسمت (الف)، داریم

$$B = \frac{1}{2}\mu_0\varepsilon_0 r\frac{dE}{dt}$$

$$B = \frac{1}{2}(4\pi \times 10^{-7}\ \text{T.m/A})(8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N.m}^2)$$
$$\times (11.0 \times 10^{-3}\ \text{m})(1.50 \times 10^{12}\ \text{V/m.s}) \Rightarrow$$
$$B = 9.18 \times 10^{-8}\ \text{T} \qquad \text{(پاسخ)}$$

(پ) رابطهٔ مربوط به میدان مغناطیسی القایی را به ازای $r \ge R$ به دست آورید.

حل: روش محاسبه مانند قسمت (الف) است، با این تفاوت که اکنون برای براورد کردن B در بیرون خازن از یک حلقهٔ آمپری به شعاع r، بزرگتر از شعاع صفحه R، استفاده می‌کنیم. از محاسبهٔ جمله‌های طرف چپ و طرف راست معادلهٔ ۳۲-۳۰ باز هم به معادلهٔ ۳۲-۳۱ می‌رسیم. اما حالا به **نکتهٔ کلیدی** ماهرانهٔ زیر نیازمندیم: میدان الکتریکی فقط در بین صفحه‌ها وجود دارد، نه در بیرون آنها. بنابراین، مساحت احاطه شدهٔ A توسط حلقهٔ آمپری در میدان الکتریکی برابر با مساحت کامل حلقه، πr^2، نیست، بلکه، A فقط برابر با مساحت صفحه πR^2، است.

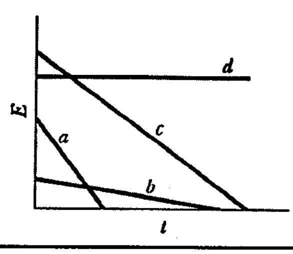
با قرار دادن πR^2 به جای A در معادلهٔ ۳۲-۳۱ و حل کردن معادلهٔ حاصل نسبت به B، به ازای $r \ge R$، داریم

$$B = \frac{\mu_0\varepsilon_0 R^2}{2r}\frac{dE}{dt} \qquad \text{(پاسخ)}\ (۳۲\text{-}۳۳)$$

این معادله نشان می‌دهد که در بیرون خازن میدان B با زیاد شدن فاصلهٔ شعاعی r از یک مقدار بیشینه در لبه‌های صفحه (که در آنجا $r=R$)، کاهش می‌یابد. با قرار دادن $r=R$ در معادله‌های ۳۲-۳۲ و ۳۲-۳۳، می‌توان نشان داد که این معادله‌ها با هم سازگارند؛ یعنی، برای میدان B در لبه‌های صفحه‌ها مقدار بیشینهٔ یکسانی را به دست می‌دهند.

بزرگی میدان مغناطیسی القایی حساب شده در قسمت (ب) آن قدر کوچک است که آن را با یک اسباب ساده به سختی می‌توان اندازه گرفت. این مقدار با بزرگی میدان‌های الکتریکی القایی (قانون فارادی)، که به آسانی می‌تواند اندازه‌گیری شود تفاوت فاحش دارد. این تفاوت تجربی تا اندازه‌ای ناشی از این واقعیت است که نیروهای محرک الکتریکی القایی را می‌توان به راحتی با استفاده از یک پیچهٔ با دورهای زیاد افزایش داد. اما هیچ روش قابل مقایسه و ساده‌ای برای چند برابر کردن میدان‌های مغناطیسی القایی وجود ندارد. آزمایش مربوط به این مسألهٔ نمونه در هر دو حالت انجام شده و وجود میدان‌های مغناطیسی القایی از لحاظ کمّی بررسی شده است.

خودآزمایی ۵: شکل زیر، نمودارهای بزرگی میدان الکتریکی E برحسب زمان t را برای چهار میدان الکتریکی یکنواخت، که محدود به درون ناحیه‌های دایره‌ای یکسان، مطابق شکل ۳۲-۱۴ ب، هستند نشان می‌دهد. این میدان‌ها را با توجه به بزرگی میدان‌های مغناطیسی که در لبهٔ ناحیه القا می‌کنند، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



۱۰ـ۳۲ جریان جابه‌جایی

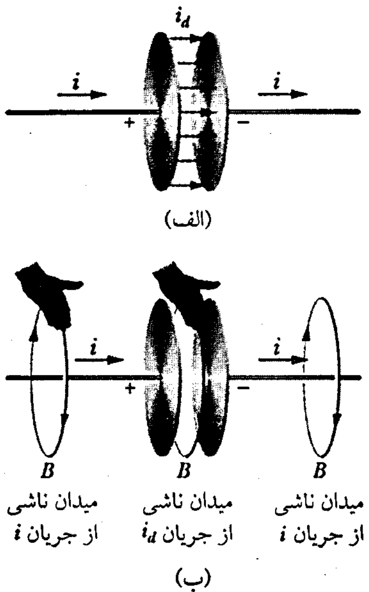
اگر دو جملهٔ طرف راست معادلهٔ ۳۲ـ۲۹ را با هم مقایسه کنیم در می‌یابیم که حاصل‌ضرب $\varepsilon_\circ(d\Phi_E/dt)$ باید دارای ابعاد جریان باشد. در واقع، این حاصل‌ضرب یک جریان خیالی به نام **جریان جابه‌جایی** i_d، است:

$$i_d = \varepsilon_\circ \frac{d\Phi_E}{dt} \quad \text{(جریان جابه‌جایی)} \qquad (۳۴\text{ـ}۳۲)$$

در اینجا واژه «جابه‌جایی» انتخاب نامناسبی است زیرا چیزی جابه‌جا نمی‌شود، بلکه ما این واژه را به خاطر جور بودن انتخاب کرده‌ایم. به هر حال، معادلهٔ ۳۲ـ۲۹ را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_\circ i_{d,\text{enc}} + \mu_\circ i_{\text{enc}} \quad \text{(قانون آمپر ـ ماکسول)} \qquad (۳۵\text{ـ}۳۲)$$

در اینجا $i_{d,\text{enc}}$ جریان جابه‌جایی است که توسط حلقهٔ انتگرال‌گیری احاطه شده است.



شکل ۳۲ـ۱۶ (الف) نمودار جریان جابه‌جایی i_d در میان صفحه‌های خازنی که با جریان i باردار می‌شود. (ب) کاربرد قاعدهٔ دست راست برای پیدا کردن جهت میدان مغناطیسی در پیرامون سیمی حامل جریان واقعی (مانند طرف چپ)، که همان جهت میدان مغناطیسی مربوط به جریان جابه‌جایی (مانند شکل وسط) را به دست می‌دهد.

اکنون، بار دیگر به خازن صفحه ـ موازی دایره‌ای در حال باردار شدن، مطابق شکل ۳۲ـ۱۶ الف، توجه می‌کنیم. جریان واقعی i که صفحه‌های خازن را باردار می‌کند، میدان الکتریکی میان صفحه‌ها $\vec{E}$، را تغییر می‌دهد. جریان جابه‌جایی خیالی میان صفحه‌ها i_d، به این تغییر میدان $\vec{E}$ وابسته است. اکنون ارتباط میان این دو جریان را پیدا می‌کنیم.

با الکتریکی روی صفحه‌ها q، طبق معادلهٔ ۲۶ـ۴، در هر لحظه به بزرگی میدان میان صفحه‌ها E، بستگی دارد:

$$q = \varepsilon_\circ AE \qquad (۳۶\text{ـ}۳۲)$$

که در آن A مساحت صفحه است. برای به دست آوردن جریان واقعی i، از معادلهٔ ۳۲ـ۳۶ نسبت به زمان مشتق می‌گیریم:

$$\frac{dq}{dt} = i = \varepsilon_\circ A\frac{dE}{dt} \qquad (۳۷\text{ـ}۳۲)$$

برای تعیین جریان جابه‌جایی i_d می‌توان از معادلهٔ ۳۲ـ۳۴ استفاده کرد. با این فرض که میدان الکتریکی میان دو صفحه $\vec{E}$، یکنواخت است (از فریز شدن میدان چشم‌پوشی می‌کنیم)، می‌توان در آن معادله به جای شار الکتریکی Φ_E، کمیت EA را قرار داد. در نتیجه، معادلهٔ ۳۲ـ۳۴ به صورت زیر در می‌آید

$$i_d = \varepsilon_\circ \frac{d\Phi_E}{dt} = \varepsilon_\circ \frac{d(EA)}{dt} = \varepsilon_\circ A\frac{dE}{dt} \qquad (۳۸\text{ـ}۳۲)$$

مقایسهٔ معادله‌های ۳۲ـ۳۷ و ۳۲ـ۳۸ نشان می‌دهد که i، جریان واقعی باردار کنندهٔ خازن و i_d، جریان جابه‌جایی خیالی میان صفحه‌ها، دارای بزرگی یکسان‌اند:

$$i_d = i \quad \text{(جریان جابه‌جایی در خازن)} \qquad (۳۹\text{ـ}۳۲)$$

بنابراین، جریان جابه‌جایی خیالی i_d را می‌توان به سادگی پیوستاری از جریان واقعی i از طریق شکاف خازن، از یک صفحه به صفحهٔ دیگر، در نظر گرفت. چون میدان الکتریکی در سرتاسر صفحه‌ها به طور یکنواخت توزیع شده است، در مورد جریان جابه‌جایی خیالی i_d نیز همین امر صادق است، چنانکه پیکان‌های جریان در شکل ۳۲ـ۱۶ الف این موضوع را نشان می‌دهند. اگرچه هیچ بار الکتریکی‌ای به واقع در شکاف میان صفحه‌های خازن حرکت نمی‌کند، ایدهٔ جریان خیالی i_d می‌تواند برای پیدا کردن سریع جهت و بزرگی یک میدان مغناطیسی القایی، چنانکه خواهیم دید، به ما کمک کند.

تعیین میدان مغناطیسی القایی

در فصل ۳۰ جهت میدان مغناطیسی حاصل از جریان واقعی i را با استفاده از قاعدهٔ دست راست شکل ۳۰ـ۴ معین کردیم. برای پیدا کردن جهت میدان مغناطیسی القایی حاصل از جریان جابه‌جایی خیالی i_d، به گونه‌ای که در وسط شکل ۳۲ـ۱۶ ب برای یک خازن نشان داده شده است، نیز می‌توان همین قاعده را به کار برد.

در ضمن، از i_d می‌توان برای پیدا کردن بزرگی میدان مغناطیسی القا شده توسط یک خازن صفحه ـ موازی دایره‌ای به شعاع R در حال باردار شدن هم استفاده کرد. فضای میان این صفحه‌ها را به صورت یک سیم با مقطع دایره‌ای تصوری به شعاع R که حامل جریان جابه‌جایی تصوری i_d است، در نظر می‌گیریم. بنابراین، با

توجه به معادلهٔ ۳۰-۲۲، بزرگی میدان مغناطیسی در نقطه‌ای از درون خازن به فاصلهٔ r از مرکز خازن برابر است با:

$$B = \left(\frac{\mu_0 i_d}{2\pi R^2}\right) r \qquad \text{(درون یک خازن دایره‌ای)} \qquad (۳۲\text{-}۴۰) \quad \blacksquare$$

به همین ترتیب، با توجه به معادلهٔ ۳۰-۱۹، بزرگی میدان مغناطیسی در نقطه‌ای از بیرون خازن واقع در فاصلهٔ r از مرکز برابر است با:

$$B = \frac{\mu_0 i_d}{2\pi r} \qquad \text{(بیرون یک خازن دایره‌ای)} \qquad (۳۲\text{-}۴۱) \quad \blacksquare$$

مسألهٔ نمونهٔ ۳۲-۴

خازن صفحه ـ موازی دایره‌ای مسألهٔ نمونهٔ ۳۲-۳ با جریان i باردار شده است.

(الف) بزرگی کمیت $\oint \vec{B}\cdot d\vec{s}$ برحسب μ_0 و i، در نقطه‌ای واقع در میان صفحه‌های خازن و به فاصلهٔ $r=R/5$ از مرکز چیست؟

حل: نکتهٔ کلیدی اول این است که راه حل مسألهٔ نمونهٔ ۳۲-۳ الف در اینجا نیز صادق است. اما در اینجا به جای حاصل‌ضرب $\varepsilon_0 d\Phi_E/dt$ می‌توان در معادلهٔ ۳۲-۲۹ جریان خیالی i_d را قرار داد. در این صورت، انتگرال $\oint \vec{B}\cdot d\vec{s}$ از معادلهٔ ۳۲-۳۵ به دست می‌آید، اما چون هیچ جریان واقعی i در میان صفحه‌های خازن وجود ندارد، آن معادله به صورت زیر در می‌آید

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{d,\text{enc}} \qquad (۳۲\text{-}۴۲)$$

چون می‌خواهیم کمیت $\oint \vec{B}\cdot d\vec{s}$ را در نقطه‌ای به فاصلهٔ $r=R/5$ (درون خازن) حساب کنیم، حلقهٔ انتگرال‌گیری فقط بخش $i_{d,\text{enc}}$ از جریان جابه‌جایی کل i_d را احاطه می‌کند. **نکتهٔ کلیدی** دوم این است که فرض کنیم i_d در تمام مساحت صفحه به طور یکنواخت توزیع شده است. در نتیجه، بخشی از جریان جابه‌جایی احاطه شده توسط حلقه با مساحت احاطه شده توسط حلقه، متناسب است:

$$\frac{\text{(جریان جابه‌جایی احاطه شده، } i_{d,\text{enc}})}{\text{(جریان جابه‌جایی کل، } i_d)} = \frac{\text{مساحت احاطه شده، } \pi r^2}{\text{مساحت کامل صفحه، } \pi R^2}$$

با استفاده از این رابطه، داریم

$$i_{d,\text{enc}} = i_d \frac{\pi r^2}{\pi R^2}$$

با جانشانی این مقدار در معادلهٔ ۳۲-۴۲، خواهیم داشت

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 i_d \frac{\pi r^2}{\pi R^2}$$

اکنون، $i_d=i$ (از معادلهٔ ۳۲-۳۹) و $r=R/5$ را در معادلهٔ ۳۲-۴۳ قرار می‌دهیم. در نتیجه، داریم

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 i \frac{(R/5)^2}{R^2} = \frac{\mu_0 i}{25} \qquad \text{(پاسخ)}$$

(ب) بزرگی میدان مغناطیسی القا شده در فاصلهٔ $r=R/5$، درون خازن، برحسب میدان مغناطیسی القایی بیشینه چقدر است؟

حل: در اینجا **نکتهٔ کلیدی** این است که چون خازن دارای صفحه‌های موازی دایره‌ای است، فضای میان صفحه‌ها را می‌توان به صورت سیمی به شعاع مقطع R که حامل جریان تصوری i_d است، در نظر گرفت. در این صورت، برای پیدا کردن بزرگی میدان مغناطیسی القایی B در هر نقطه از درون خازن می‌توان معادلهٔ ۳۲-۴۰ را به کار برد. به ازای $r=R/5$، داریم

$$B = \left(\frac{\mu_0 i_d}{2\pi R^2}\right) r = \frac{\mu_0 i_d (R/5)}{2\pi R^2} = \frac{\mu_0 i_d}{10\pi R} \qquad (۳۲\text{-}۴۴)$$

بزرگی میدان بیشینه در درون خازن B_{max}، به ازای $r=R$ به دست می‌آید که برابر است با:

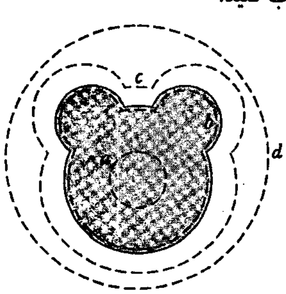
$$B_{\text{max}} = \left(\frac{\mu_0 i_d}{2\pi R^2}\right) R = \frac{\mu_0 i_d}{2\pi R} \qquad (۳۲\text{-}۴۵)$$

از تقسیم کردن معادلهٔ ۳۲-۴۴ به معادلهٔ ۳۲-۴۵ و بازآرایی نتیجهٔ حاصل، داریم

$$B = \frac{B_{\text{max}}}{5} \qquad \text{(پاسخ)}$$

ما باید بتوانیم همین نتیجه را با استدلالی اندک و زحمت کمتر به دست آوریم. معادلهٔ ۳۲-۴۰ نشان می‌دهد که در درون خازن، میدان B برحسب r به‌طور خطی افزایش می‌یابد. بنابراین، نقطه‌ای که فاصلهٔ آن $\frac{1}{5}$ شعاع صفحه R، است و در این شعاع B_{max} ظاهر می‌شود، باید دارای میدان مغناطیسی $B=\frac{1}{5}B_{\text{max}}$ باشد.

خودآزمایی ۶: شکل زیر، نمایی از درون یک خازن صفحه ـ موازی را نشان می‌دهد. خط‌چین‌ها چهار مسیر انتگرال‌گیری (مسیر b روی لبهٔ صفحه است) را نشان می‌دهد. این مسیرها را با توجه به بزرگی انتگرال $\oint \vec{B}\cdot d\vec{s}$ در طول مسیرها در حین بی‌بار شدن خازن، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



۳۲-۱۱ معادله‌های ماکسول

معادلهٔ ۳۲-۲۹ آخرین معادله از چهار معادلهٔ بنیادی الکترومغناطیس، به نام **معادله‌های ماکسول** است، که در جدول ۳۲-۱ درج شده‌اند. این چهار معادله گسترهٔ وسیعی از پدیده‌ها را، از اینکه چرا عقربهٔ قطب‌نما به سمت شمال می‌ایستد تا اینکه چرا با چرخاندن سویچ، موتور اتومبیل روشن می‌شود، توضیح می‌دهد. این معادله‌ها اساس کار وسایل الکترومغناطیسی، مانند موتورهای الکتریکی، سیکلوترون‌ها، فرستنده‌ها و گیرنده‌های تلویزیونی، تلفن‌ها، ماشین‌های نمابر، رادار، و اجاق‌های میکروموج، هستند.

براساس معادله‌های ماکسول، می‌توان بسیاری از معادله‌های فصل ۲۲ به بعد را که با آنها آشنا شده‌ایم، استنتاج کرد. در ضمن، معادله‌های ماکسول اساس تعداد زیادی از معادله‌های فصل‌های ۳۴ تا ۳۷ را هم که در اپتیک آنها را خواهیم دید، تشکیل می‌دهند.

جدول ۳۲-۱ معادله‌های ماکسول*

نام	معادله	توضیح
قانون گاؤس در الکتریسیته	$\oint \vec{E}.d\vec{A} = q_{enc}/\varepsilon_0$	شار الکتریکی خالص را به بار الکتریکی محصور شده ربط می‌دهد
قانون گاؤس در مغناطیس	$\oint \vec{B}.d\vec{A} = 0$	شار مغناطیسی خالص را به بار مغناطیسی محصور شده ربط می‌دهد
قانون فارادی	$\oint \vec{E}.d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$	میدان الکتریکی القایی را به شار مغناطیسی متغیر ربط می‌دهد
قانون آمپر ـ ماکسول	$\oint \vec{B}.d\vec{s} = \mu_0\varepsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt} + \mu_0 i_{enc}$	میدان مغناطیسی القایی را به شار الکتریکی متغیر و جریان ربط می‌دهد

* معادله‌ها با این فرض نوشته شده‌اند که هیچ مادهٔ دی الکتریک یا مادهٔ مغناطیسی وجود ندارد.

مرور و خلاصهٔ مطالب فصل

قانون گاؤس دربارهٔ میدان‌های مغناطیسی ساده‌ترین ساختارهای مغناطیسی، دوقطبی‌های مغناطیسی‌اند. تک قطبی مغناطیسی وجود ندارد (تا جایی که می‌دانیم). بنا به **قانون گاؤس** دربارهٔ میدان‌های مغناطیسی، یعنی

$$\Phi_B = \oint \vec{B}.d\vec{A} = 0 \qquad (۳۲\text{-}۱)$$

شار مغناطیسی گذرنده از هر سطح گاؤسی (بسته) صفر است. این موضوع ایجاب می‌کند که تک قطبی‌های مغناطیسی وجود نداشته باشند.

میدان مغناطیسی زمین میدان مغناطیسی زمین را به تقریب می‌توان مانند میدان یک دوقطبی مغناطیسی در نظر گرفت که گشتاور دوقطبی آن با محور دوران زمین زاویهٔ ۱۱٫۵ درجه می‌سازد و قطب جنوب این دوقطبی در نیمکرهٔ شمالی زمین واقع است. جهت میدان مغناطیسی محلی در هر نقطه از سطح زمین، با زاویهٔ انحراف (زاویهٔ چپ یا راست نسبت به شمال جغرافیایی) و زاویهٔ میل (زاویهٔ بالا یا پایین نسبت به افق) معین می‌شود.

گشتاور دوقطبی مغناطیسی اسپینی الکترون دارای تکانهٔ زاویه‌ای ذاتی به نام تکانهٔ زاویه‌ای اسپینی (یا اسپین) $\vec{S}$ است که به آن یک گشتاور دوقطبی مغناطیسی اسپینی ذاتی $\vec{\mu}_s$، وابسته است:

$$\vec{\mu}_s = -\frac{e}{m}\vec{S} \qquad (۳۲\text{-}۲)$$

اسپین $\vec{S}$ خودش نمی‌تواند اندازه‌گیری شود، اما هر مؤلفه‌ای از آن را می‌توان اندازه‌گیری کرد. با این فرض که اندازه‌گیری در راستای محور z یک دستگاه مختصات صورت می‌گیرد، مؤلفهٔ S_z فقط می‌تواند دو مقدار داشته باشد:

$$S_z = m_s\frac{h}{2\pi} \qquad \text{به ازای } m_s = \pm\frac{1}{2} \qquad (۳۲\text{-}۳)$$

که در آن h (مساوی با $6{,}63\times10^{-34}$ J.s) ثابت پلانک است. به همین ترتیب، خود گشتاور دوقطبی مغناطیسی اسپینی الکترون $\vec{\mu}_s$، را هم نمی‌توان اندازه گرفت، اما مؤلفهٔ آن را می‌توان اندازه‌گیری کرد. این مؤلفه در راستای محور z برابر است با:

$$\mu_{s,z} = \pm\frac{eh}{4\pi m} = \pm\mu_B \qquad (۳۲\text{-}۴،\ ۳۲\text{-}۶)$$

که در آن μ_B مگنتون بور است:

$$\mu_B = \frac{eh}{4\pi m} = 9{,}27\times10^{-24}\,\text{J/T} \qquad (۳۲\text{-}۵)$$

انرژی پتانسیل U، وابسته به سمتگیری گشتاور دوقطبی مغناطیسی اسپینی در میدان مغناطیسی خارجی $\vec{B}_{ext}$، برابر است با:

$$U = -\vec{\mu}_s\cdot\vec{B}_{ext} = -\mu_{s,z}B \qquad (۳۲\text{-}۷)$$

گشتاور دوقطبی مغناطیسی مداری الکترون در اتم دارای یک تکانهٔ

زاویه‌ای دیگر به نام تکانهٔ زاویه‌ای مداری $\vec{L}_{orb}$، است، که به آن یک گشتاور دوقطبی مغناطیسی مداری $\vec{\mu}_{orb}$ وابسته است:

$$\vec{\mu}_{orb} = -\frac{e}{2m}\vec{L}_{orb} \qquad (۳۲\text{-}۸)$$

تکانهٔ زاویه‌ای مداری کوانتیده است و فقط می‌تواند مقادیر زیر را داشته باشد

$$L_{orb,z} = m_l \frac{h}{2\pi} \qquad m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \text{(حد)} \quad \text{به‌ازای} \qquad (۳۲\text{-}۹)$$

بنابراین، بزرگی تکانهٔ زاویه‌ای مداری برابر است با:

$$\mu_{orb,z} = -m_l \frac{eh}{4\pi m} = -m_l \mu_B \qquad (۳۲\text{-}۱۰ \text{، } ۳۲\text{-}۱۱)$$

انرژی پتانسیل U، وابسته به سمتگیری گشتاور دوقطبی مغناطیسی مداری در میدان خارجی $\vec{B}_{ext}$، برابر است با:

$$U = -\vec{\mu}_{orb} \cdot \vec{B}_{ext} = -\mu_{orb,z} B_{ext} \qquad (۳۲\text{-}۱۲)$$

دیامغناطیس مواد دیامغناطیسی خاصیت مغناطیسی از خود بروز نمی‌دهند مگر آنکه در یک میدان مغناطیسی خارجی $\vec{B}_{ext}$ قرار گرفته باشند. در این صورت، یک گشتاور دوقطبی مغناطیسی ناهمسو با $\vec{B}_{ext}$ ایجاد می‌کنند. اگر میدان نایکنواخت باشد، مادهٔ دیامغناطیسی از ناحیه‌های با میدان مغناطیسی قوی‌تر دفع می‌شود این خاصیت را دیامغناطیس می‌نامند.

پارامغناطیس در یک مادهٔ پارامغناطیسی، هر اتم دارای گشتاور دوقطبی مغناطیسی دایمی $\vec{\mu}$ است، اما سمتگیری این گشتاورهای دوقطبی کاتوره‌ای است و ماده به طور کلی فاقد میدان مغناطیسی است. اما میدان مغناطیسی خارجی $\vec{B}_{ext}$ می‌تواند گشتاورهای دوقطبی اتمی را به طور جزئی ردیف کند و یک گشتاور دوقطبی مغناطیسی برایند همسو با $\vec{B}_{ext}$ به ماده بدهد. اگر $\vec{B}_{ext}$ نایکنواخت باشد، ماده به طرف ناحیه‌های با میدان مغناطیسی قوی‌تر جذب می‌شود. این خاصیت‌ها را پارامغناطیس می‌نامند.

ردیف شدن گشتاورهای دوقطبی اتمی با افزایش یافتن $\vec{B}_{ext}$ افزایش و با زیاد شدن دمای T کاهش می‌یابد. میزان مغناطیده شدن نمونه‌ای از ماده به حجم V از مغناطش $\vec{M}$ معین می‌شود، که بزرگی‌اش برابر است با:

$$M = \frac{\text{گشتاور مغناطیسی اندازه‌گیری شده}}{V} \qquad (۳۲\text{-}۱۸)$$

ردیف شدن کامل تمام N دوقطبی مغناطیسی اتمی در یک نمونه، که حالت اشباع نمونه نامیده می‌شود، متناظر با مقدار مغناطش بیشینهٔ $M_{max}=N\mu/V$، است. به ازای مقادیر کم نسبت B_{ext}/T، به طور تقریبی می‌توان نوشت

$$M = C\frac{B_{ext}}{T} \qquad \text{(قانون کوری)} \qquad (۳۲\text{-}۱۹)$$

که در آن C را ثابت کوری می‌نامند.

فرومغناطیس در نبود میدان مغناطیسی خارجی گشتاورهای دوقطبی مغناطیسی برخی الکترون‌های یک مادهٔ فرومغناطیسی، به خاطر یک برهم‌کنش فیزیک کوانتومی به نام جفت شدگی تبادلی، ردیف می‌شوند و در ماده ناحیه‌هایی (حوزه‌هایی) با گشتاورهای دوقطبی مغناطیسی قوی به وجود می‌آورند. میدان خارجی $\vec{B}_{ext}$ می‌تواند گشتاورهای دوقطبی مغناطیسی این ناحیه‌ها را ردیف کند و یک گشتاور دوقطبی مغناطیسی برایند قوی همسو با $\vec{B}_{ext}$ برای کل ماده تولید کند. این گشتاور دوقطبی مغناطیسی برایند پس از حذف شدن میدان $\vec{B}_{ext}$ می‌تواند تا حدی باقی بماند. اگر $\vec{B}_{ext}$ نایکنواخت باشد، مادهٔ فرومغناطیسی به سمت ناحیه‌های با میدان مغناطیسی قوی‌تر جذب می‌شود. این خاصیت‌ها را فرومغناطیس می‌نامند. اگر دمای نمونه از دمای کوری تجاوز کند، جفت شدگی تبادلی از میان می‌رود و نمونه فقط خاصیت پارامغناطیسی پیدا می‌کند.

بسط ماکسولی قانون آمپر شار الکتریکی متغیر میدان مغناطیسی $\vec{B}$ القا می‌کند. معادلهٔ بیان کنندهٔ قانون ماکسول:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \qquad \text{(قانون القایش ماکسول)} \quad (۳۲\text{-}۲۷)$$

میدان مغناطیسی القا شده در طول یک حلقهٔ بسته را به شار الکتریکی متغیر Φ_E گذرنده از آن حلقه، ربط می‌دهد. قانون آمپر، یعنی $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{enc}$ (معادلهٔ ۳۲-۲۸)، میدان مغناطیسی ناشی از جریان احاطه شدهٔ i_{enc}، توسط یک حلقهٔ بسته را به دست می‌دهد. قانون ماکسول و قانون آمپر را می‌توان به صورت یک تک معادله نوشت:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} + \mu_0 i_{enc} \qquad \text{(قانون آمپر ـ ماکسول)} \quad (۳۲\text{-}۲۹)$$

جریان جابه‌جایی جریان جابه‌جایی خیالی ناشی از میدان الکتریکی متغیر چنین تعریف می‌شود

$$i_d = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \qquad (۳۲\text{-}۳۴)$$

در این صورت، معادلهٔ ۳۲-۲۹ به صورت زیر در می‌آید

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{d,enc} + \mu_0 i_{enc} \qquad \text{(قانون آمپر ـ ماکسول)} \quad (۳۲\text{-}۳۵)$$

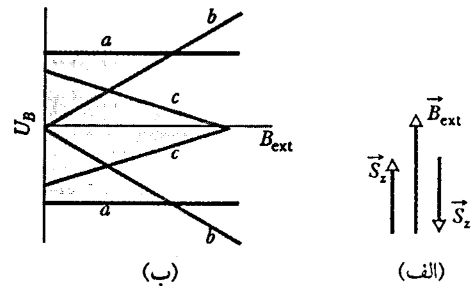
که در آن $i_{d,enc}$ جریان جابه‌جایی احاطه شده توسط حلقهٔ انتگرال‌گیری است. ایدهٔ جریان جابه‌جایی به ما اجازه می‌دهد که تصور پیوستگی جریان گذرنده از یک خازن را حفظ کنیم. اما جریان جابه‌جایی به معنای انتقال بار الکتریکی نیست.

معادله‌های ماکسول معادله‌های ماکسول، که در جدول ۳۲-۱ درج شده‌اند، نشان‌دهندهٔ چکیدهٔ دانش الکترومغناطیس هستند و اساس آن‌را تشکیل می‌دهند.

پرسش‌ها

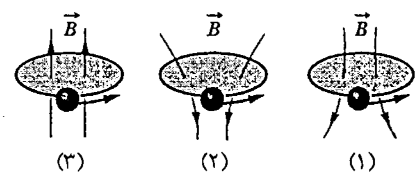
۱. تکانهٔ زاویه‌ای اسپینی یک الکترون S_z، در میدان مغناطیسی خارجی $\vec{B}_{ext}$، با $\vec{B}_{ext}$ پادموازی (ناهمسو) است. اگر این الکترون تحت اثر یک تلنگر اسپینی قرار گیرد، به گونه‌ای که S_z با $\vec{B}_{ext}$ موازی (همسو) شود، آیا باید انرژی به الکترون داد یا از آن گرفت؟

۲. شکل ۳۲ـ۱۷ الف، یک جفت سمتگیری اسپینی مخالف مربوط به یک الکترون در میدان مغناطیسی خارجی $\vec{B}_{ext}$ را نشان می‌دهد. شکل ۳۲ـ۱۷ ب، نشان دهندهٔ سه گزینهٔ مربوط به نمودار انرژی پتانسیل وابسته به این سمتگیری‌ها به صورت تابعی از بزرگی $\vec{B}_{ext}$ است. گزینه‌های b و c شامل خطهای متقاطع و گزینهٔ a شامل خطهای موازی هستند. کدام گزینه درست است؟



شکل ۳۲ـ۱۷ پرسش ۲.

۳. شکل ۳۲ـ۱۸، سه مدل حلقه‌ای مربوط به یک الکترون در حال گردش پادساعتگرد در یک میدان مغناطیسی را نشان می‌دهد. این میدان‌ها برای مدل‌های ۱ و ۲ نایکنواخت و برای مدل ۳ یکنواخت هستند. در هر یک از مدل‌ها، آیا (الف) گشتاور دوقطبی مغناطیسی حلقه، و (ب) نیروی مغناطیسی وارد بر حلقه، به سمت بالاست، به سمت پایین است، یا صفر است؟



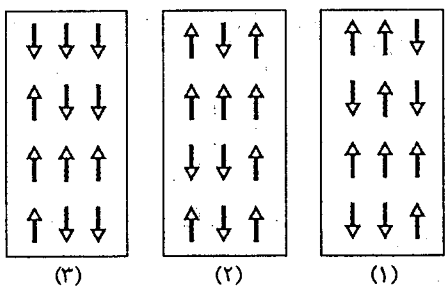
شکل ۳۲ـ۱۸ پرسش‌های ۳، ۵ و ۶.

۴. در شکل‌های ۳۲ـ۸ الف و ۳۲ـ۸ ب، اگر (الف) بزرگی $\vec{B}_{ext}$ و (ب) واگرایی $\vec{B}_{ext}$، افزایش یابد، آیا بزرگی نیروی وارد بر حلقه افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد، یا ثابت می‌ماند؟

۵. حلقه‌های جریان مربوط به پرسش ۳ و شکل ۳۲ـ۱۸ را با کره‌های دیامغناطیسی جانشین کنید. به ازای هر میدان، آیا (الف) گشتاور دوقطبی مغناطیسی کره، و (ب) نیروی مغناطیسی وارد بر کره، به سمت بالاست، به سمت پایین است، یا صفر است؟

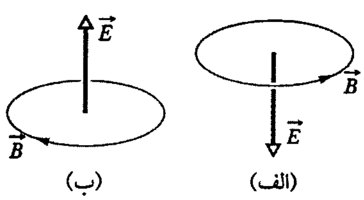
۶. حلقه‌های جریان مربوط به پرسش ۳ و شکل ۳۲ـ۱۸ را با کره‌های پارامغناطیسی جانشین کنید. به ازای هر میدان، آیا (الف) گشتاور دوقطبی مغناطیسی کره، و (ب) نیروی مغناطیسی وارد بر کره، به سمت بالاست، به سمت پایین است، یا صفر است؟

۷. شکل ۳۲ـ۱۹، دوقطبی‌های مغناطیسی یک مادهٔ دیامغناطیسی را برای سه حالت نشان می‌دهد. (به خاطر سادگی، گشتاورهای دوقطبی فقط به سمت بالا یا فقط به سمت پایین صفحهٔ شکل در نظر گرفته شده‌اند). در این سه حالت بزرگی میدان مغناطیسی اعمال شده به ماده متفاوت است. (الف) در هر حالت، آیا میدان اعمال شده به سمت پایین یا به سمت بالای صفحهٔ شکل است؟ این سه حالت را با توجه به (ب) بزرگی میدان اعمال شده و (پ) مغناطش ماده، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



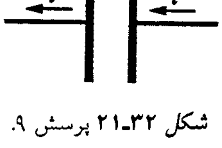
شکل ۳۲ـ۱۹ پرسش ۷.

۸. شکل ۳۲ـ۲۰، یک بردار میدان الکتریکی و یک خط میدان مغناطیسی القایی را، در دو حالت، نشان می‌دهد. در هر حالت، آیا بزرگی بردار $\vec{E}$ افزایش می‌یابد یا کاهش؟



شکل ۳۲ـ۲۰ پرسش ۸.

۹. شکل ۳۲ـ۲۱، یک خازن صفحه ـ موازی و جریان سیم‌های رابط بی‌بار کنندهٔ خازن را نشان می‌دهد. در بین صفحه‌های خازن، آیا (الف) میدان الکتریکی $\vec{E}$، و (ب) جریان جابه‌جایی i_d به سمت چپ است یا به سمت راست؟ (پ) آیا میدان مغناطیسی در نقطهٔ P در درون سوی صفحهٔ شکل است یا در برون سو؟

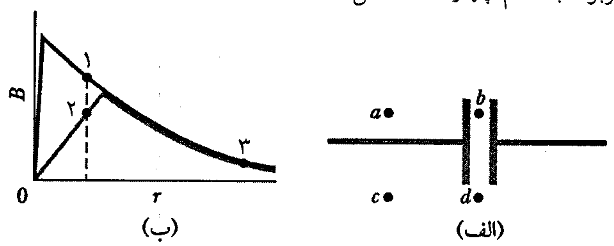


شکل ۳۲ـ۲۱ پرسش ۹.

۱۰. یک خازن صفحه ـ موازی با صفحه‌های مستطیل شکل در حال بی‌بار شدن است. یک حلقهٔ مستطیلی واقع در وسط صفحه‌ها و در بین آنها، دارای ضلع‌های L در $2L$ است؛ ضلع‌های صفحه‌های خازن $2L$ در $4L$

است. اگر جریان جابه‌جایی یکنواخت باشد، چه کسری از این جریان توسط حلقه احاطه می‌شود؟

۱۱. شکل ۳۲-۲۲ الف، یک خازن با صفحه‌های دایره‌ای را نشان می‌دهد که در حال باردار شدن است. نقطهٔ a (در نزدیکی یکی از سیم‌های رابط) و نقطهٔ b (در درون شکاف خازن) و نیز نقطهٔ c (که چندان به سیم نزدیک نیست) و نقطهٔ d (در میان صفحه‌ها اما در بیرون شکاف خازن)، به فاصلهٔ مساوی از محور مرکزی، قرار دارند. در شکل ۳۲-۲۲ ب، یک منحنی، تغییرات بزرگی میدان مغناطیسی در درون و بیرون سیم را برحسب فاصلهٔ r نشان می‌دهد. منحنی دیگر، نشان دهندهٔ تغییرات بزرگی میدان مغناطیسی در درون و بیرون شکاف برحسب فاصلهٔ r است. بخشی از این دو منحنی برهم منطبق است. کدام یک از سه نقطهٔ واقع بر روی منحنی‌ها مربوط به کدام چهار نقطهٔ شکل ۳۲-۲۲ الف است؟

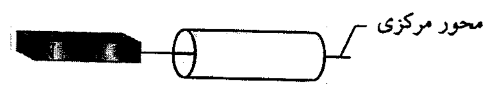


شکل ۳۲-۲۲ پرسش ۱۱.

تمرین‌ها و مسأله‌ها

بخش ۳۲-۲ قانون گاؤس دربارهٔ میدان‌های مغناطیسی

۱ ت. فرض کنید یک برگ کاغذ را، مطابق شکل ۳۲-۲۳، به صورت استوانه در آورده و یک آهن‌ربای میله‌ای را نزدیک یک سر آن قرار داده‌ایم. (الف) خط‌های میدان مغناطیسی گذرنده از سطح استوانهٔ کاغذی را رسم کنید. (ب) برای هر عنصر $d\vec{A}$ از سطح این استوانهٔ کاغذی، دربارهٔ علامت $\vec{B}.d\vec{A}$ چه می‌توان گفت؟ (پ) آیا این نتیجه با قانون گاؤس دربارهٔ مغناطیس مغایر است؟ توضیح دهید.



شکل ۳۲-۲۳ تمرین ۱.

۲ ت. شار مغناطیسی گذرنده از هر کدام از پنج وجه یک تاس تخته نرد از رابطهٔ $\Phi_B = \pm N$ Wb به دست می‌آید، که در آن N (مساوی با ۱ تا ۵) تعداد خال‌های یک وجه است. اگر N زوج باشد، شار مثبت (یعنی برون سو) و اگر N فرد باشد، شار منفی (یعنی درون سو) است. شار گذرنده از وجه ششم تاس چیست؟

۳ م. یک سطح گاؤسی به شکل استوانهٔ قائم در اختیار داریم که شعاع دو سَر دایره‌ای آن ۱۲٫۰ cm و طول آن ۸۰٫۰ cm است. شار مغناطیسی ۲۵٫۰ μWb از یک سَر به این استوانه وارد می‌شود. در سَر دیگر استوانه، میدان مغناطیسی یکنواخت ۱٫۶۰ mT به طور عمود بر سطح و در برون‌سو وجود دارد. شار مغناطیسی خالص گذرنده از سطح خمیدهٔ استوانه چقدر است؟

بخش ۳۲-۳ مغناطیس زمین

۴ ت. فرض کنید مقدار متوسط مؤلفهٔ قائم میدان مغناطیسی زمین در سرتاسر ایالت آریزونا[1] ۴۳ μT (به سمت پایین) است. مساحت آریزونا $2.95\times10^{5}\ \mathrm{km}^2$ است. شار مغناطیسی خالص گذرنده از بقیهٔ سطح زمین (تمام سطح زمین به جز سطح آریزونا) را حساب کنید. آیا شار مغناطیسی خالص برون سو است یا درون سو؟

۵ ت. در سال ۱۹۱۲/۱۲۹۱ در نیوهمپشایر[2] مقدار متوسط مؤلفهٔ افقی میدان مغناطیسی زمین ۱۶ μT و زاویهٔ میل متوسط یا «شیب مغناطیسی» ۷۳ درجه بوده است. بزرگی میدان مغناطیسی متناظر در آنجا چقدر بوده است؟

۶ م. میدان مغناطیسی زمین را به تقریب می‌توان میدان مغناطیسی یک دوقطبی در نظر گرفت که مؤلفه‌های افقی و قائم آن در نقطه‌ای به فاصلهٔ r از مرکز زمین، عبارت‌اند از:

$$B_v = \frac{\mu_0\mu}{2\pi r^3}\sin\lambda_m \quad \text{و} \quad B_h = \frac{\mu_0\mu}{4\pi r^3}\cos\lambda_m$$

که در آن λ_m عرض جغرافیایی مغناطیسی است (عرض جغرافیایی زاویه‌ای است که نسبت به استوای زمین مغناطیسی در طرف قطب شمال یا قطب جنوب زمین مغناطیسی اندازه‌گیری می‌شود). فرض کنید که گشتاور دوقطبی مغناطیسی زمین برابر است با $\mu = 8.00\times10^{22}\ \mathrm{A.m^2}$. (الف) نشان دهید که شدت میدان مغناطیسی در عرض جغرافیایی λ_m برابر است با:

$$B = \frac{\mu_0\mu}{4\pi r^3}\sqrt{1+3\sin^2\lambda_m}$$

(ب) نشان دهید که رابطهٔ ϕ_i، زاویهٔ میل مربوط به این میدان مغناطیسی با عرض جغرافیایی λ_m، به صورت زیر است

$$\tan\phi_i = 2\tan\lambda_m$$

۷ م. با استفاده از نتیجه‌های مسأله ۶، میدان مغناطیسی زمین را (از نظر بزرگی و زاویهٔ میل)، در (الف) استوای زمین مغناطیسی، (ب) نقطه‌ای واقع در عرض زمین مغناطیسی ۶۰ درجه، و (پ) قطب شمال زمین مغناطیسی، براورد کنید.

1. Arizona 2. New Hampshire

۸ م. با استفاده از تقریب‌های ارائه شده در مسألهٔ ۶، مطلوب است تعیین (الف) ارتفاعی در بالای سطح زمین که در آنجا بزرگی میدان مغناطیسی ۵۰ درصد مقدار میدان در سطح زمین با عرض جغرافیایی یکسان است؛ (ب) بزرگی بیشینهٔ میدان مغناطیسی در مرز هسته ـ گوشتهٔ زمین، که در عمق ۲۹۰۰ کیلومتری سطح زمین قرار دارد؛ و (پ) بزرگی و زاویهٔ میل میدان مغناطیسی زمین در قطب شمال جغرافیایی. توضیح دهید چرا مقادیر محاسبه شده در قسمت (پ) با مقادیر اندازه‌گیری شده تفاوت دارند.

بخش ۳۲ـ۴ مغناطیس و الکترون‌ها

۹ ت. مؤلفهٔ اندازه‌گیری شدهٔ گشتاور دوقطبی مغناطیسی مداری یک الکترون به ازای (الف) $m_l=1$ و (ب) $m_l=-2$، چقدر است؟

۱۰ ت. اختلاف انرژی میان ردیف شدن موازی (همسو) و پادموازی (ناهمسو) مؤلفهٔ z گشتاور دوقطبی مغناطیسی اسپینی الکترون با میدان مغناطیسی خارجی با بزرگی ۰٫۲۵T و همسو با محور z، چقدر است؟

۱۱ ت. الکترونی در یک اتم دارای تکانهٔ زاویه‌ای مداری به ازای $m_l=0$ است. مؤلفه‌های (الف) $L_{orb,z}$ و (ب) $\mu_{orb,z}$ را پیدا کنید. هرگاه اتم در میدان مغناطیسی خارجی $\vec{B}$ با بزرگی ۳۵mT و همسو با محور z قرار گیرد، انرژی‌های پتانسیل وابسته به سمتگیری‌های (پ) گشتاور دوقطبی مغناطیسی مداری و (ت) گشتاور دوقطبی مغناطیسی اسپینی الکترون را حساب کنید. (ث) قسمت‌های (الف) تا (ت) را به ازای $m_l=-3$ تکرار کنید.

بخش ۳۲ـ۶ دیامغناطیس

۱۲ ت. شکل ۳۲ـ۲۴، یک مدل حلقه‌ای (حلقهٔ L) مربوط به یک مادهٔ دیامغناطیسی را نشان می‌دهد. (الف) خط‌های میدان مغناطیسی گذرنده از حلقه و پیرامون آن را که از آهن‌ربای میله‌ای ناشی می‌شود، رسم کنید. (ب) جهت گشتاور دوقطبی مغناطیسی برایند $\vec{\mu}$ و جهت جریان قراردادی i در حلقه، چگونه است؟ (پ) جهت نیروی مغناطیسی وارد بر حلقه چیست؟



شکل ۳۲ـ۲۴ تمرین‌های ۱۲ و ۱۶.

*۱۳ م. فرض کنید الکترونی به جرم m و بار الکتریکی e در مداری دایره‌ای به شعاع r حول یک هسته دوران می‌کند. اکنون، میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ به طور عمود بر صفحهٔ مدار برقرار می‌شود. با این فرض که شعاع مدار تغییر نمی‌کند و تغییر تندی الکترون بر اثر میدان $\vec{B}$ کوچک است، رابطهٔ مربوط به تغییر گشتاور دوقطبی مغناطیسی مداری الکترون را که از میدان مغناطیسی ناشی می‌شود، پیدا کنید.

بخش ۳۲ـ۷ پارامغناطیس

۱۴ ت. میدان مغناطیسی ۰٫۵۰T به یک گاز پارامغناطیسی، که گشتاور دوقطبی مغناطیسی ذاتی اتم‌های آن 1.0×10^{-23} J/T است، اعمال می‌شود. در چه دمایی انرژی جنبشی متوسط انتقالی اتم‌های گاز با انرژی لازم برای سر و ته کردن دوقطبی در این میدان مغناطیسی، برابر می‌شود؟

۱۵ ت. آهن‌ربایی استوانه‌ای دارای طول ۵٫۰۰cm و قطر ۱٫۰۰cm است. مغناطش یکنواخت این آهن‌ربا 5.30×10^{3} A/m است. گشتاور دوقطبی مغناطیسی آهن‌ربا چیست؟

۱۶ ت. تمرین ۱۲ را برای حالتی تکرار کنید که در آن حلقهٔ L یک مدل مربوط به مادهٔ پارامغناطیسی باشد.

۱۷ ت. می‌خواهیم نمونه‌ای از یک نمک پارامغناطیسی را، که منحنی مغناطش آن به صورت شکل ۳۲ـ۹ است، مورد آزمون قرار دهیم تا ببینیم از قانون کوری پیروی می‌کند یا نه. این نمونه را در میدان مغناطیسی ۰٫۵۰T که در طول آزمایش ثابت می‌ماند قرار می‌دهیم. سپس، مغناطش M را در دماهای میان ۱۰K تا ۳۰۰K اندازه می‌گیریم. آیا در این شرایط قانون کوری معتبر است؟

۱۸ ت. نمونه‌ای از یک نمک پارامغناطیسی، که منحنی مغناطش آن به صورت شکل ۳۲ـ۹ است، در دمای اتاق (۳۰۰K) قرار دارد. با اعمال کردن چه میدان مغناطیسی‌ای درجهٔ حالت اشباع مغناطیسی نمونه (الف) ۵۰ درصد و (ب) ۹۰ درصد، خواهد بود؟ (پ) آیا این میدان‌های مغناطیسی در آزمایشگاه دست یافتنی هستند؟

۱۹ م. الکترونی با انرژی جنبشی K_e در یک مسیر دایره‌ای عمود بر میدان مغناطیسی یکنواخت فقط تحت اثر نیروی ناشی از میدان حرکت می‌کند. (الف) نشان دهید که بزرگی گشتاور دوقطبی مغناطیسی ناشی از حرکت مداری الکترون برابر با $\mu=K_e/B$ و این گشتاور ناهمسو با $\vec{B}$ است. (ب) بزرگی و جهت گشتاور دوقطبی مغناطیسی یک یون مثبت با انرژی جنبشی K_i، در همین شرایط، چیست؟ (پ) گاز یونیده‌ای شامل 5.3×10^{21} الکترون در هر مترمکعب و همین تعداد یون در هر مترمکعب است. فرض کنید انرژی جنبشی متوسط الکترون 6.2×10^{-20} J و انرژی جنبشی متوسط یون 7.6×10^{-21} J است. مغناطش گاز را وقتی که در میدان مغناطیسی ۱٫۲T قرار می‌گیرد، حساب کنید.

بخش ۳۲ـ۸ فرومغناطیس

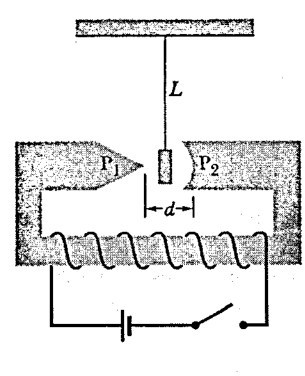
۲۰ ت. اندازه‌گیری‌های انجام شده در معدن‌ها و نقب‌ها نشان می‌دهند که دما در درون زمین برحسب عمق به طور متوسط با آهنگ ۳۰C°/km افزایش می‌یابد. با این فرض، اگر دمای سطح زمین ۱۰°C باشد، در چه عمقی خاصیت فرومغناطیسی آهن از میان می‌رود؟ (دمای کوری آهن برحسب فشار خیلی کم تغییر می‌کند).

۲۱ ت. جفت شدگی تبادلی مورد بحث در بخش ۳۲ـ۸ به عنوان عامل خاصیت فرومغناطیسی، حاصل برهم کنش متقابل میان دو دوقطبی مغناطیسی مقدماتی نیست. برای نشان دادن این موضوع، مطلوب است محاسبهٔ (الف) بزرگی میدان مغناطیسی در فاصلهٔ ۱۰nm از یک اتم (کبالت) با گشتاور دوقطبی مغناطیسی ۱٫۵×۱۰$^{-۲۳}$J/T در راستای محور دوقطبی و (ب) انرژی کمینهٔ لازم برای سر و ته کردن یک دوقطبی مشابه در این میدان. از مقایسهٔ مقادیر حاصل در اینجا با نتیجه‌های مسألهٔ نمونهٔ ۳۲ـ۱ چه نتیجه‌ای می‌توان به دست آورد؟

۲۲ ت. گشتاور دوقطبی وابسته به اتم آهن در یک میلهٔ آهنی ۲٫۱×۱۰$^{-۲۳}$J/T است. فرض کنید گشتاورهای دوقطبی تمام اتم‌ها در میله، که دارای طول ۵٫۰cm و مساحت مقطع ۱٫۰cm^{۲} است، ردیف شده باشند. (الف) گشتاور دوقطبی میله چقدر است؟ (ب) چه گشتاور نیرویی باید به این آهن‌ربا وارد شود تا آن را به طور عمود بر میدان مغناطیسی خارجی ۱٫۵T نگه دارد؟ (چگالی آهن ۷٫۹g/cm^{۳} است).

۲۳ ت. مغناطش حالت اشباع فلز نیکل فرومغناطیسی $M_{\max}$، برابر با ۴٫۷۰×۱۰^{۵}A/m است. گشتاور مغناطیسی تک اتم نیکل را حساب کنید. (چگالی نیکل ۸٫۹۰g/cm^{۳} و جرم مولی آن ۵۸٫۷۱g/mol است).

۲۴ م. شکل ۳۲ـ۲۵، دستگاهی را نشان می‌دهد که برای نمایش دادن خاصیت پارامغناطیسی و دیامغناطیسی مواد به کار می‌رود. نمونه‌ای از یک مادهٔ مغناطیسی را به وسیلهٔ نخ درازی در یک میدان نایکنواخت در میان دو قطب (به فاصلهٔ d=۲cm) یک آهن‌ربای الکتریکی قوی می‌آویزیم. قطب P_1 به صورت نوک‌تیز و قطب P_2، مطابق شکل، نیم‌گرد است. انحراف نخ نسبت به راستای قائم به وسیلهٔ یک سیستم تصویر نوری (که نشان داده نشده است) قابل رؤیت است. (الف) نخست از یک نمونهٔ بیسموت (که به شدت دیامغناطیسی است) استفاده می‌شود. وقتی آهن‌ربای الکتریکی به کار می‌افتد، مشاهده می‌کنیم که نمونه اندکی (در حدود ۱mm) به طرف یکی از قطب‌ها منحرف می‌شود. این انحراف در چه جهتی است؟ (ب) آنگاه، از یک نمونهٔ آلومینیومی (که پارامغناطیسی و رساناست) استفاده می‌شود. وقتی آهن‌ربای الکتریکی به کار می‌افتد،



شکل ۳۲ـ۲۵ مسألهٔ ۲۴.

مشاهده می‌کنیم که نمونه برای مدتی در حدود یک ثانیه به شدت به طرف یکی از قطب‌ها منحرف می‌شود (در حدود ۱cm) و سپس اندکی (در حدود چند میلی‌متر) به طرف قطب دیگر منحرف می‌شود. دلیل این انحراف‌ها را شرح دهید و جهت آنها را معین کنید. (راهنمایی: توجه کنید که نمونه آلومینیومی یک رساناست و قانون لنز دربارهٔ آن صدق می‌کند). (پ) اگر از یک نمونهٔ فرومغناطیسی استفاده کنیم چه اتفاقی می‌افتد؟

۲۵ م. گشتاور دوقطبی مغناطیسی زمین ۸٫۰×۱۰^{۲۲}J/T است. (الف) اگر منشأ این مغناطیس یک کرهٔ آهنی مغناطیده واقع در مرکز زمین باشد شعاع کره چقدر است؟ (ب) این کره چه کسری از حجم زمین را اشغال می‌کند؟ فرض کنید که دوقطبی‌ها به طور کامل ردیف شده باشند. چگالی هستهٔ درونی زمین ۱۴g/cm^{۳} و گشتاور دوقطبی مغناطیسی اتم آهن ۲٫۱×۱۰$^{-۲۳}$J/T است. (توجه: گمان می‌رود که در واقع هستهٔ درونی زمین هم به صورت مایع و هم به صورت جامد و بخشی از آن متشکل از آهن است. اما به دلیل‌های گوناگون وجود یک آهن‌ربای دایمی به عنوان چشمهٔ خاصیت مغناطیسی زمین مردود شناخته شده است. یکی از این دلیل‌ها مسلماً بالاتر بودن دما نسبت به نقطهٔ کوری است).

بخش ۳۲ـ۹ میدان‌های مغناطیسی القایی

۲۶ ت. مسألهٔ نمونهٔ ۳۲ـ۳ چگونگی باردار شدن یک خازن صفحه ـ موازی دایره‌ای به شعاع ۵۵٫۰mm را توصیف می‌کند. بزرگی میدان مغناطیسی القایی به ازای کدام دو فاصلهٔ شعاعی r نسبت به محور مرکزی، ۵۰ درصد مقدار بیشینهٔ آن است؟

۲۷ ت. میدان مغناطیسی القایی در فاصلهٔ ۶٫۰ میلی‌متری از محور مرکزی یک خازن صفحه ـ موازی دایره‌ای و در میان صفحه‌های خازن، ۲٫۰×۱۰$^{-۷}$T است. شعاع صفحه‌های خازن ۳٫۰mm است. آهنگ تغییر میدان الکتریکی میان صفحه‌ها $d\vec{E}/dt$، چقدر است؟

۲۸ م. فرض کنید یک خازن صفحه ـ موازی دایره‌ای دارای شعاع R=۳۰mm و فاصلهٔ صفحه‌ها از هم ۵٫۰mm است. در ضمن، فرض کنید بین صفحه‌های این خازن یک اختلاف پتانسیل سینوسی با مقدار بیشینهٔ ۱۵۰V و بسامد ۶۰Hz اعمال می‌شود؛ یعنی

$$V = (۱۵۰\,\mathrm{V})\sin[۲\pi(۶۰\,\mathrm{Hz})t]$$

(الف) مقدار $B_{\max}(R)$، یعنی مقدار بیشینهٔ میدان مغناطیسی القایی در فاصلهٔ شعاعی $r=R$، چقدر است؟ (ب) منحنی تغییرات $B_{\max}(r)$ را به‌ازای ۱۰cm > r > ۰ رسم کنید.

بخش ۳۲ـ۱۰ جریان جابه‌جایی

۲۹ ت. ثابت کنید که جریان جابه‌جایی در یک خازن صفحه ـ موازی با ظرفیت C را می‌توان به صورت $i_d=C(dV/dt)$ نوشت، که در آن V اختلاف پتانسیل میان صفحه‌هاست.

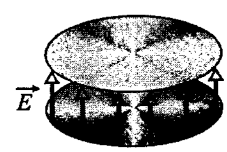
۳۰ ت. اختلاف پتانسیل میان صفحه‌های یک خازن صفحه ـ موازی با ظرفیت ۲ر۰μF، با چه آهنگی باید تغییر کند تا جریان جابه‌جایی ۱ر۵A تولید شود؟

۳۱ ت. در وضعیت مسألهٔ نمونهٔ ۳۲ـ۳، نشان دهید که به ازای $r \le R$، چگالی جریان جابه‌جایی از معادلهٔ $J_d=\varepsilon_0(dE/dt)$ به دست می‌آید.

۳۲ ت. یک خازن صفحه ـ موازی دایره‌ای به شعاع ۰ر۱۰m را باردار می‌کنیم. یک حلقهٔ دایره‌ای به شعاع ۰ر۲۰m هم مرکز با خازن و در وسط فاصلهٔ میان صفحه‌ها قرار دارد. جریان جابه‌جایی گذرنده از حلقه ۲ر۰A است. میدان الکتریکی میان صفحه‌ها با چه آهنگی تغییر می‌کند؟

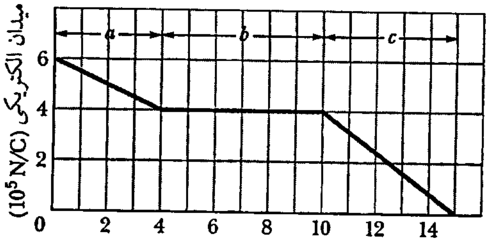
۳۳ م. هنگامی که یک خازن صفحه ـ موازی دایره‌ای به قطر ۲۰cm باردار می‌شود چگالی جریان جابه‌جایی در ناحیهٔ میان صفحه‌ها یکنواخت و برابر با ۲۰A/m² است. (الف) بزرگی میدان مغناطیسی B را در فاصلهٔ $r=$۵۰mm از محور تقارن این ناحیه حساب کنید. (ب) در این ناحیه dE/dt چقدر است؟

۳۴ م. بزرگی میدان الکتریکی میان دو صفحهٔ موازی دایره‌ای در شکل ۳۲ـ۲۶، به صورت $E=$(۴ر۰×۱۰^۵)−(۶ر۰×۱۰^۴t) تغییر می‌کند، که در آن E برحسب ولت بر متر و t برحسب ثانیه است. در لحظهٔ $t=$۰، میدان، مطابق شکل، به سمت بالاست. مساحت هر صفحه ۴ر۰×۱۰^-۲m² است. به ازای $t \ge$۰، (الف) بزرگی و جهت جریان جابه‌جایی میان صفحه‌ها چیست و (ب) آیا جهت میدان مغناطیسی القایی در پیرامون صفحه‌ها، ساعتگرد است یا پادساعتگرد؟



شکل ۳۲ـ۲۶ مسألهٔ ۳۴.

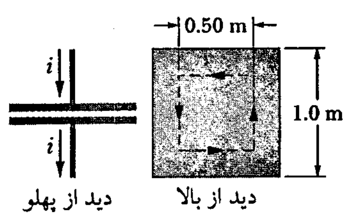
۳۵ م. یک میدان الکتریکی یکنواخت از مقدار آغازی ۶ر۰×۱۰^۵N/C در مدت ۱۵μs، به ترتیب نشان داده شده در شکل ۳۲ـ۲۷، به صفر کاهش پیدا می‌کند. بزرگی جریان جابه‌جایی گذرنده از سطحی به مساحت ۱ر۶m² و عمود بر میدان را در هر یک از بازه‌های زمانی a، b و c نشان داده شده در شکل، حساب کنید. (رفتار انتهایی بازه‌های زمانی را نادیده بگیرید).



شکل ۳۲ـ۲۷ مسألهٔ ۳۵.

۳۶ م. یک خازن صفحه ـ موازی دایره‌ای را باردار می‌کنیم. فرض کنید مرکز یک حلقهٔ دایره‌ای واقع در میان صفحه‌ها بر محور مرکزی منطبق است. شعاع این حلقه ۰ر۲۰m، شعاع هر صفحه ۰ر۱۰m و جریان جابه‌جایی گذرنده از حلقه ۲ر۰A است. میدان الکتریکی میان صفحه‌های خازن با چه آهنگی تغییر می‌کند؟

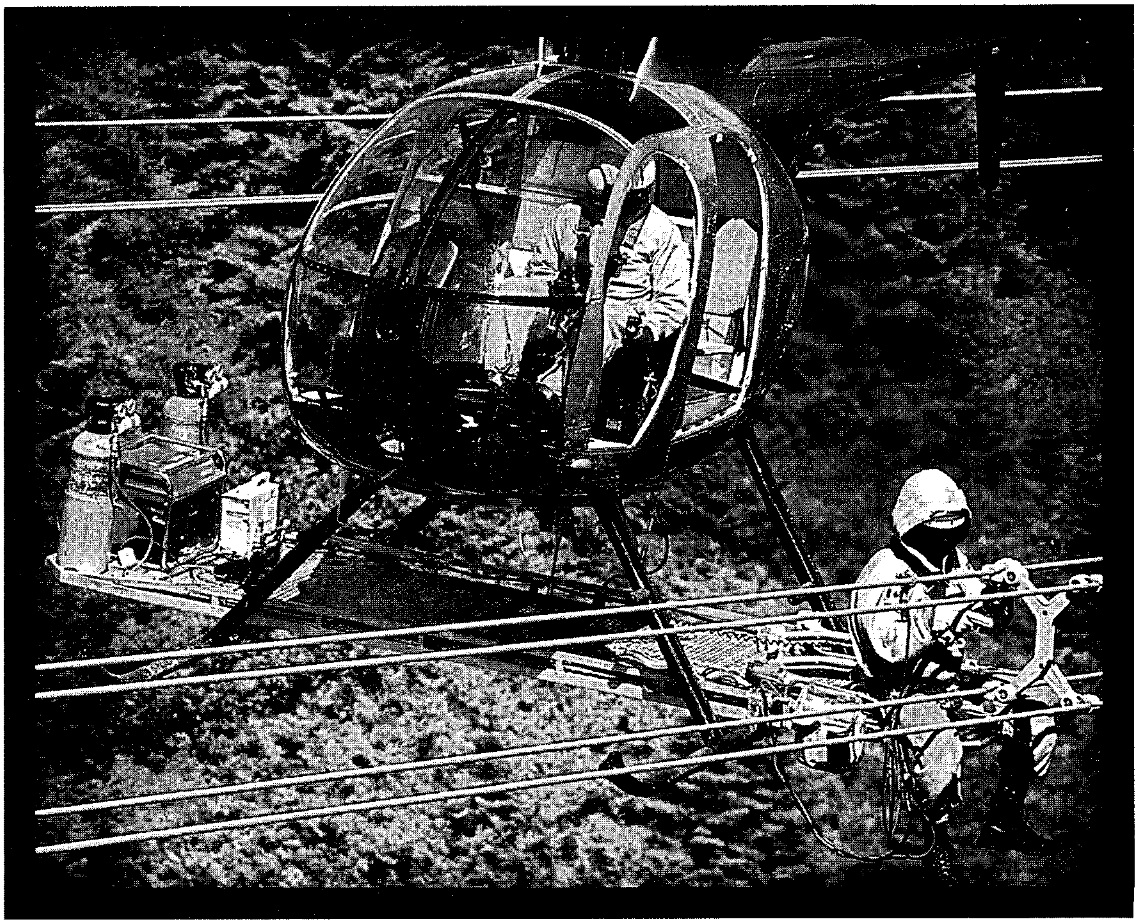
۳۷ م. یک خازن صفحه ـ موازی، مطابق شکل ۳۲ـ۲۸، دارای صفحه‌های مربع شکل به ضلع ۱ر۰m است. این خازن با یک جریان ۲ر۰ آمپری باردار می‌شود و میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ را، به گونه‌ای که بر صفحه‌ها عمود باشد، در میان صفحه‌ها ایجاد می‌کند. (الف) جریان جابه‌جایی گذرنده از ناحیهٔ میان صفحه‌ها i_d، چقدر است؟ (ب) در این ناحیه dE/dt چقدر است؟ (پ) جریان جابه‌جایی گذرنده از مربع محصور شده در مسیر خط‌چین میان صفحه‌ها چقدر است؟ (ت) انتگرال $\oint \vec{B}\cdot d\vec{s}$ در محیط این مسیر مربعی خط‌چین چقدر است؟



شکل ۳۲ـ۲۸ مسألهٔ ۳۷.

۳۸ م. یک خازن صفحه ـ موازی دایره‌ای به شعاع R، از طریق جریان ۱۲ر۰A بی‌بار می‌شود. حلقه‌ای به شعاع $R/$۳ را در میان صفحه‌ها در نظر بگیرید که مرکزش بر محور مرکزی صفحه‌ها منطبق باشد. (الف) جریان جابه‌جایی احاطه شده توسط حلقه چقدر است؟ میدان مغناطیسی القایی بیشینه دارای بزرگی ۱۲ر۰mT است. (ب) در چه فاصلهٔ شعاعی از محور مرکزی صفحه، بزرگی میدان مغناطیسی القایی ۳ر۰۰mT است؟

۳۳
نوسان‌های الکترومغناطیسی و جریان متناوب



هنگامی که یک خط انتقال برق با ولتاژ بالا نیاز به تعمیر پیدا می‌کند، نیروگاه تأمین کننده نمی‌تواند برق را قطع کند، زیرا ممکن است کل منطقه در تاریکی فرو رود. این تعمیرات را باید موقعی انجام داد که خط‌های انتقال «برقدار» هستند. در این تصویر شخصی که در بیرون هلیکوپتر قرار دارد، یک وسیلهٔ فاصله‌انداز میان خط‌های انتقال ۵۰۰ کیلو ولتی را *با دست* تعویض می‌کند، و این کاری است که به مهارت قابل ملاحظه‌ای نیاز دارد.

شخص چگونه این تعمیرات را بدون برق گرفتگی انجام می‌دهد؟

در این فصل به این پرسش پاسخ داده خواهد شد.

۳۳ـ۱ فیزیک نو ـ ریاضیات کهن

در این فصل چگونگی تغییرات بار الکتریکی q را برحسب زمان در یک مدار شامل القاگر L، خازن C و مقاومت R، بررسی می‌کنیم. از دیدگاه دیگر، می‌خواهیم چگونگی دست به دست شدن انرژی میان میدان مغناطیسی القاگر و میدان الکتریکی خازن را، که به تدریج به صورت انرژی گرمایی در مقاومت تلف می‌شود، مورد بحث قرار دهیم.

پیش از این موضوع نوسان را تحت عنوان مباحث دیگر مطالعه کرده‌ایم. در فصل ۱۶ (مبانی فیزیک جلد دوم) چگونگی تغییر جابه‌جایی x برحسب زمان را در یک نوسان کنندهٔ مکانیکی شامل جسمی به جرم m، فنری با ثابت نیروی k و یک عنصر چسبنده یا با اصطکاک، مانند روغن را دیدیم، شکل ۱۶ـ۱۵ چنین دستگاهی را نشان می‌داد. هم‌چنین، چگونگی دست به دست شدن انرژی در میان انرژی جنبشی جرم نوسان کننده و انرژی پتانسیل فنر را که به تدریج به صورت انرژی گرمایی تلف می‌شود، مطالعه کردیم.

این دو دستگاه آرمانی شده دقیقاً به هم شبیه‌اند و معادله‌های دیفرانسیل حاکم بر آنها همسان‌اند. بنابراین، نیاز به یادگیری ریاضیات جدیدی نداریم؛ تنها کافی است که نمادها را عوض و توجه خود را کاملاً به فیزیک حالت مورد نظر معطوف کنیم.

۳۳ـ۲ نوسان‌های LC، مطالعهٔ کیفی

پیش از این، در ارتباط با سه عنصر مداری مقاومت R، خازن C و القاگر L، ترکیب‌های سری RC (در بخش ۲۸ـ۸) و RL (در بخش ۳۱ـ۹) را مطالعه کردیم. در این دو نوع مدار دیدیم که بار الکتریکی، جریان، و اختلاف پتانسیل به طور نمایی رشد و افت پیدا می‌کند. معیار زمانی این رشد یا افت با ثابت زمانی τ معین می‌شود، که بسته به مورد، می‌تواند خازنی یا القایی باشد.

اکنون، ترکیب مدار دو عنصری باقی مانده، یعنی LC، را بررسی می‌کنیم. چنانکه خواهیم دید، در این حالت بار الکتریکی، جریان و اختلاف پتانسیل برحسب زمان به طور نمایی افت پیدا نمی‌کند، بلکه تغییر کردن این کمیت‌ها به طور سینوسی (با دورهٔ تناوب T و بسامد زاویه‌ای ω) صورت می‌گیرد. نوسان‌های حاصل از میدان الکتریکی خازن و میدان مغناطیسی القاگر را **نوسان‌های الکترومغناطیسی** می‌نامند و گفته می‌شود که چنین مداری نوسان می‌کند.

در شکل ۳۳ـ۱، بخش‌های الف تا ح مرحله‌های پی در پی نوسان‌ها را در یک مدار سادهٔ LC نشان می‌دهند. با توجه به معادلهٔ ۲۶ـ۲۱، انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی خازن در هر زمان برابر است با:

$$U_E = \frac{q^2}{2C} \qquad (۳۳ـ۱) \quad ■$$

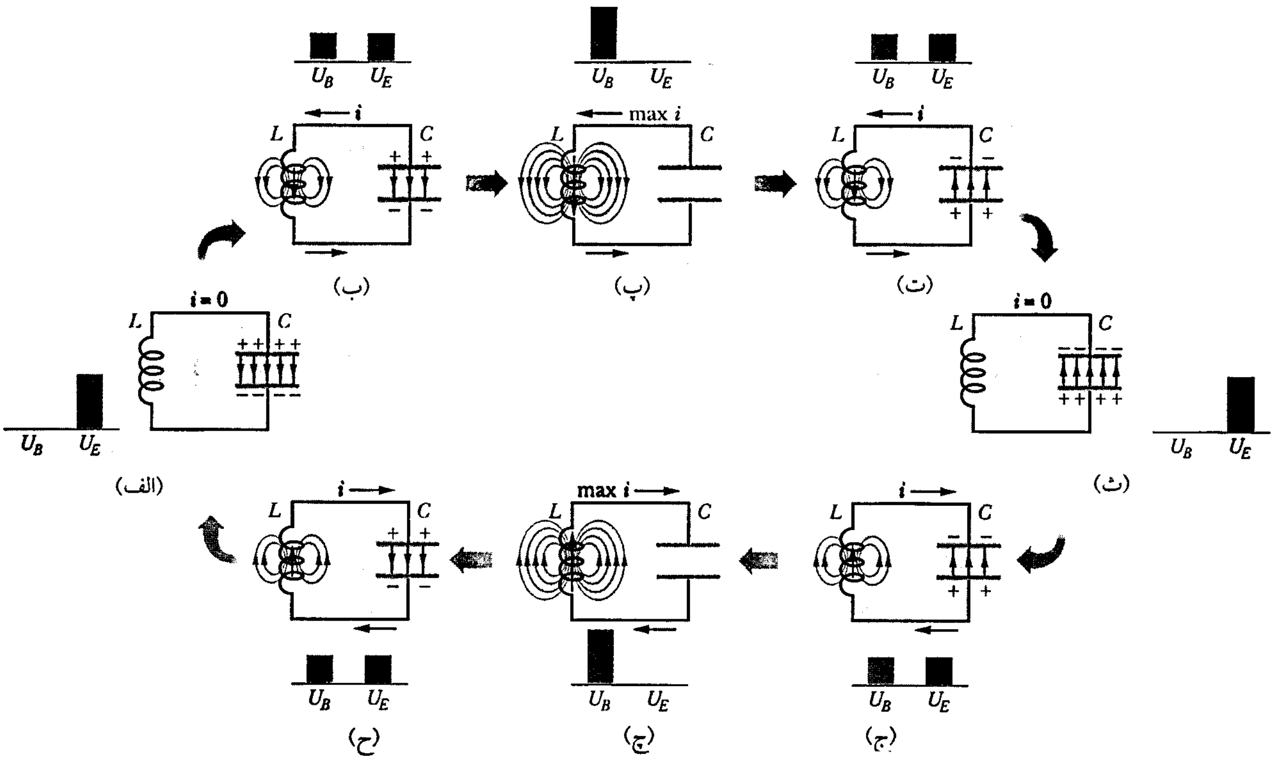
که در آن q بار الکتریکی خازن در همان زمان است. با توجه به معادلهٔ ۳۱ـ۵۱، انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی القاگر در هر زمان برابر است با:

$$U_B = \frac{Li^2}{2} \qquad (۳۳ـ۲) \quad ■$$

که در آن i جریان گذرنده از القاگر در همان زمان است.

روش تعمیر خط‌های انتقال برق با ولتاژ بالا در تصویر سرآغاز فصل نشان داده شده است. عکس توسط **اسکات ینزر**[1] گرفته شده است و امتیاز آن به **شرکت هاورفیلد**[2] تعلق دارد. هنگامی که تعمیرکار به یک خط انتقال برقدار نزدیک می‌شود میدان الکتریکی پیرامون خط پتانسیل بدن او را تقریباً تا پتانسیل خط انتقال بالا می‌برد. او برای همساز شدن این پتانسیل‌ها یک «عصا»ی رسانا را به‌سوی خط دراز می‌کند. برای جلوگیری از برق گرفتگی، شخص باید نسبت به هر چیزی که بدن او را به زمین وصل می‌کند، از نظر الکتریکی عایق‌بندی شده باشد. او برای اطمینان از این موضوع که بدنش همیشه به صورت تک پتانسیل است ـ همان پتانسیل خطی که روی آن کار می‌کند ـ از لباس، کلاه و دستکش‌های رسانا استفاده می‌کند، که همگی از نظر الکتریکی و از طریق «عصا» به خط انتقال وصل شده‌اند.

1. Scott H.Yenzer 2. Haverfield Corporation of Gettysburg, PA.



شکل ۳۳ـ۱ نمایش هشت مرحله از یک چرخهٔ نوسان مدار LC بدون مقاومت. نمودارهای ستونی کنار هر شکل انرژی‌های مغناطیسی و الکتریکی ذخیره شده را نشان می‌دهند. خط‌های میدان مغناطیسی القاگر و خط‌های میدان الکتریکی خازن نیز نشان داده شده‌اند. (الف) خازن با بار بیشینه، جریان صفر. (ب) خازن در حال بی‌بار شدن، جریان در حال افزایش یافتن. (پ) خازن بی‌بار شدهٔ کامل، جریان بیشینه. (ت) خازن در حال باردار شدن، اما دارای قطبیت مخالف نسبت به شکل (الف)، جریان در حال کاهش یافتن. (ث) خازن با بار بیشینه و دارای قطبیت مخالف نسبت به شکل (الف)، جریان صفر. (ج) خازن در حال بی‌بار شدن، جریان در حال افزایش یافتن در جهت مخالف نسبت به شکل (ب). (چ) خازن بی‌بار شدهٔ کامل، جریان بیشینه. (ح) خازن در حال باردار شدن، جریان در حال کاهش یافتن.

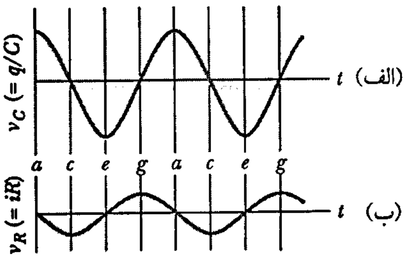
اکنون، این قرارداد را می‌پذیریم که مقادیر لحظه‌ای کمیت‌های الکتریکی یک مدار نوسان کنندهٔ سینوسی را با حروف کوچک، مانند q، و دامنه‌های این کمیت‌ها را با حروف بزرگ، مانند Q، نشان دهیم. با توجه به این قرارداد، فرض می‌کنیم که در آغاز q، بار روی خازن در شکل ۳۳ـ۱، برابر با مقدار بیشینهٔ Q و جریان گذرنده از القاگر i، صفر است. این حالت آغازی مدار در شکل ۳۳ـ۱ الف نشان داده شده است. نمودارهای ستونی انرژی نشان می‌دهند که در این لحظه با صفر بودن جریان گذرنده از القاگر و بیشینه بودن بار روی خازن انرژی میدان مغناطیسی U_B، صفر و انرژی میدان الکتریکی U_E، بیشینه است.

اکنون، خازن در القاگر شروع به خالی شدن می‌کند و حامل‌های بار مثبت، مطابق شکل ۳۳ـ۱ ب، به طور پادساعتگرد حرکت می‌کنند. بدین معنا که جریان i، برابر با dq/dt، در مدار برقرار می‌شود و جهتش در القاگر به سمت پایین است. با کاهش یافتن بار خازن انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی خازن نیز کاهش می‌یابد. این انرژی به دلیل عبور کردن جریان i به میدان مغناطیسی ظاهر شده در پیرامون القاگر منتقل می‌شود. در نتیجه، میدان الکتریکی کاهش می‌یابد، میدان مغناطیسی به وجود می‌آید و انرژی از میدان الکتریکی به میدان مغناطیسی منتقل می‌شود.

در لحظهٔ متناظر با شکل ۳۳ـ۱ پ، خازن، سرانجام، همهٔ بارهای الکتریکی خود را از دست می‌دهد؛ در نتیجه، میدان الکتریکی و انرژی ذخیره شده در خازن صفر می‌شود. سپس، این انرژی به طور کامل به میدان مغناطیسی القاگر تبدیل می‌شود. در این صورت، میدان مغناطیسی بیشینه و جریان گذرنده از القاگر نیز دارای مقدار بیشینهٔ I است.

اگرچه اکنون بار روی خازن صفر است اما جریان در جهت پادساعتگرد ادامه می‌یابد زیرا القاگر به جریان اجازه نمی‌دهد به طور ناگهانی به صفر برسد. جریان به منتقل کردن بار مثبت از صفحهٔ بالایی خازن، و از طریق مدار، به صفحهٔ پایینی خازن ادامه می‌دهد (شکل ۳۳ـ۱ ت). وقتی میدان الکتریکی دوباره در درون خازن برقرار می‌شود، انرژی از القاگر به خازن برمی‌گردد. در حین این انتقال انرژی جریان به تدریج کاهش می‌یابد. سرانجام، وقتی که انرژی به طور کامل به خازن برمی‌گردد (شکل ۳۳ـ۱ ث)، جریان به صفر (موقتی) کاهش می‌یابد. وضعیت شکل ۳۳ـ۱ ث مانند وضعیت آغازی است، با این تفاوت که اکنون خازن در جهت مخالف باردار می‌شود.

خازن دوباره شروع به خالی شدن می‌کند، اما جهت جریان ساعتگرد است (شکل ۳۳-۱ ج). با استدلالی مانند پیش، مشاهده می‌کنیم که جریان ساعتگرد به مقدار بیشینه می‌رسد (شکل ۳۳-۱ چ) و سپس کاهش می‌یابد (شکل ۳۳-۱ ح)، تا در نهایت مدار به وضعیت آغازی خود (شکل ۳۳-۱ الف) برگردد. سپس، این فرایند با بسامد معین f، و در نتیجه با بسامد زاویه‌ای $\omega=2\pi f$، تکرار می‌شود. در مدار آرمانی بدون مقاومت LC، هیچ انرژی‌ای جز آنکه در میان میدان الکتریکی خازن و میدان مغناطیسی القاگر دست به دست شود وجود ندارد. بر پایهٔ اصل پایستگی انرژی این نوسان‌ها تا بی‌نهایت ادامه می‌یابند. نیازی نیست که نوسان‌ها با انرژی میدان الکتریکی به طور کامل آغاز شوند، بلکه وضعیت آغازی می‌تواند هر یک از مرحله‌های نوسان باشد.



شکل ۳۳-۲ (الف) نمودار تغییرات اختلاف پتانسیل دو سر خازن مدار شکل ۳۳-۱ برحسب زمان. این کمیت با بار الکتریکی خازن متناسب است. (ب) نمودار تغییرات پتانسیل متناسب با جریان در مدار شکل ۳۳-۱. حروف، مرحله‌های متناظر نوسان در شکل ۳۳-۱ را نمایش می‌دهند.

برای تعیین q، بار الکتریکی خازن، به صورت تابعی از زمان، می‌توان v_C، اختلاف پتانسیل (یا ولتاژ) متغیر با زمان دو سر خازن C را با استفاده از یک ولت‌سنج اندازه گرفت. با استفاده از معادلهٔ ۲۶-۱ می‌توان نوشت

$$v_C = \left(\frac{1}{C}\right)q$$

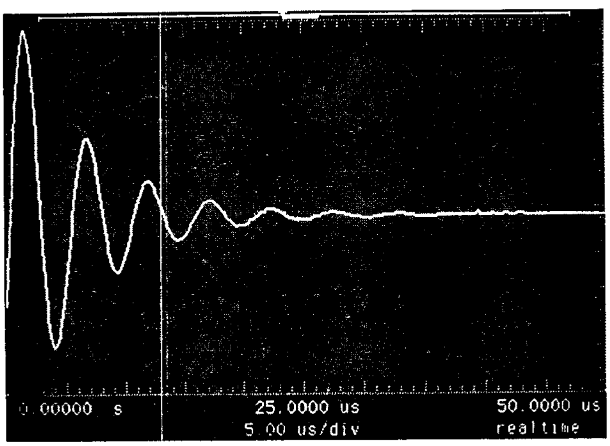
با این معادله می‌توان q را به دست آورد. برای اندازه‌گیری جریان می‌توان مقاومت کوچک R را به طور سری با خازن و القاگر در مدار قرار داد و اختلاف پتانسیل متغیر با زمان دو سر آن، v_R، را اندازه‌گیری کرد؛ طبق رابطهٔ زیر v_R با جریان i متناسب است

$$v_R = iR$$

در اینجا فرض می‌کنیم R آن‌قدر کوچک است که می‌توان از اثر آن روی رفتار مدار چشم‌پوشی کرد. نمودارهای تغییرات زمانی v_C و v_R، و در نتیجه q و i، در شکل ۳۳-۲ نشان داده شده‌اند. همهٔ این کمیت‌ها به طور سینوسی تغییر می‌کنند.

در یک مدار LC واقعی نوسان‌ها به طور نامحدود ادامه نمی‌یابند، زیرا همیشه در مدار مقاومتی وجود دارد که انرژی را از میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی می‌گیرد و آن را به صورت انرژی گرمایی تلف می‌کند (ممکن است مدار گرم شود). بنابراین، نوسان‌ها پس از شروع شدن، مطابق شکل ۳۳-۳، میرا می‌شوند. این شکل را با شکل ۱۶-۱۶ که فروافت نوسان‌های مکانیکی دستگاه جسم ـ فنر در اثر میرایی حاصل از اصطکاک را نشان می‌دهد، مقایسه کنید.

خودآزمایی ۱: خازن بارداری را در لحظهٔ $t=0$ به طور سری به یک القاگر می‌بندیم. معین کنید چه مدت بعد، برحسب دورهٔ تناوب نوسان‌های حاصل T، کمیت‌های زیر به مقدار بیشینهٔ خود می‌رسند: (الف) بار الکتریکی روی خازن؛ (ب) ولتاژ دو سر خازن، با همان قطبیت اولی؛ (پ) انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی؛ و (ت) جریان مدار.



شکل ۳۳-۳ تصویری از یک رد اسیلوسکوپی، که چگونگی میرا شدن نوسان‌های مدار RLC را بر اثر انرژی گرمایی تلف شده در مقاومت نمایش می‌دهد.

مسألهٔ نمونهٔ ۳۳ـ۱

خازنی به ظرفیت $۱٫۵\mu F$ را تا ولتاژ $۵۷V$ باردار می‌کنیم. سپس باتری باردار کننده را قطع می‌کنیم و یک پیچهٔ $۱۲mH$ را به طور سری به دو سر خازن می‌بندیم تا مدار LC نوسان کند. جریان بیشینهٔ پیچه چقدر است؟ فرض کنید که مدار مقاومت ندارد.

حل: نکته‌های کلیدی عبارت‌اند از:

۱. چون مدار بدون مقاومت است انرژی الکترومغناطیسی مدار در هنگام دست به دست شدن انرژی در میان میدان الکتریکی خازن و میدان مغناطیسی پیچه (القاگر) پایسته است.

۲. انرژی میدان مغناطیسی $U_B(t)$، در هر زمان t، طبق معادلهٔ ۳۳ـ۲ ($U_B=Li^۲/۲$)، با جریان گذرنده از پیچه $i(t)$، رابطه دارد. وقتی تمام انرژی به صورت انرژی مغناطیسی ذخیره می‌شود جریان به مقدار بیشینهٔ خود I، می‌رسد و انرژی برابر با $U_{B,\max}=LI^۲/۲$ می‌شود.

۳. انرژی میدان الکتریکی $U_E(t)$، در هر زمان t، طبق معادلهٔ ۳۳ـ۱ ($U_E=q^۲/۲C$)، با بار الکتریکی روی خازن $q(t)$، رابطه دارد. وقتی تمام انرژی به صورت انرژی الکتریکی ذخیره می‌شود، بار الکتریکی به مقدار بیشینهٔ خود Q، می‌رسد و انرژی برابر با $U_{E,\max}=Q^۲/۲C$ می‌شود.

با توجه به این نکته‌ها، اکنون می‌توانیم اصل پایستگی انرژی را به صورت زیر بیان کنیم:

$$U_{B,\max} = U_{E,\max}$$

یا

$$\frac{LI^۲}{۲} = \frac{Q^۲}{۲C}$$

پس از حل کردن این معادله نسبت به I، داریم

$$I = \sqrt{\frac{Q^۲}{LC}}$$

مقادیر L و C معلوم‌اند، اما Q در دست نیست. با وجود این، با استفاده از معادلهٔ ۲۶ـ۱ ($q=CV$) می‌توان Q را به اختلاف پتانسیل بیشینهٔ دو سر خازن V، که همان اختلاف پتانسیل آغازی $۵۷V$ است، ربط داد. بنابراین، با جانشانی رابطهٔ $Q=CV$، داریم

$$I = V\sqrt{\frac{C}{L}} = (۵۷V)\sqrt{\frac{۱٫۵\times۱۰^{-۶}F}{۱۲\times۱۰^{-۳}H}} \Rightarrow$$

$$I = ۰٫۶۳۷A \approx ۶۴۰mA \qquad \text{(پاسخ)}$$

۳۳ـ۳ مانستگی الکتریکی ـ مکانیکی نوسان‌ها

اکنون موضوع مانستگی (شباهت) میان دستگاه نوسان کنندهٔ LC شکل ۳۳ـ۱ و دستگاه جسم ـ فنر نوسان‌کننده را دقیق‌تر بررسی می‌کنیم. در دستگاه نوسان کنندهٔ جسم ـ فنر، دو نوع انرژی ظاهر می‌شود. یکی از اینها، انرژی پتانسیل فنر فشرده شده یا کشیده شده و دیگری انرژی جنبشی جسم در حال حرکت است. این دو انرژی از فرمول‌های آشنای ستون راست انرژی در جدول ۳۳ـ۱ به دست می‌آیند.

این جدول در ستون راست انرژی دو نوع انرژی مربوط به نوسان‌های LC را نیز نشان می‌دهد. با توجه به این جدول، میان صورت‌های زوج انرژی‌ها ـ انرژی‌های مکانیکی دستگاه جسم ـ فنر و انرژی‌های الکترومغناطیسی نوسانگر LC ـ می‌توان یک مانستگی را مشاهده کرد. معادله‌های v و i در پایین جدول به ما کمک می‌کنند تا به جزئیات این مانستگی پی ببریم. این معادله‌ها نشان می‌دهند که q متناظر با x و i متناظر با v است (در هر دو معادله کمیت دوم مشتق کمیت اول است) پس، این تناظرها نشان می‌دهند که در رابطه‌های مربوط به انرژی، $۱/C$ متناظر با k و L متناظر با m است. بنابراین، می‌توان نوشت

q متناظر با x، $۱/C$ متناظر با k،

i متناظر با v، و L متناظر با m است.

این تناظرها نشان می‌دهند که در یک نوسانگر LC، از نظر ریاضی، خازن مانند فنر در دستگاه جسم ـ فنر، و القاگر مانند جسم است.

در بخش ۱۶ـ۳ دیدیم که بسامد زاویه‌ای نوسان دستگاه جسم ـ فنر (بدون اصطکاک) از معادلهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \text{(دستگاه جسم ـ فنر)} \qquad (۳۳\text{ـ}۳)$$

تناظرهای درج شده در جدول نشان می‌دهند که برای پیدا کردن بسامد زاویه‌ای نوسان مربوط به یک مدار LC

جدول ۳۳ـ۱ مقایسهٔ انرژی در دو دستگاه نوسان کننده

دستگاه جسم ـ فنر		نوسانگر LC	
عنصر	انرژی	عنصر	انرژی
فنر	پتانسیل، $\frac{1}{2}kx^2$	خازن	الکتریکی، $\frac{1}{2}(1/C)q^2$
جسم	جنبشی، $\frac{1}{2}mv^2$	القاگر	مغناطیسی، $\frac{1}{2}Li^2$
	$v = dx/dt$		$i = dq/dt$

(بدون مقاومت)، باید $1/C$ را به جای k و L را به جای m قرار داد. در نتیجه، خواهیم داشت

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (\text{مدار } LC) \qquad (۳۳ـ۴)$$ ■

این نتیجه را در بخش بعد به دست خواهیم آورد.

۳۳ـ۴ نوسان‌های LC، مطالعهٔ کمّی

در اینجا می‌خواهیم به تفصیل نشان دهیم که معادلهٔ ۳۳ـ۴ دربارهٔ بسامد زاویه‌ای نوسان‌های LC درست است. در عین حال، می‌خواهیم مانستگی میان نوسان‌های LC و نوسان‌های جسم ـ فنر را هم به نحوی دقیق‌تر بررسی کنیم. در این صورت، مطالعهٔ خود را با بسط دادن مطالب بررسی شدهٔ پیش دربارهٔ نوسانگر مکانیکی جسم ـ فنر، آغاز می‌کنیم.

نوسانگر جسم ـ فنر

در فصل ۱۶ نوسان‌های جسم ـ فنر را بر پایهٔ انتقال انرژی مورد تحلیل قرار دادیم، اما در آن مرحله معادله دیفرانسیل بنیادی حاکم بر حرکت نوسانی را به دست نیاوردیم و اکنون، به این کار می‌پردازیم.

رابطهٔ مربوط به انرژی کل نوسانگر جسم ـ فنر U، را در هر لحظه می‌توان چنین نوشت:

$$U = U_b + U_s = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \qquad (۳۳ـ۵)$$

که در آن U_b و U_s، به ترتیب، انرژی جنبشی جسم متحرک و انرژی پتانسیل فنر کشیده شده یا فشرده شده است. اگر، بنا به فرض، اصطکاک وجود نداشته باشد، انرژی کل U نسبت به زمان، حتی در صورت تغییر کردن v و x، ثابت می‌ماند. به زبان فرمولی، داریم $dU/dt=0$. در نتیجه می‌توان نوشت

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2\right) = mv\frac{dv}{dt} + kx\frac{dx}{dt} = 0 \qquad (۳۳ـ۶)$$

اما می‌دانیم که $dx/dt=v$ و $dv/dt=d^2x/dt^2$. با جانشانی این مقادیر معادلهٔ ۳۳ـ۶ به صورت زیر در می‌آید

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad (\text{نوسان‌های جسم ـ فنر}) \qquad (۳۳ـ۷)$$

معادلهٔ ۳۳ـ۷، معادله دیفرانسیل بنیادی حاکم بر نوسان‌های دستگاه بدون اصطکاک جسم ـ فنر است.

جواب عمومی معادلهٔ ۳۳ـ۷ ـ یعنی تابع $x(t)$، که نوسان‌های جسم ـ فنر را توصیف می‌کند ـ عبارت است از (چنانکه پیشتر در معادلهٔ ۱۶ـ۳ دیدیم):

$$x = X\cos(\omega t + \phi) \quad (\text{جابه‌جایی}) \qquad (۳۳ـ۸)$$

در این معادله X دامنهٔ نوسان‌های مکانیکی (که در فصل ۱۶ به صورت x_m نمایش داده شد)، ω بسامد زاویه‌ای نوسان‌ها و ϕ ثابت فاز است.

نوسانگر LC

اکنون نوسان‌های یک مدار LC بدون مقاومت را، دقیقاً با همان روش به کار برده شده در نوسانگر جسم ـ فنر مورد تحلیل قرار می‌دهیم. انرژی کل U، که در هر لحظه در مدار نوسان کنندهٔ LC وجود دارد، از معادلهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$U = U_B + U_E = \frac{Li^۲}{۲} + \frac{q^۲}{۲C} \qquad (۹\text{-}۳۳)$$

که در آن U_B انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی القاگر و U_E انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی خازن است. چون فرض کردیم که مقاومت مدار صفر است، هیچ انرژی‌ای به انرژی گرمایی تبدیل نمی‌شود و U نسبت به زمان ثابت می‌ماند. به زبان فرمولی dU/dt برابر با صفر است. با توجه به این موضوع، داریم

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{Li^۲}{۲} + \frac{q^۲}{۲C}\right) = Li\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}\frac{dq}{dt} = ۰ \qquad (۱۰\text{-}۳۳)$$

اما می‌دانیم که $i=dq/dt$ و $di/dt=d^۲q/dt^۲$. با جانشانی این مقادیر معادلهٔ ۳۳ـ۱۰ به صورت زیر در می‌آید

$$L\frac{d^۲q}{dt^۲} + \frac{۱}{C}q = ۰ \qquad (\text{نوسان‌های } LC) \qquad (۱۱\text{-}۳۳)$$ ■

این، معادله دیفرانسیلی است که نوسان‌های یک مدار بدون مقاومت LC را توصیف می‌کند. معادله‌های ۳۳ـ۱۱ و ۳۳ـ۷ از نظر شکل ریاضی دقیقاً یکی هستند.

نوسان‌های بار الکتریکی و جریان

دو معادلهٔ دیفرانسیل به دست آمده از لحاظ ریاضی مشابه‌اند. پس، جواب‌های آنها هم باید از لحاظ ریاضی مشابه باشند. چون q متناظر با x است، جواب عمومی معادلهٔ ۳۳ـ۱۱ را بر پایهٔ مانستگی با معادلهٔ ۳۳ـ۸ می‌توان چنین نوشت:

$$q = Q\cos(\omega t + \phi) \qquad (\text{بار الکتریکی}) \qquad (۱۲\text{-}۳۳)$$ ■

در این معادله Q دامنهٔ تغییرات بار الکتریکی، ω بسامد زاویه‌ای نوسان‌های الکترومغناطیسی و ϕ ثابت فاز است.

با مشتق گرفتن از معادلهٔ ۳۳ـ۱۲ نسبت به زمان، جریان مدار نوسانگر LC به دست می‌آید:

$$i = \frac{dq}{dt} = -\omega Q\sin(\omega t + \phi) \qquad (\text{جریان}) \qquad (۱۳\text{-}۳۳)$$ ■

این جریان، که به طور سینوسی تغییر می‌کند، دارای دامنهٔ I است:

$$I = \omega Q \qquad (۱۴\text{-}۳۳)$$

بنابراین، معادلهٔ ۳۳ـ۱۳ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$i = -I\sin(\omega t + \phi) \qquad (۱۵\text{-}۳۳)$$

بسامدهای زاویه‌ای

برای آنکه بدانیم معادلهٔ ۳۳ـ۱۲ جواب معادلهٔ ۳۳ـ۱۱ است، می‌توانیم جواب معادله و مشتق دوم آن را در معادلهٔ ۳۳ـ۱۱ قرار دهیم. مشتق اول معادلهٔ ۳۳ـ۱۲ به صورت معادلهٔ ۳۳ـ۱۳ است. مشتق دوم معادله چنین به‌دست می‌آید:

$$\frac{d^۲q}{dt^۲} = -\omega^۲ Q\cos(\omega t + \phi)$$

با جانشانی q و $d^۲q/dt^۲$ در معادلهٔ ۳۳ـ۱۱، داریم

$$-L\omega^۲ Q\cos(\omega t + \phi) + \frac{۱}{C}Q\cos(\omega t + \phi) = ۰$$

پس از حذف کردن $Q\cos(\omega t + \phi)$ و باز آرایش معادله، خواهیم داشت

$$\omega = \frac{۱}{\sqrt{LC}}$$

بنابراین، اگر ω برابر با مقدار ثابت $1/\sqrt{LC}$ باشد معادلهٔ ۳۳-۱۲ جواب معادلهٔ ۳۳-۱۱ خواهد بود. توجه کنید که این معادلهٔ مربوط به ω دقیقاً همان معادلهٔ ۳۳-۴ است، که با روش تناظر به دست آمده بود.

ثابت فاز ϕ در معادلهٔ ۳۳-۱۲ با شرایط موجود در یک لحظهٔ معین، مثلاً $t=0$، به دست می‌آید. اگر این شرایط به ازای $t=0$ مقدار $\phi=0$ را به دست بدهند، معادلهٔ ۳۳-۱۲ ایجاب می‌کند که $q=Q$ و معادلهٔ ۳۳-۱۳ ایجاب می‌کند که $i=0$ باشد؛ این شرایط آغازی در شکل ۳۳-۱ الف نشان داده شده‌اند.

نوسان‌های انرژی الکتریکی و انرژی مغناطیسی

انرژی الکتریکی ذخیره شده در مدار LC در هر زمان t، با استفاده از معادله‌های ۳۳-۱ و ۳۳-۱۲، برابر است با:

$$U_E = \frac{q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2C}\cos^2(\omega t + \phi) \qquad (۱۶\text{-}۳۳)$$

و انرژی مغناطیسی با استفاده از معادله‌های ۳۳-۲ و ۳۳-۱۳، برابر است با:

$$U_B = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}L\omega^2Q^2\sin^2(\omega t + \phi)$$

با جانشانی مقدار ω از معادلهٔ ۳۳-۴، داریم

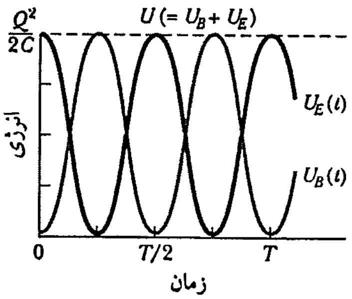
$$U_B = \frac{Q^2}{2C}\sin^2(\omega t + \phi) \qquad (۱۷\text{-}۳۳)$$

شکل ۳۳-۴، منحنی‌های نمایش $U_E(t)$ و $U_B(t)$ مربوط به حالت $\phi=0$ را نشان می‌دهد. توجه کنید که:

۱. مقادیر بیشینهٔ $U_E(t)$ و $U_B(t)$، هر دو برابرند با $Q^2/2C$.

۲. مجموع منحنی‌های U_E و U_B در هر لحظه برابر است با $Q^2/2C$، که مقداری ثابت است.

۳. وقتی مقدار U_E بیشینه است، U_B صفر است و برعکس.



شکل ۳۳-۴ منحنی‌های نمایش انرژی مغناطیسی و انرژی الکتریکی ذخیره شده در مدار شکل ۳۳-۱ به صورت تابعی از زمان. توجه کنید که مجموع این منحنی‌ها ثابت است. T دورهٔ تناوب نوسان است.

> **خودآزمایی ۲:** در یک نوسانگر LC خازنی دارای اختلاف پتانسیل بیشینهٔ ۱۷V و انرژی بیشینهٔ ۱۶۰μJ است. وقتی خازن به اختلاف پتانسیل ۵V و انرژی ۱۰μJ می‌رسد، (الف) نیروی محرک الکتریکی دو سر القاگر و (ب) انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی، چقدر می‌شود؟

مسألهٔ نمونهٔ ۳۳-۲

فرض کنید در وضعیت توصیف شده در مسأله نمونهٔ ۳۳-۱، در لحظهٔ $t=0$ پیچه (القاگر) به خازن باردار وصل می‌شود. نتیجهٔ حاصل یک مدار LC شبیه مدار شکل ۳۳-۱ است. (الف) اختلاف پتانسیل دو سر القاگر $v_L(t)$، برحسب زمان چیست؟

حل: یک **نکتهٔ کلیدی** این است که جریان و اختلاف پتانسیل‌های مدار، نوسان‌های سینوسی انجام می‌دهند. **نکتهٔ کلیدی** دیگر این است که در این مدار نوسان کننده هم ـ درست مانند آنچه در مدارهای نانوسان کنندهٔ فصل ۲۸ انجام دادیم ـ می‌توانیم از قاعدهٔ حلقه استفاده کنیم. در حین نوسان کردن مدار، در هر زمان t با استفاده از قاعدهٔ حلقه و شکل ۳۳-۱، داریم

$$v_L(t) = v_C(t) \qquad (۱۸\text{-}۳۳)$$

یعنی، اختلاف پتانسیل دو سر القاگر v_L، همیشه با اختلاف پتانسیل دو سر خازن v_C، برابر است، به گونه‌ای که اختلاف پتانسیل خالص در مدار صفر است. بنابراین، اگر بتوانیم $v_C(t)$ را پیدا کنیم می‌توانیم $v_L(t)$ را به دست آوریم، و $v_C(t)$ را هم می‌توانیم با استفاده از $q(t)$ در معادلهٔ ۲۶-۱ $(q=CV)$ پیدا کنیم.

چون در لحظهٔ شروع شدن نوسان‌ها، یعنی $t=0$ اختلاف پتانسیل $v_C(t)$ بیشینه است، پس، بار خازن q، نیز باید بیشینه باشد. بنابراین، ثابت فاز ϕ صفر است و در نتیجه، با استفاده از معادلهٔ ۳۳-۱۲، داریم

$$q = Q\cos\omega t \qquad (۱۹\text{-}۳۳)$$

توجه کنید که این تابع کسینوسی مقدار بیشینهٔ q (مساوی با Q)، به ازای $(t=0)$ را به دست می‌دهد. برای به دست آوردن اختلاف پتانسیل $v_C(t)$ دو طرف معادلهٔ ۳۳-۱۹ را به C تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{q}{C} = \frac{Q}{C}\cos\omega t$$

و سپس با استفاده از معادلهٔ ۲۶-۱، می‌نویسیم

$$v_C = V_C\cos\omega t \qquad (۲۰\text{-}۳۳)$$

در اینجا V_C دامنهٔ نوسان‌های اختلاف پتانسیل دو سر خازن v_C، است.

اکنون با قرار دادن $v_C=V_L$ از معادلهٔ ۳۳-۱۸، داریم

$$v_L = V_C\cos\omega t \qquad (۲۱\text{-}۳۳)$$

طرف راست این معادله را با توجه به این نکته می‌توان حساب کرد که دامنهٔ

V_C برابر با اختلاف پتانسیل (بیشینهٔ) آغازی دو سر خازن، یعنی ۵۷V است. در این صورت، با استفاده از مقادیر L و C در مسألهٔ نمونهٔ ۳۳ـ۱، ω را از معادلهٔ ۳۳ـ۴ به دست می‌آوریم:

$$\omega = \frac{۱}{\sqrt{LC}} = \frac{۱}{[(۰٫۰۱۲\mathrm{H})(۱٫۵\times۱۰^{-۶}\mathrm{F})]^{\frac{۱}{۲}}}$$

$$\omega = ۷۴۵۴\mathrm{rad/s} \approx ۷۵۰۰\mathrm{rad/s}$$

بنابراین، معادلهٔ ۳۳ـ۲۱ به صورت زیر نوشته می‌شود

$$v_L = (۵۷\mathrm{V})\cos(۷۵۰۰\mathrm{rad/s})t \qquad \text{(پاسخ)}$$

(ب) مقدار بیشینهٔ $(di/dt)_{max}$، آهنگ تغییر جریان i در مدار، چقدر است؟

حل: در اینجا **نکتهٔ کلیدی** این است که با نوسان کردن بار الکتریکی خازن به صورت معادلهٔ ۳۳ـ۱۲، جریان هم به صورت معادلهٔ ۳۳ـ۱۳ نوسان می‌کند. چون $\phi=۰$، پس، می‌توان نوشت

$$i = -\omega Q \sin\omega t$$

در این صورت، داریم

$$\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt}(-\omega Q\sin\omega t) = -\omega^{۲}Q\cos\omega t$$

با قرار دادن CV_C به جای Q (چون C و V_C در دست هستند، اما Q در دست نیست) و $۱/\sqrt{LC}$ به جای ω (معادلهٔ ۳۳ـ۴)، می‌توان این معادله را ساده کرد. در نتیجه، داریم

$$\frac{di}{dt} = -\frac{۱}{LC}CV_C\cos\omega t = -\frac{V_C}{L}\cos\omega t$$

این معادله نشان می‌دهد که جریان با آهنگی سینوسی تغییر می‌کند و آهنگ بیشینهٔ این تغییر برابر است با:

$$\frac{V_C}{L} = \frac{۵۷\mathrm{V}}{۰٫۰۱۲\mathrm{H}} = ۴۷۵۰\mathrm{A/s} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{V_C}{L} \approx ۴۸۰۰\mathrm{A/s} \qquad \text{(پاسخ)}$$

۳۳ـ۵ نوسان‌های میرا در مدار RLC

مداری را که شامل مقاومت، القایدگی و ظرفیت باشد، مدار RLC می‌نامند. در اینجا فقط مدارهای RLC سری، نظیر مدار نشان داده شده در شکل ۳۳ـ۵ را مورد بحث قرار می‌دهیم. اگر مدار دارای مقاومت R باشد، انرژی الکترومغناطیسی کل U (مجموع انرژی‌های الکتریکی و مغناطیسی) دیگر ثابت نمی‌ماند و با گذشت زمان، در حین تبدیل شدن انرژی به انرژی گرمایی در مقاومت، کاهش پیدا می‌کند. به سبب این اتلاف انرژی، نوسان‌های بار الکتریکی، جریان، و اختلاف پتانسیل، به طور پیوسته از لحاظ دامنه کاهش می‌یابند. در اینجا گفته می‌شود که نوسان‌ها میرا هستند. همان طور که خواهیم دید، این نوسان‌ها عیناً مانند نوسان‌های میرای نوسانگر جسم ـ فنر در بخش ۱۶ـ۸ هستند.

برای تحلیل نوسان‌های این مدار معادلهٔ U، انرژی الکترومغناطیسی کل مدار را برای هر لحظه می‌نویسیم. چون مقاومت نمی‌تواند انرژی الکترومغناطیسی را ذخیره کند، می‌توان از معادلهٔ ۳۳ـ۹ استفاده کرد:

$$U = U_B + U_E = \frac{Li^{۲}}{۲} + \frac{q^{۲}}{C} \qquad (۳۳\text{ـ}۲۲)$$

اما اکنون، این انرژی کل در حین تبدیل شدن به انرژی گرمایی کاهش می‌یابد. آهنگ تبدیل شدن انرژی با توجه به معادلهٔ ۲۷ـ۲۲، برابر است با:

$$\frac{dU}{dt} = -i^{۲}R \qquad (۳۳\text{ـ}۲۳)$$

در اینجا علامت منها نشان می‌دهد که U کاهش پیدا می‌کند. با مشتق گرفتن از معادلهٔ ۳۳ـ۲۲ نسبت به زمان و سپس جانشانی نتیجهٔ حاصل در معادلهٔ ۳۳ـ۲۳، داریم

$$\frac{dU}{dt} = Li\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}\frac{dq}{dt} = -i^{۲}R$$

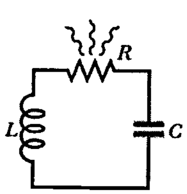
با قرار دادن dq/dt به جای i و $d^{۲}q/dt^{۲}$ به جای di/dt، داریم

$$L\frac{d^{۲}q}{dt^{۲}} + R\frac{dq}{dt} + \frac{۱}{C}q = ۰ \quad (\text{مدار } RLC) \qquad (۳۳\text{ـ}۲۴)$$

این معادله، معادله دیفرانسیل نوسان‌های میرا در یک مدار RLC است.

جواب معادلهٔ ۳۳ـ۲۴ به صورت زیر است

$$q = Qe^{-Rt/۲L}\cos(\omega' t + \phi) \qquad (۳۳\text{ـ}۲۵)$$



شکل ۳۳ـ۵ نمودار یک مدار RLC سری. در حین نوسان کردن بار الکتریکی مدار به پس و پیش در مقاومت، انرژی الکترومغناطیسی به صورت انرژی گرمایی تلف می‌شود و نوسان‌ها را میرا می‌کند (دامنهٔ نوسان‌ها کاهش می‌یابد).

که در آن، داریم

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - (R/2L)^2} \qquad (۳۳\text{-}۲۶)$$

برای یک نوسانگر نامیرا، داریم $\omega = 1/\sqrt{LC}$. معادلهٔ ۳۳ـ۲۵ نشان می‌دهد که بار روی خازن در یک مدار RLC میرا چگونه نوسان می‌کند؛ این معادله همتای الکترومغناطیسی معادلهٔ ۱۶ـ۴۰ است. که جابه‌جایی یک نوسانگر جسم ـ فنر میرا را نشان می‌دهد.

معادلهٔ ۳۳ـ۲۵ نوسان‌های سینوسی (تابع کسینوسی) شامل دامنهٔ با افت نمایی $Qe^{-Rt/2L}$ (عامل ضرب شده در کسینوس) را توصیف می‌کند. بسامد زاویه‌ای نوسان‌های میرا ω'، همیشه از بسامد زاویه‌ای نوسان‌های نامیرا ω، کمتر است؛ اما در اینجا فقط حالت‌هایی را در نظر می‌گیریم که در آن R به قدر کافی کوچک است و می‌توان به جای ω' مقدار ω را قرار داد.

اکنون رابطهٔ مربوط به انرژی الکترومغناطیسی کل مدار U، را به صورت تابعی از زمان به دست می‌آوریم. برای انجام دادن این کار، یکی از راه‌ها توجه کردن به انرژی میدان الکتریکی در خازن است، که از معادلهٔ ۳۳ـ۱ $(U_E = q^2/2C)$ به دست می‌آید. با قرار دادن معادلهٔ ۳۳ـ۲۵ در معادلهٔ ۳۳ـ۱، داریم

$$U_E = \frac{q^2}{2C} = \frac{[Qe^{-Rt/2L}\cos(\omega' t+\phi)]^2}{2C} = \frac{Q^2}{2C}\, e^{-Rt/L}\cos^2(\omega' t+\phi) \qquad (۳۳\text{-}۲۷)$$

بنابراین، انرژی میدان الکتریکی با توجه به جملهٔ مجذور کسینوس و دامنهٔ نوسان، برحسب زمان به طور نمایی کاهش می‌یابد.

مسألهٔ نمونهٔ ۳۳ـ۳

یک مدار RLC سری شامل القایدگی $L = 12\,\text{mH}$، ظرفیت $C = 1{,}6\,\mu\text{F}$، و مقاومت $R = 1{,}5\,\Omega$ است.

(الف) در این مدار در چه زمان t، دامنهٔ نوسان‌های بار الکتریکی به ٪۵۰ مقدار آغازی می‌رسد؟

حل: در اینجا **نکتهٔ کلیدی** این است که دامنهٔ نوسان‌های بار الکتریکی برحسب زمان t کاهش می‌یابد: طبق معادلهٔ ۳۳ـ۲۵ دامنهٔ بار در زمان t برابر با $Qe^{-Rt/2L}$ است، که در آن Q دامنه در لحظهٔ $t = 0$ است. می‌خواهیم بدانیم در چه زمانی دامنهٔ بار الکتریکی به $0{,}50Q$ می‌رسد، یعنی

$$Qe^{-Rt/2L} = 0{,}50Q$$

با حذف کردن Q و گرفتن لگاریتم طبیعی از دو طرف این معادله، داریم

$$-\frac{Rt}{2L} = \ln 0{,}50$$

این معادله را نسبت به t حل می‌کنیم و سپس داده‌ها را در آن قرار می‌دهیم:

$$t = -\frac{2L}{R}\ln 0{,}50 = -\frac{(2)(12\times10^{-3}\text{H})(\ln 0{,}50)}{1{,}5\Omega} \Rightarrow$$

$$t = 0{,}0111\text{s} \approx 11\text{ms} \qquad \text{(پاسخ)}$$

(ب) در این مدت چند نوسان کامل صورت می‌گیرد؟

حل: در اینجا **نکتهٔ کلیدی** این است که زمان یک نوسان کامل همان دورهٔ تناوب $T = 2\pi/\omega$ است که در آن بسامد زاویه‌ای مربوط به نوسان‌های LC از معادلهٔ ۳۳ـ۴ $(\omega = 1/\sqrt{LC})$ به دست می‌آید. بنابراین، در بازهٔ زمانی $\Delta t = 0{,}0111\text{s}$، تعداد نوسان‌های کامل برابر است با:

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{\Delta t}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{0{,}0111\text{s}}{2\pi[(12\times10^{-3}\text{H})(1{,}6\times10^{-6}\text{F})]^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta t}{T} \approx 13 \qquad \text{(پاسخ)}$$

بنابراین. دامنهٔ نوسان پس از ۱۳ نوسان کامل به اندازهٔ ٪۵۰ کاهش می‌یابد. اهمیت این میرایی نسبت به مثال شکل ۳۳ـ۳، که در آن دامنه پس از یک نوسان اندکی بیش از ٪۵۰ کاهش می‌یابد، کمتر است.

۳۳ـ۶ جریان متناوب

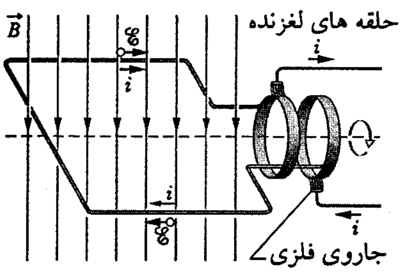
در یک مدار RLC اگر یک وسیلهٔ نیروی محرک الکتریکی خارجی برای جبران کردن انرژی تلف شده به صورت انرژی گرمایی در مقاومت، به مدار انرژی کافی بدهد، نوسان‌ها میرا نمی‌شوند. مدارهای به کار رفته در خانه‌ها، اداره‌ها و کارخانه‌ها، از جمله مدارهای بی‌شمار RLC هستند که این نوع انرژی را از شرکت‌های برق محلی دریافت می‌کنند. در بیشتر کشورها، انرژی مورد نیاز را از طریق نیروهای محرک الکتریکی و جریان‌های

نوسانی تأمین می‌کنند. این جریان‌ها را **جریان متناوب**، یا به اختصار **ac**[1] می‌نامند. (جریان نانوسانی باتری را **جریان مستقیم** یا به اختصار **dc**[2] می‌نامند). این نیروهای محرک الکتریکی و جریان‌های نوسانی برحسب زمان به صورت سینوسی تغییر می‌کنند، جهت آنها در هر ثانیه ۱۲۰ بار (در امریکای شمالی) عوض می‌شود، و از این رو، دارای بسامد f=۶۰Hz هستند.*

در نگاه نخست، این گونه جریان‌ها ممکن است عجیب جلوه کنند. پیش از این دیده‌ایم که تندی سوق الکترون‌های رسانش در سیمکشی خانه‌ها ممکن است در حدود ۴×۱۰^{-۵}m/s باشد. حال اگر جهت حرکت این الکترون‌ها در هر $\frac{۱}{۱۲۰}$ ثانیه عوض شود، الکترون‌ها در هر نیم چرخه مسافتی در حدود ۳×۱۰^{-۷}m را خواهند پیمود. با این آهنگ، یک الکترون نوعی پیش از تغییر دادن جهت حرکت نمی‌تواند از کنار بیش از حدود ۱۰ اتم بگذرد. پس، آیا شگفت‌آور نیست که الکترون‌ها بتوانند به هر جایی بروند؟

گرچه این پرسش ممکن است اندکی آزاردهنده باشد، اهمیت چندانی هم ندارد. الکترون‌های رسانش مجبور نیستند «به همه جا بروند». وقتی می‌گوییم جریان گذرنده از سیمی یک آمپر است، منظور این است که بار الکتریکی از هر مقطع سیم با آهنگ یک کولن بر ثانیه عبور می‌کند. تندی عبور حامل‌های بار از هر مقطع اثر مستقیمی ندارد؛ یک آمپر ممکن است متناظر با عبور تعداد زیادی حامل‌های بار بسیار کُند یا تعداد اندکی حامل‌های بار بسیار سریع باشد. علاوه بر این، اعلام خبر به الکترون‌ها برای تغییر دادن جهت ـ که از نیروی محرک الکتریکی متناوب مولد برق ناشی می‌شود ـ با تندی نزدیک به تندی نور در طول رسانا منتشر می‌شود. تمام الکترون‌ها، بدون توجه به محل قرار گرفتن خود، دستورهای تغییر جهت دادن را تقریباً به طور همزمان دریافت می‌کنند. بالاخره، باید توجه داشت که در بیشتر وسایل برقی، از قبیل لامپ روشنایی و اتو، جهت حرکت الکترون‌ها در حین دادن انرژی گرمایی به این وسایل در اثر برخورد با اتم‌ها، بی‌اهمیت است.

مزیت اساسی جریان متناوب چنین است: وقتی جریان گذرنده از یک رسانا متناوب باشد، میدان مغناطیسی پیرامون رسانا نیز متناوب است. این نتیجه استفاده از قانون القایش فارادی را امکان‌پذیر می‌سازد. یعنی، ما می‌توانیم علاوه بر کارهای دیگر، بزرگی یک اختلاف پتانسیل متناوب را، چنانکه بعداً در همین فصل خواهیم دید، با استفاده از یک مبدل (ترانسفورماتور) به دلخواه بیفزاییم (زیاد کنیم) یا بکاهیم (کم کنیم). علاوه بر این، جریان‌های متناوب نسبت به جریان‌های مستقیم (نامتناوب) برای ماشین‌های چرخان، نظیر مولدها یا موتورها سازگارترند.



شکل ۳۳-۶ ساز و کار اساسی یک مولد جریان متناوب شامل یک حلقهٔ رساناست که در یک میدان مغناطیسی خارجی می‌چرخد. در عمل، نیروی محرک الکتریکی متناوب القا شده در پیچه‌ای با چند دور سیم از طریق دو حلقهٔ لغزندهٔ متصل به حلقهٔ چرخان در دسترس قرار می‌گیرد. هر حلقهٔ لغزنده به یک سر حلقهٔ سیمی وصل شده است و از نظر الکتریکی به وسیلهٔ یک جاروی رسانا که هنگام چرخیدن حلقهٔ سیمی، بر روی آن تماس دارد به بقیهٔ مدار مولد متصل است.

شکل ۳۳-۶، مدل ساده‌ای از یک مولد ac را نشان می‌دهد. حلقهٔ رسانا هنگامی که در میدان مغناطیسی خارجی $\vec{B}$ چرخانده می‌شود، در آن یک نیروی محرک الکتریکی سینوسی $\mathscr{E}$، القا می‌شود:

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_m \sin\omega_d t \qquad (۲۸\text{-}۳۳)$$

بسامد زاویه‌ای نیروی محرک الکتریکی ω_d، برابر با تندی زاویه‌ای چرخش حلقه در میدان مغناطیسی است. این نیروی محرک الکتریکی دارای فاز $\omega_d t$، و دامنهٔ $\mathscr{E}_m$ است (که شاخص پایین نشان دهندهٔ مقدار بیشینه است). هرگاه حلقهٔ چرخان بخشی از یک مسیر رسانای بسته را تشکیل دهد، این نیروی محرک الکتریکی یک جریان سینوسی (متناوب) را با همان بسامد زاویه‌ای ω_d، که **بسامد زاویه‌ای راه‌انداز** نامیده می‌شود، تولید می‌کند (راه می‌اندازد). معادلهٔ جریان را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$i = I\sin(\omega_d t - \phi) \qquad (۲۹\text{-}۳۳)$$

در این معادله I دامنهٔ جریان تولید شده است. (فاز $\omega_d t-\phi$ مربوط به جریان طبق سنت، به جای $\omega_d t+\phi$، با علامت منها نوشته می‌شود). ثابت فاز ϕ در معادلهٔ ۳۳-۲۹ به این دلیل وارد شده است که جریان i ممکن است با نیروی محرک الکتریکی $\mathscr{E}$ همفاز نباشد. (چنانکه خواهیم دید، ثابت فاز به مشخصات مدار متصل به مولد، بستگی دارد). معادلهٔ جریان i را با قرار دادن $۲\pi f_d$ به جای ω_d در معادلهٔ ۳۳-۲۹، برحسب بسامد راه‌انداز نیروی محرک f_d، هم می‌توان نوشت.

---

1. alternating current (ac)

2. direct current (dc)

* بسامد برق متناوب شهرها در ایران f=۵۰Hz است. ـ م.

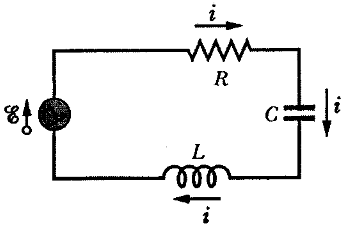
۷ـ۳۳ نوسان‌های واداشته

پیش از این دیدیم که در مدارهای نامیرای LC و مدارهای میرای RLC (با مقاومت R ناچیز)، بار الکتریکی، اختلاف پتانسیل و جریان با بسامد زاویه‌ای $\omega = 1/\sqrt{LC}$ نوسان می‌کند. این نوع نوسان‌ها را **نوسان‌های آزاد** (بدون نیروی محرک الکتریکی خارجی) می‌نامند، و بسامد زاویه‌ای آن ω، را **بسامد زاویه‌ای طبیعی** مدار می‌خوانند.

هرگاه نیروی محرک الکتریکی متناوب خارجی با معادلهٔ ۳۳ـ۲۸ به یک مدار RLC اعمال شود، نوسان‌های بار الکتریکی، اختلاف پتانسیل و جریان را نوسان‌های راه افتاده یا **نوسان‌های واداشته** می‌نامند. این نوسان‌ها همیشه با بسامد زاویه‌ای راه‌انداز ω_d، انجام می‌شوند:

◀ بسامد زاویه‌ای طبیعی یک مدار ω، هر چه باشد، نوسان‌های واداشتهٔ بار الکتریکی، جریان، و اختلاف پتانسیل آن مدار همیشه با بسامد زاویه‌ای راه‌انداز ω_d، صورت می‌گیرند.

اما همان طور که در بخش ۳۳ـ۹ خواهیم دید، دامنهٔ نوسان‌ها بستگی زیادی به میزان نزدیک بودن ω_d با ω دارد. هرگاه این دو بسامد زاویه‌ای همساز شوند ـ شرطی که **تشدید** نامیده می‌شود ـ دامنهٔ جریان در مدار I، بیشینه خواهد شد.



شکل ۳۳ـ۷ نمودار مدار تک حلقه‌ای شامل مقاومت، خازن و القاگر. مولد نشان داده شده با علامت سینوسی در درون دایره یک نیروی محرک الکتریکی متناوب تولید می‌کند، که باعث برقرار شدن جریان متناوب در مدار می‌شود؛ در اینجا جهت‌های نیروی محرک الکتریکی و جریان فقط برای یک لحظه نشان داده شده‌اند.

۸ـ۳۳ بررسی سه مدار ساده

در بخش بعدی این فصل یک مولد نیروی محرک الکتریکی متناوب خارجی را، مطابق شکل ۳۳ـ۷، به یک مدار RLC سری وصل خواهیم کرد. پس از آن، رابطهٔ مربوط به دامنهٔ I و ثابت فاز ϕ جریان نوسانی سینوسی را برحسب دامنهٔ $\mathscr{E}_m$ و بسامد زاویه‌ای نیروی محرک الکتریکی خارجی ω_d، به دست خواهیم آورد. اما نخست، سه مدار ساده‌تر را که هر یک دارای نیروی محرک الکتریکی خارجی و فقط یک عنصر مداری R، C یا L هستند، بررسی می‌کنیم. بدین منظور، کار را با یک عنصر مقاومتی (یک بار مقاومتی خالص) آغاز می‌کنیم.

بار مقاومتی

شکل ۳۳ـ۸ الف، مداری شامل عنصر مقاومتی R و یک مولد جریان متناوب با نیروی محرک الکتریکی متناوب با معادلهٔ ۳۳ـ۲۸ را نشان می‌دهد. بنا به قاعدهٔ حلقه، داریم

$$\mathscr{E} - v_R = 0$$

با توجه به معادله ۳۳ـ۲۸، داریم

$$v_R = \mathscr{E}_m \sin\omega_d t$$

چون V_R، دامنهٔ اختلاف پتانسیل (یا ولتاژ) متناوب دو سر مقاومت برابر با $\mathscr{E}_m$، دامنهٔ نیروی محرک الکتریکی متناوب، است می‌توان نوشت

$$v_R = V_R \sin\omega_d t \qquad (۳۳\text{ـ}۳۰)$$

با توجه به تعریف مقاومت $(R=V/i)$، معادلهٔ جریان مقاومت i_R، را می‌توان چنین نوشت

$$i_R = \frac{v_R}{R} = \frac{V_R}{R}\sin\omega_d t \qquad (۳۳\text{ـ}۳۱)$$

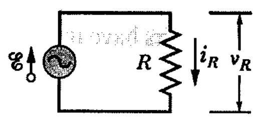
این جریان را با توجه به معادلهٔ ۳۳ـ۲۹، می‌توان به صورت زیر هم نوشت

$$i_R = I_R \sin(\omega_d t - \phi) \qquad (۳۳\text{ـ}۳۲)$$

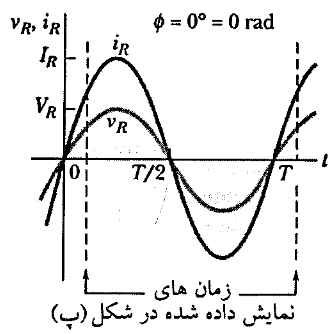
که در آن I_R دامنهٔ جریان i_R در مقاومت است. از مقایسهٔ معادله‌های ۳۳ـ۳۱ و ۳۳ـ۳۲، معلوم می‌شود که برای یک بار مقاومتی خالص، ثابت فاز برابر است با $\phi = 0°$. هم‌چنین، مشاهده می‌کنیم که رابطهٔ میان دامنهٔ ولتاژ و دامنهٔ جریان به صورت زیر است

$$V_R = I_R R \qquad \text{(مقاومت)} \qquad (۳۳\text{ـ}۳۳)$$

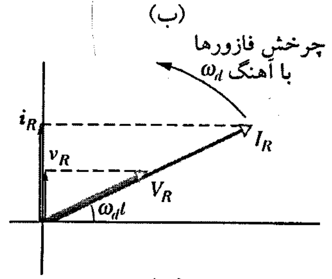
■



(الف)



(ب)



(پ)

شکل ۳۳ـ۸ (الف) مقاومتی به دو سر یک مولد جریان متناوب وصل شده است. (ب) منحنی‌های جریان مدار i_R، و اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت v_R، که در یک نمودار و هر دو برحسب زمان t رسم شده‌اند. این دو کمیت هم‌فازند و در یک دورهٔ تناوب T، چرخهٔ کاملی را طی می‌کنند. (پ) نمودار فازوری، که همان مفهوم شکل (ب) را نشان می‌دهد.

گرچه این معادلهٔ مربوط به مدار شکل ۳۳ـ۸ الف است، در مورد هر مقاومتی در هر مدار متناوبی صادق است.

مقایسهٔ معادله‌های ۳۳ـ۳۰ و ۳۳ـ۳۱ نشان می‌دهد که کمیت‌های متغیر با زمان v_R و i_R هر دو تابعی از $\sin\omega_d t$ به ازای $\phi=0°$ هستند. بنابراین، این دو کمیت همفازند، یعنی، به طور همزمان به مقادیر بیشینه (و کمینه) می‌رسند. در شکل ۳۳ـ۸ ب، این موضوع با منحنی‌های $v_R(t)$ و $i_R(t)$ نشان داده شده است. توجه کنید که در اینجا v_R و i_R افت نمی‌کنند، زیرا مولد، انرژی به مدار می‌دهد تا اتلاف انرژی در R را جبران کند.

کمیت‌های متغیر با زمان v_R و i_R را به صورت هندسی و با استفاده از فازورها هم می‌توان نمایش داد. با توجه به بخش ۱۷ـ۱۰ (مبانی فیزیک جلد دوم) یادآوری می‌شود که فازورها بردارهایی هستند که حول یک مبدا دوران می‌کنند. فازورهای نمایشگر ولتاژ و جریان در مقاومت شکل ۳۳ـ۸ الف، در شکل ۳۳ـ۸ پ برای یک زمان اختیاری t، نشان داده شده‌اند. این فازورها دارای خاصیت‌های زیر هستند:

تندی زاویه‌ای: هر دو فازور با تندی زاویه‌ای برابر با ω_d، بسامد زاویه‌ای مربوط به v_R و i_R، حول یک مبدأ به طور پادساعتگرد می‌چرخند.

طول: طول هر فازور معرف دامنهٔ کمیت متناوب، یعنی V_R برای ولتاژ و I_R برای جریان، است.

تصویربردار: تصویر فازور روی محور قائم نمایشگر مقدار کمیت متناوب در لحظهٔ t، یعنی v_R برای ولتاژ و i_R برای جریان، است.

زاویهٔ چرخش: زاویهٔ چرخش هر فازور برابر با فاز کمیت متناوب در لحظهٔ t است. در شکل ۳۳ـ۸ پ ولتاژ و جریان همفازند، در نتیجه، فازورهای آنها همیشه فاز یکسان $\omega_d t$ و زاویهٔ چرخش یکسان دارند و از این رو با هم می‌چرخند.

اکنون این چرخش را در ذهن خود دنبال کنید. آیا می‌توانید ببینید وقتی که فازورها به اندازهٔ $\omega_d t=90°$ می‌چرخند (فازورها در راستای قائم و به سمت بالا هستند)، به طور دقیق نشان دهندهٔ رابطه‌های $v_R=V_R$ و $i_R=I_R$ هستند؟ معادله‌های ۳۳ـ۳۰ و ۳۳ـ۳۲ همین نتیجه را به دست می‌دهند.

مسألهٔ نمونهٔ ۳۳ـ۴

بار مقاومتی خالص. در شکل ۳۳ـ۸ الف، مقاومت R برابر با 200Ω است و مولد نیروی محرک الکتریکی متناوب سینوسی با دامنهٔ $\mathscr{E}_m=36{,}0\,\text{V}$ و بسامد $f_d=60{,}0\,\text{Hz}$ کار می‌کند.

(الف) معادلهٔ اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت $v_R(t)$، برحسب زمان t چگونه است و V_R، دامنهٔ تابع $v_R(t)$ چقدر است؟

حل: وقتی در مدار شکل ۳۳ـ۸ الف از قاعدهٔ حلقه استفاده کردیم، این **نکتهٔ کلیدی** را یافتیم که: در یک مدار با بار مقاومتی خالص اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت v_R، همیشه برابر با $\mathscr{E}(t)$، اختلاف پتانسیل دو سر مولد نیروی محرک الکتریکی است. بنابراین، داریم $v_R(t)=\mathscr{E}(t)$ و $V_R=\mathscr{E}_m$. چون $\mathscr{E}_m$ معلوم است، می‌توان نوشت

$$V_R = \mathscr{E}_m = 36{,}0\,\text{V} \qquad \text{(پاسخ)}$$

برای پیدا کردن $v_R(t)$، با استفاده از معادلهٔ ۳۳ـ۲۸ چنین می‌نویسیم:

$$v_R(t) = \mathscr{E}(t) = \mathscr{E}_m \sin\omega_d t \qquad (۳۳\text{-}۳۴)$$

سپس، با جانشانی $\mathscr{E}_m=36{,}0\,\text{V}$ و

$$\omega_d = 2\pi f_d = 2\pi(60\,\text{Hz}) = 120\pi \quad \Rightarrow$$

$$v_R = (36{,}0\,\text{V})\sin(120\pi t) \qquad \text{(پاسخ)}$$

به خاطر سادگی، شناسهٔ سینوس را می‌توان به همین شکل نگه داشت یا آن را به صورت $(377\text{rad/s})t$ یا $(377\text{s}^{-1})t$ نوشت.

(ب) معادلهٔ جریان $i_R(t)$ در مقاومت چگونه است و I_R، دامنهٔ تابع i_R چقدر است؟

حل: در اینجا **نکتهٔ کلیدی** این است که در مدار ac با بار مقاومتی خالص، جریان متناوب در مقاومت $i_R(t)$، و اختلاف پتانسیل متناوب دو سر مقاومت $v_R(t)$، همفازند؛ یعنی، ثابت فاز ϕ مربوط به این جریان صفر است. پس، معادلهٔ ۳۳ـ۲۹ را می‌توان چنین نوشت

$$i_R = I_R\sin(\omega_d t-\phi) = I_R\sin\omega_d t \qquad (۳۳\text{-}۳۵)$$

دامنهٔ I_R از معادلهٔ ۳۳ـ۳۳ به دست می‌آید:

$$I_R = \frac{V_R}{R} = \frac{36{,}0\,\text{V}}{200\Omega} \quad \Rightarrow$$

$$I_R = 0{,}180\,\text{A} \qquad \text{(پاسخ)}$$

با جانشانی این مقدار و $\omega_d=2\pi f_d=120\pi$ در معادلهٔ ۳۳ـ۳۵، داریم

$$i_R = (0{,}180\,\text{A})\sin(120\pi t) \qquad \text{(پاسخ)}$$

خودآزمایی ۳: اگر در یک مدار با بار مقاومتی خالص بسامد راه‌انداز را افزایش دهیم، آیا (الف) دامنهٔ V_R و (ب) دامنهٔ I_R، افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد، یا ثابت می‌ماند؟

بار خازنی

شکل ۳۳-۹ الف، مداری شامل یک ظرفیت و یک مولد با نیروی محرک الکتریکی متناوب با معادلهٔ ۳۳-۲۸ را نشان می‌دهد. با استفاده از قاعدهٔ حلقه و دنبال کردن روش به کار رفته برای به دست آوردن معادلهٔ ۳۳-۳۰، اختلاف پتانسیل دو سر خازن برابر است با:

$$v_C = V_C \sin\omega_d t \qquad (۳۳\text{-}۳۶)$$

که در آن V_C دامنهٔ ولتاژ متناوب دو سر خازن است. با توجه به تعریف ظرفیت می‌توان نوشت

$$q_C = Cv_C = CV_C \sin\omega_d t \qquad (۳۳\text{-}۳۷)$$

اما چون به جای بار الکتریکی، جریان مورد نظر است، از معادلهٔ ۳۳-۳۷ مشتق می‌گیریم. در نتیجه، داریم

$$i_C = \frac{dq_C}{dt} = \omega_d CV_C \cos\omega_d t \qquad (۳۳\text{-}۳۸)$$

اکنون، معادلهٔ ۳۳-۳۸ را از دو جنبه اصلاح می‌کنیم. نخست به دلیل تقارن در نمادگذاری، کمیت X_C را که **رآکتانس خازنی** یک خازن نام دارد، به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$X_C = \frac{1}{\omega_d C} \quad \text{(رآکتانس خازنی)} \qquad (۳۳\text{-}۳۹)$$ ■

مقدار این کمیت نه تنها به ظرفیت بلکه به بسامد زاویه‌ای راه‌انداز ω_d، نیز بستگی دارد. می‌دانیم که با توجه به تعریف ثابت زمانی خازنی $(\tau=RC)$ یکای SI ظرفیت C را به صورت ثانیه بر اهم هم می‌توان نوشت. با توجه به این موضوع معادلهٔ ۳۳-۳۹ نشان می‌دهد که یکای SI مربوط به X_C مانند یکای مقاومت R، اهم است.

جنبهٔ دیگر این است که در معادلهٔ ۳۳-۳۸ به جای $\cos\omega_d t$، سینوس با جابه‌جایی فاز را قرار دهیم:

$$\cos\omega_d t = \sin(\omega_d t + 90°)$$

این اتحاد را با جابه‌جاکردن منحنی سینوسی به اندازهٔ ۹۰ درجه در جهت منفی، می‌توان تحقیق کرد.

با توجه به این دو جنبهٔ اصلاحی، معادلهٔ ۳۳-۳۸ به صورت زیر در می‌آید

$$i_C = \left(\frac{V_C}{X_C}\right)\sin(\omega_d t + 90°) \qquad (۳۳\text{-}۴۰)$$

با استفاده از معادلهٔ ۳۳-۲۹ معادلهٔ i_C، جریان مربوط به خازن C را می‌توان چنین نوشت:

$$i_C = I_C \sin(\omega_d t - \phi) \qquad (۳۳\text{-}۴۱)$$

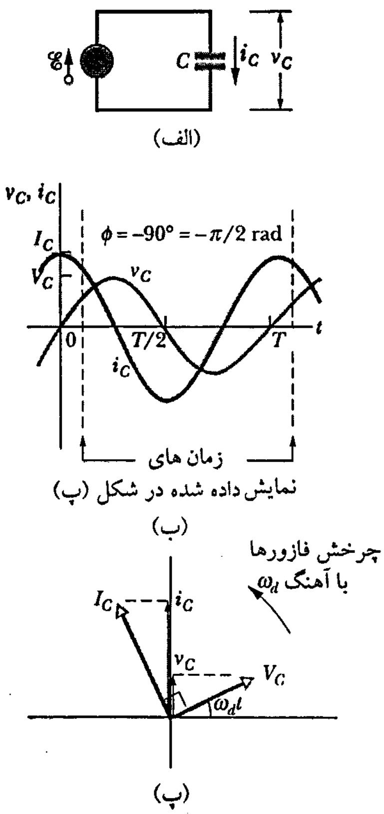
که در آن I_C دامنهٔ تابع i_C است. از مقایسهٔ معادله‌های ۳۳-۴۰ و ۳۳-۴۱، معلوم می‌شود که برای یک بار خازنی خالص ثابت فاز مربوط به جریان ϕ، برابر با، ۹۰- درجه است. هم‌چنین، مشاهده می‌شود که رابطهٔ دامنهٔ ولتاژ با دامنهٔ جریان به صورت زیر است

$$V_C = I_C X_C \quad \text{(خازن)} \qquad (۳۳\text{-}۴۲)$$ ■

اگرچه این معادله مربوط به مدار شکل ۳۳-۹ الف است، در مورد هر ظرفیتی در هر مداری صادق است.

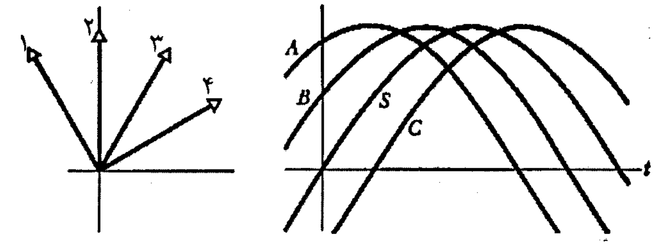
مقایسهٔ معادله‌های ۳۳-۳۶ و ۳۳-۴۰، یا بررسی شکل ۳۳-۹ ب، نشان می‌دهد که کمیت‌های v_C و i_C به اندازه ۹۰ درجه، یا یک چهارم چرخه، اختلاف فاز دارند. علاوه بر این، مشاهده می‌کنیم که i_C نسبت به v_C تقدم فاز دارد، یعنی اگر جریان i_C و اختلاف پتانسیل v_C در مدار شکل ۳۳-۹ الف را بپاییم، درمی‌یابیم که i_C به اندازهٔ یک چهارم چرخه پیش از v_C، به مقدار بیشینهٔ خود می‌رسد.

رابطهٔ میان i_C و v_C در نمودار فازوری شکل ۳۳-۹ پ نشان داده شده است. وقتی فازورهای نمایش دهندهٔ این دو کمیت به طور پادساعتگرد می‌چرخند، فازور با نشانهٔ I به اندازهٔ ۹۰ درجه از فازور با نشانهٔ V_C جلوتر است؛ یعنی فازور I_C به اندازهٔ یک چهارم چرخه پیش از فازور V_C بر محور قائم منطبق می‌شود. تحقیق کنید که نمودار فازوری شکل ۳۳-۹ پ، با معادله‌های ۳۳-۳۶ و ۳۳-۴۰ سازگار است.



شکل ۳۳-۹ (الف) خازنی به دو سر یک مولد جریان متناوب وصل شده است. (ب) جریان خازن به اندازهٔ ۹۰ درجه (مساوی با $\pi/2$rad) نسبت به ولتاژ تقدم فاز دارد. (پ) نمودار فازوری، که همان مفهوم را نشان می‌دهد.

خودآزمایی ۴: در شکل زیر، شکل (الف) یک منحنی سینوسی با معادلهٔ $S(t)=\sin(\omega_d t)$ را نشان می‌دهد و سه منحنی سینوسی دیگر $A(t)$، $B(t)$ و $C(t)$، همه با معادلهٔ $\sin(\omega_d t-\phi)$ نشان داده می‌شوند. (الف) سه منحنی دیگر را با توجه به کمیت ϕ، از مثبت‌ترین تا منفی‌ترین مقدار، مرتب کنید. (ب) کدام منحنی متناظر با کدام فازور در شکل (ب) است؟ (پ) کدام منحنی مقدم بر منحنی‌های دیگر است؟



(ب) (الف)

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۳ـ۵

بار خازنی خالص. در شکل ۳۳ـ۹ الف، ظرفیت C برابر با ۱۵٫۰μF است و مولد نیروی محرک الکتریکی متناوب سینوسی با دامنهٔ $\mathscr{E}_m=$۳۶٫۰V و بسامد $f_d=$۶۰٫۰Hz کار می‌کند.

(الف) معادلهٔ اختلاف پتانسیل دو سر خازن $v_C(t)$ چگونه است و V_C، دامنهٔ تابع $v_C(t)$ چقدر است؟

حل: اگر در مدار شکل ۳۳ـ۹ الف، از قاعدهٔ حلقه استفاده کنیم، به این **نکتهٔ کلیدی** می‌رسیم که: در یک مدار با بار خازنی خالص اختلاف پتانسیل دو سر خازن $v_C(t)$، همیشه برابر با $\mathscr{E}(t)$، اختلاف پتانسیل دو سر مولد نیروی محرک الکتریکی، است. بنابراین، داریم $v_C(t)=\mathscr{E}(t)$ و $V_C=\mathscr{E}_m$. چون $\mathscr{E}_m$ معلوم است، داریم

$$V_C=\mathscr{E}_m=\text{۳۶٫۰V} \qquad \text{(پاسخ)}$$

برای پیدا کردن $v_C(t)$، با استفاده از معادلهٔ ۳۳ـ۲۸ چنین می‌نویسیم:

$$v_C(t)=\mathscr{E}(t)=\mathscr{E}_m\sin\omega_d t \qquad \text{(۳۳ـ۴۳)}$$

سپس، با جانشانی ۳۶٫۰V$=\mathscr{E}_m$ و $\omega_d=2\pi f_d=$۱۲۰π در معادلهٔ ۳۳ـ۴۳، داریم

$$v_C=(\text{۳۶٫۰V})\sin(\text{۱۲۰}\pi t) \qquad \text{(پاسخ)}$$

(ب) معادلهٔ جریان $i_C(t)$ در مدار به صورت تابعی از زمان چگونه است و I_C، دامنهٔ تابع $i_C(t)$ چقدر است؟

حل: در اینجا **نکتهٔ کلیدی** این است که در یک مدار ac شامل بار خازنی خالص جریان متناوب $i_C(t)$ در خازن به اندازهٔ ۹۰ درجه نسبت به اختلاف پتانسیل $v_C(t)$، تقدم فاز دارد؛ یعنی، ثابت فاز ϕ مربوط به جریان ۹۰- درجه یا $-\pi/2$rad است. پس، معادلهٔ ۳۳ـ۲۹ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$i_C=I_C\sin(\omega_d t-\phi)=I_C\sin(\omega_d t+\pi/2) \qquad \text{(۳۳ـ۴۴)}$$

نکتهٔ کلیدی دیگر این است که اگر نخست رآکتانس خازنی X_C را به دست آوریم با استفاده از معادلهٔ ۳۳ـ۴۲ ($V_C=I_CX_C$) می‌توانیم دامنهٔ I_C را پیدا کنیم. با استفاده از معادلهٔ ۳۳ـ۳۹ ($X_C=1/\omega_d C$) به ازای $\omega_d=2\pi f_d$، داریم

$$X_C=\frac{1}{2\pi f_d C}=\frac{1}{(2\pi)(\text{۶۰٫۰Hz})(\text{۱۵٫۰}\times 10^{-6}\text{F})}=\text{۱۷۷}\Omega$$

پس، دامنهٔ جریان با استفاده از معادلهٔ ۳۳ـ۴۲ برابر است با:

$$I_C=\frac{V_C}{X_C}=\frac{\text{۳۶٫۰V}}{\text{۱۷۷}\Omega} \Rightarrow$$

$$I_C=\text{۰٫۲۰۳A} \qquad \text{(پاسخ)}$$

با جانشانی این مقدار و $\omega_d=2\pi f_d=$۱۲۰π در معادلهٔ ۳۳ـ۴۴، داریم

$$i_C=(\text{۰٫۲۰۳A})\sin(\text{۱۲۰}\pi t+\pi/2) \qquad \text{(پاسخ)}$$

خودآزمایی ۵: اگر در یک مدار شامل بار خازنی خالص بسامد راه‌انداز را افزایش دهیم، آیا (الف) دامنهٔ V_C و (ب) دامنهٔ I_C، افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد، یا ثابت می‌ماند؟

بار القایی

شکل ۳۳ـ۱۰ الف، مداری را شامل یک القاگر و یک مولد با نیروی محرک الکتریکی متناوب با معادلهٔ ۳۳ـ۲۸ نشان می‌دهد. با استفاده از قاعدهٔ حلقه و دنبال کردن روش به کار رفته در به دست آوردن معادلهٔ ۳۳ـ۳۰، معلوم می‌شود که اختلاف پتانسیل دو سر القاگر برابر است با:

$$v_L=V_L\sin\omega_d t \qquad \text{(۳۳ـ۴۵)}$$

که در آن V_L دامنهٔ تابع ولتاژ v_L است. با استفاده از معادلهٔ ۳۱ـ۳۷ که در آن جریان با آهنگ di_L/dt تغییر

می‌کند، می‌توان اختلاف پتانسیل دو سر القاگر L را به صورت زیر نوشت

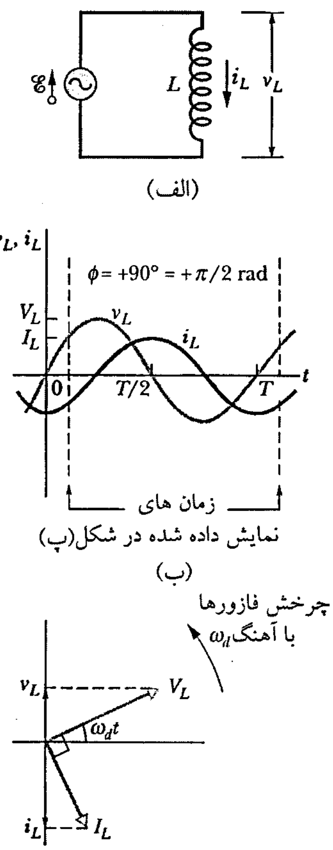
$$v_L = L\frac{di_L}{dt} \qquad (۴۶\text{-}۳۳)$$

اگر معادله‌های ۳۳-۴۵ و ۳۳-۴۶ را با هم ترکیب کنیم، داریم

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{V_L}{L}\sin\omega_d t \qquad (۴۷\text{-}۳۳)$$

اما چون تعیین جریان مورد نظر است نه مشتق آن نسبت به زمان، با انتگرال‌گیری از معادلهٔ ۳۳-۴۷، معادلهٔ جریان را چنین به دست می‌آوریم

$$i_L = \int di_L = \frac{V_L}{L}\int \sin\omega_d t dt = -\left(\frac{V_L}{\omega_d L}\right)\cos\omega_d t \qquad (۴۸\text{-}۳۳)$$



شکل ۳۳-۱۰ (الف) القاگری بـه دو سـر یک مولد جریان متناوب وصل شـده است. (ب) جریان القاگر به اندازهٔ ۹۰ درجـه (مساوی بـا $\pi/2$rad) نسبت به ولتاژ تأخیر فاز دارد. (پ) نـمودار فـازوری، کـه هـمان مـفهوم را نشـان می‌دهد.

اکنون این معادله را از دو جنبه اصلاح می‌کنیم. نخست به دلیل تقارن در نمادگذاری، کمیت X_L را، کـه **رآکتانس القایی** یک القاگر نام دارد، به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$X_L = \omega_d L \qquad \text{(رآکتانس القایی)} \qquad (۴۹\text{-}۳۳)$$ ■

مقدار X_L به بسامد زاویه‌ای راه‌انداز ω_d، بستگی دارد. یکای ثابت زمانی القایی τ_L نشان می‌دهد که یکای SI رآکتانس X_L مانند یکای X_C و R، اهم است.

جنبهٔ دیگر این است که در معادلهٔ ۳۳-۴۸ به جای $-\cos\omega_d t$، سینوس با جابه‌جایی فاز را قرار دهیم:

$$-\cos\omega_d t = \sin(\omega_d t - ۹۰°)$$

این اتحاد را با جابه‌جا کردن منحنی سینوسی به اندازهٔ ۹۰ درجه در جهت مثبت، می‌توان تحقیق کرد.

با در نظر گرفتن این تغییرات، معادلهٔ ۳۳-۴۸ به صورت زیر در می‌آید

$$i_L = \left(\frac{V_L}{X_L}\right)\sin(\omega_d t - ۹۰°) \qquad (۵۰\text{-}۳۳)$$

با توجه به معادلهٔ ۳۳-۲۹، معادلهٔ جریان القاگر را به صورت زیر هم می‌توان نوشت

$$i_L = I_L\sin(\omega_d t - \phi) \qquad (۵۱\text{-}۳۳)$$

که در آن I_L دامنهٔ جریان i_L است. از مقایسهٔ معادله‌های ۳۳-۵۰ و ۳۳-۵۱، معلوم می‌شود که برای یک بار القایی خالص، ثابت فاز مربوط به جریان ϕ، برابر با ۹۰+ درجه است. هم‌چنین، مشاهده می‌شود کـه رابـطهٔ دامنهٔ ولتاژ با دامنهٔ جریان به صورت زیر است

$$V_L = I_L X_L \qquad \text{(القاگر)} \qquad (۵۲\text{-}۳۳)$$ ■

اگرچه این معادله مربوط به مدار شکل ۳۳-۱۰ الف است، در مورد هر القاگری در هر مدار ac صادق است.

مقایسهٔ معادله‌های ۳۳-۴۵ و ۳۳-۵۰، یا بررسی شکل ۳۳-۱۰ ب، نشان می‌دهد که کمیت‌های i_L و v_L به اندازهٔ ۹۰ درجه با هم اختلاف فاز دارند. اما در این حالت، i_L نسبت به v_L تأخیر فاز دارد؛ یعنی، اگر جریان i_L و اختلاف پتانسیل v_L در مدار شکل ۳۳-۱۰ الف را بپاییم، در می‌یابیم که i_L به اندازهٔ یک چهارم چرخه پس از v_L به مقدار بیشینهٔ خود می‌رسد.

نمودار فازوری شکل ۳۳-۱۰ پ نیز همین اطلاعات را به دست می‌دهد. در حین چرخـیدن فـازورها در جهت پادساعتگرد در شکل، فازور با نشانهٔ I_L به اندازهٔ ۹۰ درجه از فازور با نشانهٔ V_L عقب‌تر است. تحقیق کنید که شکل ۳۳-۱۰ پ معادله‌های ۳۳-۴۵ و ۳۳-۵۰ را نمایش می‌دهد.

روشهای مسأله حل کردن

روش ۱: تقدم و تأخیر فاز در مدارهای AC

در جدول ۳۳-۲ رابطه‌های میان جریان i و ولتاژ v برای هر سه نـوع عـنصر مداری مورد مطالعه درج شده است. وقتی اعمال کردن یک ولتاژ متناوب به این عنصرها یک جریان متناوب تولید می‌کند، جریان با ولتاژ دو سر مقاومت همفاز است، نسبت به ولتاژ دو سر خازن تقدم فاز، و نسبت به ولتاژ دو سر

جدول ۳۳ـ۲ رابطه‌های مربوط به فاز و دامنه برای جریان‌ها و ولتاژهای متناوب

عنصر	نماد	مقاومت یا رآکتانس	فاز جریان	ثابت فاز (یا زاویهٔ) ϕ	رابطهٔ دامنه
مقاومت	R	R	همفاز با v_R	۰° (مساوی با ۰rad)	$V_R = I_R R$
خازن	C	$X_C = 1/\omega_d C$	۹۰ درجه جلوتر از v_C	۹۰°- (مساوی با $-\frac{\pi}{2}$rad)	$V_C = I_C X_C$
القاگر	L	$X_L = \omega_d L$	۹۰ درجه عقب‌تر از v_C	۹۰°+ (مساوی با $\frac{\pi}{2}$rad)	$V_L = I_L X_L$

القاگر تأخیر فاز دارد.

این مفاهیم را می‌توان با عبارت‌های یادآورندهٔ حافظه "ELI" و "ICE" خلاصه کرد. ELI شامل L (برای القاگر)، I (برای جریان) و حرف E (برای نیروی محرک الکتریکی) است. بنابراین، در القاگر جریان عقب‌تر از ولتاژ است. به همین ترتیب، ICE (که شامل خازن C است) بدین معناست که جریان جلوتر از ولتاژ است.

اگر در یادآوری اینکه X_C برابر با $\omega_d C$ (نادرست) یا $\frac{1}{\omega_d C}$ (درست) است، دچار مشکلی شدید سعی کنید بیاد بیاورید که C در مخرج کسر است.

مسألهٔ نمونهٔ ۳۳ـ۶

بار القایی خالص. در شکل ۳۳ـ۱۰ الف، القاییدگی L برابر با ۲۳۰mH است و مولد نیروی محرک الکتریکی متناوب سینوسی با دامنهٔ $\mathscr{E}_m$=۳۶٫۰V و بسامد f_d=۶۰٫۰Hz کار می‌کند.

(الف) معادلهٔ اختلاف پتانسیل دو سر القاگر $v_L(t)$، چگونه است و V_L، دامنهٔ تابع $v_L(t)$ چقدر است؟

حل: اگر در مدار شکل ۳۳ـ۱۰ الف، از قاعدهٔ حلقه استفاده کنیم، به این **نکتهٔ کلیدی** می‌رسیم که: در یک مدار با بار القایی خالص اختلاف پتانسیل دو سر القاگر $v_L(t)$، همیشه برابر با $\mathscr{E}(t)$، اختلاف پتانسیل دو سر مولد نیروی محرک الکتریکی است. بنابراین، داریم $v_L(t)=\mathscr{E}(t)$ و $V_L=\mathscr{E}_m$. چون $\mathscr{E}_m$ معلوم است، داریم

$$V_L = \mathscr{E}_m = ۳۶٫۰\text{V} \qquad \text{(پاسخ)}$$

برای پیدا کردن $v_L(t)$، با استفاده از معادلهٔ ۳۳ـ۲۸ چنین می‌نویسیم

$$v_L(t) = \mathscr{E}(t) = \mathscr{E}_m \sin\omega_d t \qquad (۵۳\text{-}۳۳)$$

با جانشانی $\mathscr{E}_m$=۳۶٫۰V و $\omega_d=2\pi f_d$=۱۲۰π در معادلهٔ ۳۳ـ۵۳، داریم

$$v_L = (۳۶٫۰\text{V})\sin(۱۲۰\pi t) \qquad \text{(پاسخ)}$$

(ب) معادلهٔ جریان $i_L(t)$ در مدار به صورت تابعی از زمان چگونه است و I_L دامنهٔ تابع $i_L(t)$ چقدر است؟

حل: در اینجا **نکتهٔ کلیدی** این است که در یک مدار ac شامل بار القایی خالص، جریان متناوب $i_L(t)$ در القاگر به اندازهٔ ۹۰ درجه نسبت به اختلاف پتانسیل $v_L(t)$ تأخیر فاز دارد. (در یادآورندهٔ حافظه روش ۱ مسأله حل کردن، این موضوع با "ELI" مشخص شد). بنابراین، ثابت فاز ϕ مربوط به جریان ۹۰+ درجه یا $+\pi/2$rad است و معادلهٔ ۳۳ـ۲۹ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$i_L = I_L \sin(\omega_d t-\phi) = I_L \sin(\omega_d t-\pi/2) \qquad (۵۴\text{-}۳۳)$$

نکتهٔ کلیدی دیگر این است که اگر نخست رآکتانس القایی X_L را به دست آوریم، با استفاده از معادلهٔ ۳۳ـ۵۲ $(V_L = I_L X_L)$ می‌توانیم دامنهٔ I_L را پیدا کنیم. با استفاده از معادلهٔ ۳۳ـ۴۹ $(X_L = \omega_d L)$ به ازای $\omega_d=2\pi f_d$، داریم

$$X_L = 2\pi f_d L = (2\pi)(۶۰٫۰\text{Hz})(۲۳۰\times۱۰^{-۳}\text{H}) = ۸۶٫۷\Omega$$

در این صورت، معادلهٔ ۳۳ـ۵۲ نشان می‌دهد که دامنه جریان برابر است با:

$$I_L = \frac{V_L}{X_L} = \frac{۳۶٫۰\text{V}}{۸۶٫۷\Omega} \Rightarrow$$

$$I_L = ۰٫۴۱۵\text{A} \qquad \text{(پاسخ)}$$

با جانشانی این مقدار و $\omega_d=2\pi f_d$=۱۲۰π در معادلهٔ ۳۳ـ۵۴، داریم

$$i_L = (۰٫۴۱۵\text{A})\sin(۱۲۰\pi t - \pi/2) \qquad \text{(پاسخ)}$$

خودآزمایی ۶: اگر در یک مدار شامل بار القایی خالص بسامد راه‌انداز را افزایش دهیم، آیا (الف) دامنهٔ V_L و (ب) دامنهٔ I_L، افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد، یا ثابت می‌ماند؟

۳۳ـ۹ مدار RLC سری

اکنون می‌توان نیروی محرک الکتریکی متناوب معادلهٔ ۳۳ـ۲۸، به صورت

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_m \sin\omega_d t \qquad \text{(نیروی محرک الکتریکی اعمال شده)} \qquad (۵۵\text{-}۳۳)$$

را به مدار RLC کامل شکل ۳۳ـ۷ اعمال کرد. چون R، L و C به صورت سری هستند، جریانی به معادلهٔ زیر در هر سه عنصر برقرار می‌شود:

$$i = I\sin(\omega_d t - \phi) \qquad (۵۶\text{-}۳۳)$$

می‌خواهیم دامنهٔ جریان I و ثابت فاز ϕ را پیدا کنیم. حل کردن این مسأله با استفاده از نمودارهای فازوری آسان است.

دامنهٔ جریان

اکنون مطالعهٔ خود را با شکل ۳۳ـ۱۱ الف، که نشان دهندهٔ فازور نمایشگر جریان به معادلهٔ ۳۳ـ۵۶ در هر زمان اختیاری t است، آغاز می‌کنیم. طول این فازور دامنهٔ جریان I، تصویر فازور روی محور قائم جریان i در زمان t، و زاویهٔ چرخش فازور، فاز $\omega_d t-\phi$ جریان در زمان t است.

شکل ۳۳ـ۱۱ ب، فازورهای نمایشگر ولتاژهای دو سر R، L و C را در همان زمان t نشان می‌دهد. جهت هر فازور نسبت به زاویهٔ چرخش فازور جریان I در شکل ۳۳ـ۱۱ الف، بر پایهٔ اطلاعات جدول ۳۳ـ۲ مشخص شده است:

مقاومت: در اینجا جریان و ولتاژ همفازند، در نتیجه، زاویهٔ چرخش فازور و ولتاژ V_R، همان زاویهٔ چرخش فازور جریان I است.

خازن: در اینجا جریان ۹۰ درجه نسبت به ولتاژ تقدم فاز دارد، در نتیجه، زاویهٔ چرخش فازور ولتاژ V_C، ۹۰ درجه کمتر از زاویهٔ چرخش فازور جریان I است.

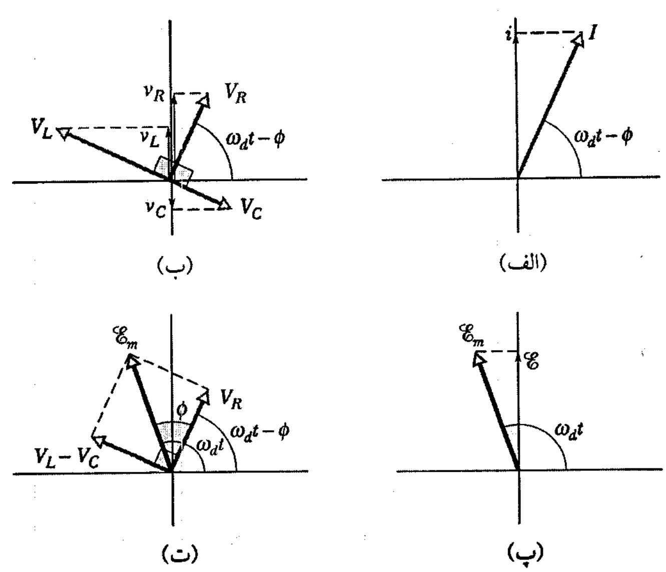
القاگر: در اینجا جریان ۹۰ درجه نسبت به ولتاژ تأخیر فاز دارد، در نتیجه، زاویهٔ چرخش فازور ولتاژ V_L، ۹۰ درجه بیشتر از زاویهٔ چرخش فازور جریان I است.

شکل ۳۳ـ۱۱ ب، نمودارهای ولتاژهای لحظه‌ای v_R، v_C و v_L دو سر R، C و L در زمان t را نیز نشان می‌دهد؛ این ولتاژها تصویرهای فازورهای متناظر در روی محور قائم شکل هستند.

شکل ۳۳ـ۱۱ پ، فازور نمایشگر نیروی محرک الکتریکی اعمال شده با معادلهٔ ۳۳ـ۵۵ را نشان می‌دهد. طول این فازور دامنهٔ نیروی محرک الکتریکی $\mathscr{E}_m$، تصویر فازور روی محور قائم نیروی محرک الکتریکی $\mathscr{E}$ در زمان t و زاویهٔ چرخش فازور، فاز $\omega_d t$ نیروی محرک الکتریکی در زمان t است.

با توجه به قاعدهٔ حلقه می‌دانیم که در هر لحظه مجموع ولتاژهای v_R، v_C و v_L برابر با نیروی محرک الکتریکی اعمال شدهٔ $\mathscr{E}$ است:

$$\mathscr{E} = v_R + v_C + v_L \tag{۳۳-۵۷}$$



شکل ۳۳ـ۱۱ (الف) نمودار فازور نمایشگر جریان متناوب در مدار RLC شکل ۳۳ـ۷ در زمان t. دامنهٔ I، مقدار لحظه‌ای i، و فاز $(\omega_d t-\phi)$ نشان داده شده است (ب) نمودار فازورهای نمایشگر ولتاژهای دو سر القاگر، دو سر مقاومت و دو سر خازن، نسبت به جهت فازور جریان در شکل (الف). (پ) نمودار فازور نمایشگر نیروی محرک الکتریکی متناوب راه‌انداز جریان در شکل (الف). (ت) فازور نیروی محرک الکتریکی برابر با جمع برداری سه فازور ولتاژ شکل (ب) است. در اینجا فازورهای ولتاژ V_L و V_C با هم جمع شده‌اند تا فازور برایند (V_L-V_C) را به‌دست بدهند.

بنابراین، در زمان t تصویر $\mathscr{E}$ در شکل ۳۳-۱۱ پ برابر با مجموع جبری تصویرهای v_R، v_C و v_L در شکل ۳۳-۱۱ ب، است. در واقع، هنگامی که فازورها با هم می‌چرخند این تساوی همیشه برقرار است. منظور این است که فازور $\mathscr{E}_m$ در شکل ۳۳-۱۱ پ باید با جمع برداری سه فازور ولتاژ V_R، V_C و V_L در شکل ۳۳-۱۱ ب، برابر باشد.

شکل ۳۳-۱۱ ت، نشان می‌دهد که بر پایهٔ این شرط فازور $\mathscr{E}_m$ به صورت مجموع فازورهای V_R، V_L و V_C رسم شده است. چون فازورهای V_L و V_C در شکل ناهمسو هستند این جمع برداری نخست با ترکیب کردن V_L و V_C به صورت $V_L - V_C$، ساده می‌شود و سپس حاصل این دو فازور با V_R ترکیب می‌شود تا فازور برایند به دست آید. فازور برایند، چنانکه نشان داده شده است، باید دوباره بر فازور $\mathscr{E}_m$ منطبق شود.

هر دو مثلث نشان داده شده در شکل ۳۳-۱۱ ت راستگوشه هستند. بنابراین، با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس برای هر مثلث، داریم

$$\mathscr{E}_m^2 = V_R^2 + (V_L - V_C)^2 \tag{۳۳-۵۸}$$

این معادله را با توجه به اطلاعات مندرج در جدول ۳۳-۲، می‌توان به صورت زیر باز نوشت

$$\mathscr{E}_m^2 = (IR)^2 + (IX_L - IX_C)^2 \tag{۳۳-۵۹}$$

در این صورت، نتیجه می‌گیریم که:

$$I = \frac{\mathscr{E}_m}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \tag{۳۳-۶۰}$$

مخرج معادلهٔ ۳۳-۶۰ را **امپدانس** مدار Z، برای بسامد زاویه‌ای راه‌انداز ω_d می‌نامند:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad \text{(تعریف امپدانس)} \tag{۳۳-۶۱}$$ ■

اکنون، معادله ۳۳-۶۰ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$I = \frac{\mathscr{E}_m}{Z} \tag{۳۳-۶۲}$$

اگر مقادیر X_C و X_L را از معادله‌های ۳۳-۳۹ و ۳۳-۴۹ جانشانی کنیم، می‌توانیم معادلهٔ ۳۳-۶۰ را چنین بنویسیم:

$$I = \frac{\mathscr{E}_m}{\sqrt{R^2 + (\omega_d L - 1/\omega_d C)^2}} \quad \text{(دامنهٔ جریان)} \tag{۳۳-۶۳}$$ ■

اکنون، به نیمهٔ هدف مورد نظر خود دست یافته‌ایم: یعنی، برای دامنهٔ جریان I برحسب نیروی محرک الکتریکی راه‌انداز سینوسی و عنصرهای مداری مربوط به مدار RLC سری رابطه‌ای به دست آورده‌ایم.

مقدار I در معادلهٔ ۳۳-۶۳ به تفاضل میان $\omega_d L$ و $1/\omega_d C$ یا، به طور هم‌ارز، در معادلهٔ ۳۳-۶۰ به تفاضل میان X_L و X_C بستگی دارد. در هر یک از این معادله‌ها مهم نیست که کدام رآکتانس بزرگتر است زیرا همیشه تفاضل آنها مجذور می‌شود.

جریان توصیف شده در این بخش، **جریان حالت پایا** است که اندک زمانی پس از اعمال شدن نیروی محرک الکتریکی متناوب، از مدار می‌گذرد. در آغاز وقتی که نیروی محرک الکتریکی به مداری اعمال شد در مدت کوتاهی یک **جریان گذرا** در مدار برقرار می‌شود. مدت دوام این جریان گذرا (پیش از برقرار شدن جریان حالت پایا) با ثابت‌های زمانی $\tau_L = L/R$ و $\tau_C = RC$، در حین «راه افتادن» عنصرهای القایی و خازنی، معین می‌شود. جریان گذرا می‌تواند زیاد باشد و حتی می‌تواند، مثلاً، برای یک موتور، که در طراحی‌اش چنین اثری پیش‌بینی نشده است، مخرب باشد.

ثابت فاز

با توجه به مثلث فازوری سمت راست در شکل ۳۳-۱۱ ت و با استفاده از جدول ۳۳-۲، می‌توان نوشت

$$\tan\phi = \frac{V_L - V_C}{V_R} = \frac{IX_L - IX_C}{IR} \tag{۳۳-۶۴}$$

و از آنجا، داریم

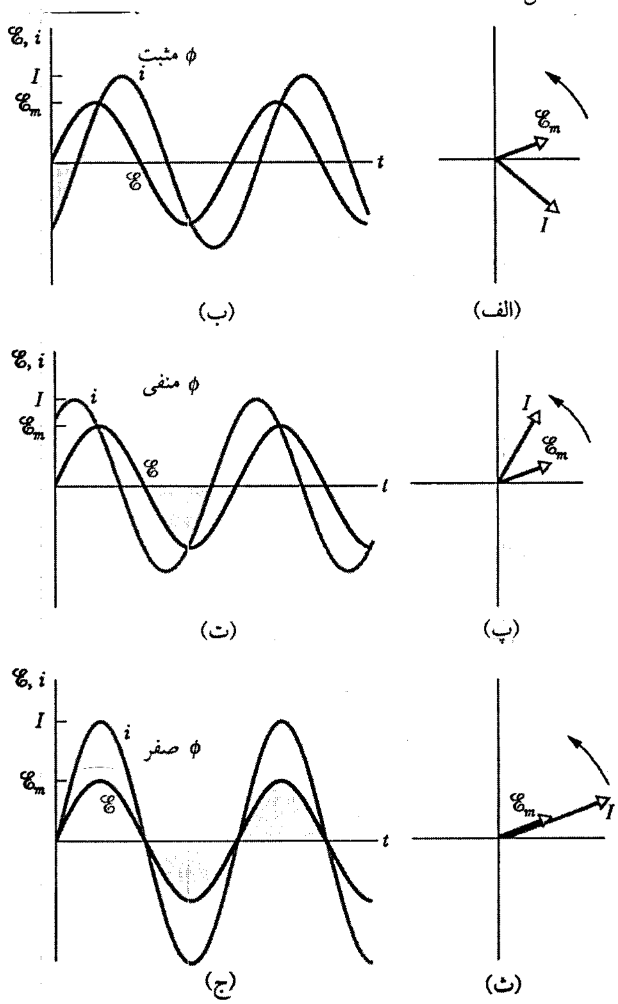
$$\tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R} \qquad \text{(ثابت فاز)} \qquad (۶۵\text{-}۳۳)$$

■

این معادله نیمهٔ دیگر هدف ما بود: یعنی به دست آوردن ثابت فاز ϕ در یک مدار RLC سری با نیروی محرک الکتریکی راه‌انداز سینوسی. در اصل، بسته به مقادیر نسبی X_L و X_C، سه نتیجهٔ متفاوت برای ثابت فاز به‌دست می‌آید:

$X_L > X_C$: در این مدار اثر القایی از اثر خازنی بیشتر است. معادلهٔ ۳۳-۶۵ نشان می‌دهد که برای چنین مداری ϕ مثبت است، یعنی، فازور I در عقب فازور $\mathscr{E}_m$ می‌چرخد (شکل ۳۳-۱۲ الف). نمودارهای $\mathscr{E}$ و i برحسب زمان مانند شکل ۳۳-۱۲ ب هستند. (شکل‌های ۳۳-۱۱ پ و ت، با فرض $X_L > X_C$ رسم شده‌اند).

$X_C > X_L$: در این مدار اثر خازنی از اثر القایی بیشتر است. معادلهٔ ۳۳-۶۵ نشان می‌دهد که برای چنین مداری ϕ منفی است، یعنی فازور I در جلو فازور $\mathscr{E}_m$ می‌چرخد (شکل ۳۳-۱۲ پ). نمودارهای $\mathscr{E}$ و i برحسب زمان، مانند شکل ۳۳-۱۲ ت هستند.



شکل ۳۳-۱۲ نمودارهای فازوری و منحنی‌های نیروی محرک الکتریکی متناوب $\mathscr{E}$ و جریان i مربوط به مدار RLC شکل ۳۳-۷. در نمودار فازوری شکل (الف) و منحنی‌های شکل (ب)، جریان i نسبت به نیروی محرک الکتریکی راه‌انداز $\mathscr{E}$ تأخیر فاز دارد و ثابت فاز جریان ϕ، مثبت است. در شکل‌های (پ) و (ت)، جریان i نسبت به نیروی محرک الکتریکی راه‌انداز $\mathscr{E}$ تقدم فاز دارد و ثابت فاز ϕ منفی است. در شکل‌های (ث) و (ج)، جریان i با نیروی محرک الکتریکی $\mathscr{E}$ همفاز و ثابت فاز ϕ، صفر است.

$X_C = X_L$: در این حالت مدار در حال تشدید است و این، موضوعی است که بعداً مورد بحث قرار خواهد گرفت. معادلهٔ ۳۳ـ۶۵ نشان می‌دهد که برای چنین مداری، داریم $\phi=0°$، یعنی فازورهای $\mathscr{E}_m$ و I با هم می‌چرخند (شکل ۳۳ـ۱۲ ث). نمودارهای $\mathscr{E}$ و i برحسب زمان مانند شکل ۳۳ـ۱۲ ج هستند.

اکنون به عنوان تحلیل بیشتر، دو مدار فرین را در نظر می‌گیریم: در مدار القایی خالص شکل ۳۳ـ۱۰ الف، که X_L ناصفر و $X_C=R=0$ است، معادلهٔ ۳۳ـ۶۵ نشان می‌دهد که $\phi=+90°$ (بیشترین مقدار ϕ)، و این نتیجه با شکل ۳۳ـ۱۰ پ سازگار است. در مدار خازنی خالص شکل ۳۳ـ۹ الف، که X_C ناصفر و $X_L=R=0$ است، معادلهٔ ۳۳ـ۶۵ نشان می‌دهد که $\phi=-90°$ (کمترین مقدار ϕ)، و این نتیجه با شکل ۳۳ـ۹ پ سازگار است.

تشدید

معادلهٔ ۳۳ـ۶۳ دامنهٔ جریان I، را در یک مدار RLC به صورت تابعی از بسامد زاویه‌ای راه‌انداز ω_d نیروی محرک الکتریکی متناوب خارجی، به دست می‌دهد. به ازای مقاومت معلوم R، دامنهٔ جریان هنگامی بیشینه است که کمیت $\omega_d L-1/\omega_d C$ در مخرج صفر باشد، یعنی داشته باشیم

$$\omega_d L = \frac{1}{\omega_d C}$$

یا

$$\omega_d = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (I \text{ بیشینه}) \qquad (۳۳\text{ـ}۶۶)$$

چون ω، بسامد زاویه‌ای طبیعی مدار RLC نیز برابر با $1/\sqrt{LC}$ است، مقدار بیشینهٔ I هنگامی ظاهر می‌شود که بسامد زاویه‌ای راه‌انداز با بسامد زاویه‌ای طبیعی همساز باشد، یعنی تشدید رخ دهد. بنابراین، در یک مدار RLC تشدید و دامنهٔ جریان بیشینهٔ I هنگامی به وجود می‌آیند که شرط زیر برقرار باشد

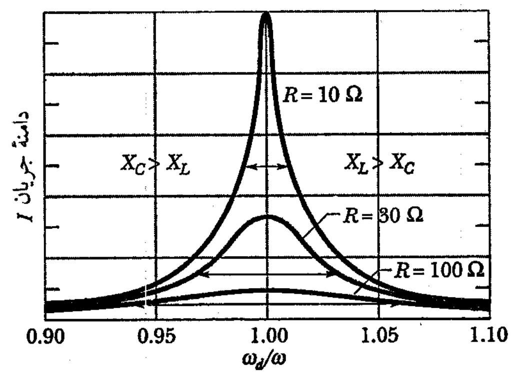
$$\omega_d = \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (\text{تشدید}) \qquad (۳۳\text{ـ}۶۷)$$ ■

شکل ۳۳ـ۱۳ سه منحنی تشدید مربوط به نوسان‌های سینوسی را در مدارهای RLC سری، که فقط R متفاوت دارند، نشان می‌دهد. در هر منحنی دامنهٔ جریان I هنگامی به قله می‌رسد که نسبت ω_d/ω برابر با ۱٫۰۰ باشد، اما با افزایش یافتن R مقدار بیشینهٔ I کاهش می‌یابد. (I بیشینه همیشه برابر با $\mathscr{E}_m/R$ است؛ برای فهمیدن دلیل این امر معادله‌های ۳۳ـ۶۱ و ۳۳ـ۶۲ را با هم ترکیب کنید). علاوه بر این، با افزایش یافتن R منحنی‌ها از لحاظ پهنا افزایش پیدا می‌کنند (در شکل ۳۳ـ۱۳، این پهنا در نصف مقدار بیشینهٔ I اندازه‌گیری شده است).

برای درک فیزیک شکل ۳۳ـ۱۳، چگونگی تغییر رآکتانس‌های X_L و X_C را هنگام افزایش یافتن بسامد زاویه‌ای راه‌انداز ω_d، از مقداری خیلی کوچکتر از بسامد طبیعی ω، در نظر می‌گیریم. به ازای ω_d کوچک، رآکتانس X_L (مساوی با $\omega_d L$) کوچک، و رآکتانس X_C (مساوی با $1/\omega_d C$) بزرگ است. بنابراین، در مدار اثر خازنی غالب است و امپدانس تحت تأثیر مقدار بزرگ X_C قرار می‌گیرد و جریان کم می‌شود.

هرگاه ω_d افزایش یابد، رآکتانس X_C غالب می‌ماند، اما در حین افزایش یافتن رآکتانس X_L، کاهش پیدا می‌کند. کاهش یافتن X_C امپدانس را کاهش می‌دهد و این امر، همان طور که طرف چپ هر یک از منحنی‌های تشدید در شکل ۳۳ـ۱۳ نشان می‌دهد، باعث افزایش یافتن جریان می‌شود. وقتی X_L افزایش و X_C کاهش می‌یابد تا با هم برابر شوند، جریان به بیشترین مقدار خود می‌رسد و مدار به ازای $\omega_d=\omega$ به حال تشدید درمی‌آید.

هرگاه افزایش یافتن ω_d ادامه پیدا کند، رآکتانس در حال افزایش X_L به تدریج بر رآکتانس در حال کاهش X_C، غالب می‌شود. به خاطر افزایش یافتن X_L امپدانس افزایش و جریان کاهش می‌یابد و این موضوعی است که در طرف راست هر یک از منحنی‌های تشدید در شکل ۳۳ـ۱۳ مشاهده می‌شود. پس، به طور خلاصه:



شکل ۳۳ـ۱۳ منحنی‌های تشدید مربوط به مدار RLC شکل ۳۳ـ۷، به ازای $L=100\mu H$، $C=100pF$، و سه مدار مقدار R. دامنهٔ جریان متناوب I، به نزدیک بودن بسامد زاویه‌ای راه‌انداز ω_d به بسامد زاویه‌ای طبیعی ω، بستگی دارد. پیکان‌های روی هر منحنی مقدار پهنای منحنی را در نیم ـ بیشینهٔ جریان نشان می‌دهند، که معیاری برای تیزی تشدید است. در طرف چپ نسبت $\omega_d/\omega=1{,}00$ مدار اساساً دارای بار خازنی، به ازای $X_C>X_L$، و در طرف راست این نسبت مدار اساساً دارای بار القایی، به ازای $X_L>X_C$، است.

در طرف بسامدهای زاویه‌ای پایین منحنی تشدید رآکتانس خازنی غالب است، و در بسامدهای زاویه‌ای بالای رآکتانس القایی غالب است و تشدید در میانهٔ منحنی رخ می‌دهد.

خودآزمایی ۷: رآکتانس‌های خازنی و القایی سه مدار سینوسی RLC سری، به ترتیب، عبارت‌اند از: (۱) 50Ω، 100Ω؛ (۲) 100Ω، 50Ω؛ (۳) 50Ω، 50Ω. (الف) در هر مدار، آیا جریان نسبت به نیروی محرک‌الکتریکی اعمال شده جلوتر است، عقب‌تر است، یاهمفاز است؟ (ب) کدام مدار در حال تشدید است؟

مسألهٔ نمونهٔ ۳۳ـ۷

در شکل ۳۳ـ۷، فرض کنید $R=200\Omega$، $C=15{,}0\mu F$، $L=230mH$، $f_d=60{,}0Hz$، و $\mathscr{E}_m=36{,}0V$. (اینها همان پارامترهایی هستند که در مسأله‌های نمونهٔ ۳۳ـ۴، ۳۳ـ۵ و ۳۳ـ۶ نیز به کار رفته‌اند).

(الف) دامنهٔ جریان I، چقدر است؟

حل: در اینجا **نکتهٔ کلیدی** این است که دامنهٔ جریان I، با دامنهٔ نیروی محرک الکتریکی مولد $\mathscr{E}_m$، و امپدانس Z مدار، طبق معادلهٔ ۳۳ـ۶۲ $(I=\mathscr{E}_m/Z)$ رابطه دارد. بنابراین، لازم است Z را پیدا کنیم که آن هم با مقاومت مدار R، رآکتانس خازنی X_C، و رآکتانس القایی X_L، رابطه دارد.

تنها مقاومت موجود در مدار همان مقاومت داده شدهٔ R است. رآکتانس خازنی مدار مربوط به ظرفیت داده شده است که با توجه به مسألهٔ نمونهٔ ۳۳ـ۵، داریم $X_C=177\Omega$ و رآکتانس القایی مدار مربوط به القایدگی داده شده است که با توجه به مسألهٔ نمونهٔ ۳۳ـ۶، داریم $X_L=86{,}7\Omega$. پس، امپدانس مدار برابر است با:

$$Z=\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}$$

$$Z=\sqrt{(200\Omega)^2+(86{,}7\Omega-177\Omega)^2}=219\Omega$$

در این صورت، دامنهٔ جریان چنین به دست می‌آید:

$$I=\frac{\mathscr{E}_m}{Z}=\frac{36{,}0V}{219\Omega}\quad\Rightarrow$$

$$I=0{,}164A \qquad \text{(پاسخ)}$$

(ب) ثابت فاز جریان مدار ϕ، نسبت به نیروی محرک الکتریکی راه‌انداز چقدر است؟

حل: در اینجا **نکتهٔ کلیدی** این است که ثابت فاز طبق معادلهٔ ۳۳ـ۶۵، با رآکتانس القایی، رآکتانس خازنی، و مقاومت مدار رابطه دارد. با حل کردن این معادله نسبت به ϕ، داریم

$$\phi=\tan^{-1}\frac{X_L-X_C}{R}=\tan^{-1}\frac{86{,}7\Omega-177\Omega}{200\Omega}\quad\Rightarrow$$

$$\phi=-24{,}3^\circ=-0{,}424rad \qquad \text{(پاسخ)}$$

ثابت فاز منفی با این واقعیت سازگار است که در مدار بار خازنی غالب است؛ یعنی $X_C>X_L$. این موضوع در روش مسأله حل کردن ۱، به صورت "ICE" معرفی شده است، یعنی جریان نسبت به نیروی محرک الکتریکی تقدم فاز دارد.

۳۳ـ۱۰ توان در مدارهای جریان متناوب

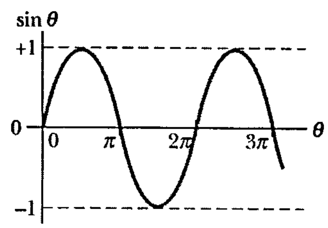
در مدار RLC شکل ۳۳ـ۷، چشمهٔ انرژی یک مولد جریان متناوب است. انرژی تولید شده توسط این چشمه مقداری در میدان الکتریکی خازن ذخیره می‌شود، مقداری در میدان مغناطیسی القاگر ذخیره می‌شود و مقداری هم به صورت انرژی گرمایی در مقاومت تلف می‌شود. در حالت کارکرد پایا، که مورد نظر ماست، مقدار انرژی متوسط ذخیره شده در خازن و در القاگر، با هم، ثابت می‌ماند. بنابراین، شارش خالص انرژی از مولد به مقاومت صورت می‌گیرد، که در آن انرژی از صورت الکترومغناطیسی به گرمایی تبدیل می‌شود.

آهنگ لحظه‌ای اتلاف انرژی در مقاومت را با استفاده از معادله‌های ۲۷ـ۲۲ و ۳۳ـ۲۹ می‌توان به صورت زیر نوشت

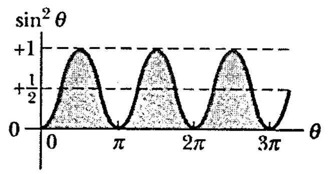
$$P = i^2R = [I\sin(\omega_d t - \phi)]^2R = I^2R\sin^2(\omega_d t - \phi) \qquad (۳۳ـ۶۸)$$

اما آهنگ متوسط اتلاف انرژی در مقاومت، همان مقدار متوسط معادلهٔ ۳۳ـ۶۸ روی زمان است. در یک چرخهٔ کامل مقدار متوسط $\sin\theta$، که در آن θ متغیر است، صفر است (شکل ۳۳ـ۱۴ الف) اما مقدار متوسط $\sin^2\theta$ برابر با $\frac{1}{2}$ است (شکل ۳۳ـ۱۴ ب). (در شکل ۳۳ـ۱۴ ب توجه کنید که مساحت بخش سایه زدهٔ زیر منحنی واقع در بالای خط افقی با نشانهٔ $+\frac{1}{2}$، درست برابر با فضای خالی زیر خط افقی است). بنابراین، با توجه به معادلهٔ ۳۳ـ۶۸، می‌توان نوشت

$$P_{avg} = \frac{I^2R}{2} = \left(\frac{I}{\sqrt{2}}\right)^2R \qquad (۳۳ـ۶۹)$$



(الف)



(ب)

شکل ۳۳ـ۱۴ (الف) منحنی نمایش $\sin\theta$ برحسب θ. مقدار متوسط $\sin\theta$ در یک چرخه صفر است. (ب) منحنی نمایش $\sin^2\theta$ برحسب θ. مقدار متوسط این تابع در یک چرخه برابر با $\frac{1}{2}$ است.

کمیت $I/\sqrt{2}$ را **جذر میانگین مربعی** یا **rms**[1] جریان i می‌نامند:

$$I_{rms} = \frac{I}{\sqrt{2}} \qquad \text{(جریان rms)} \qquad (۳۳ـ۷۰) \blacksquare$$

اکنون، معادلهٔ ۳۳ـ۶۹ را می‌توان به صورت زیر باز نوشت

$$P_{avg} = I_{rms}^2R \qquad \text{(توان متوسط)} \qquad (۳۳ـ۷۱) \blacksquare$$

معادلهٔ ۳۳ـ۷۱ به معادلهٔ ۲۷ـ۲۲ $(P=i^2R)$ شباهت دارد و نشان می‌دهد که با استفاده از جریان rms می‌توان آهنگ متوسط اتلاف انرژی در مدارهای جریان متناوب را، درست مانند مدارهای جریان مستقیم، حساب کرد.

در ضمن، مقادیر rms ولتاژها و نیروهای محرک الکتریکی مربوط به مدارهای جریان متناوب را می‌توان معرفی کرد:

$$\mathscr{E}_{rms} = \frac{\mathscr{E}_m}{\sqrt{2}} \;،\; V_{rms} = \frac{V}{\sqrt{2}} \qquad \text{(ولتاژ rms، نیروی محرک الکتریکی rms)} \qquad (۳۳ـ۷۲) \blacksquare$$

اسباب‌های اندازه‌گیری جریان متناوب، مانند آمپرسنج و ولت‌سنج، معمولاً، برای خواندن مقادیر I_{rms}، V_{rms} و $\mathscr{E}_{rms}$ مدرج می‌شوند. بنابراین، وقتی که دو سر ولت‌سنج جریان متناوب را به پریز برق خانه وصل می‌کنیم و عدد ۲۲۰V را می‌خوانیم، ولتاژ rms را اندازه گرفته‌ایم. در این صورت مقدار بیشینهٔ اختلاف پتانسیل $\sqrt{2}$(۲۲۰V) یا ۳۱۰V خواهد بود.

چون ضریب تناسب $1/\sqrt{2}$ در معادله‌های ۳۳ـ۷۰ و ۳۳ـ۷۲ برای هر سه متغیر یکسان است، معادله‌های ۳۳ـ۶۲ و ۳۳ـ۶۰ را به صورت زیر هم می‌توان نوشت

$$I_{rms} = \frac{\mathscr{E}_{rms}}{Z} = \frac{\mathscr{E}_{rms}}{\sqrt{R^2+(X_L - X_C)^2}} \qquad (۳۳ـ۷۳)$$

این معادله در واقع به شکلی است که، به طور معمول، بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرد.

با استفاده از معادلهٔ $I_{rms}=\mathscr{E}_{rms}/Z$ می‌توان معادلهٔ ۳۳ـ۷۱ را به صورت مفیدتری نوشت

$$P_{avg} = \frac{\mathscr{E}_{rms}}{Z}I_{rms}R = \mathscr{E}_{rms}I_{rms}\frac{R}{Z} \qquad (۳۳ـ۷۴)$$

1. root−mean−square (rms)

اما با توجه به شکل ۳۳-۱۱ ت، جدول ۳۳-۲، و معادلهٔ ۳۳-۶۲، دیده می‌شود که R/Z برابر با کسینوس ثابت فاز ϕ، است:

$$\cos\phi = \frac{V_R}{\mathscr{E}_m} = \frac{IR}{IZ} = \frac{R}{Z} \qquad (۳۳\text{-}۷۵)$$

در این صورت، معادلهٔ ۳۳-۷۴ چنین نوشته می‌شود:

$$P_{avg} = \mathscr{E}_{rms} I_{rms} \cos\phi \qquad \text{(توان متوسط)} \qquad (۳۳\text{-}۷۶)$$

که در آن $\cos\phi$ را **ضریب توان** می‌نامند. چون، داریم $\cos\phi = \cos(-\phi)$، معادلهٔ ۳۳-۷۶ به علامت ثابت فاز ϕ بستگی ندارد.

برای بیشینه کردن انرژی داده شده به یک بار مقاومتی در مدار RLC، باید ضریب توان $\cos\phi$، تا حد امکان نزدیک به واحد نگه داشته شود. این امر هم‌ارز با این است که ثابت فاز ϕ در معادلهٔ ۳۳-۲۹ را تا حد امکان نزدیک به صفر نگه داریم. به عنوان مثال، هرگاه در مداری بار القایی به شدت بالا باشد می‌توان با افزودن بار خازنی به مدار به صورت سری، رآکتانس مدار را کاهش داد. (یادآوری می‌شود که افزودن یک خازن به طور سری به خازن‌های دیگر مدار، ظرفیت معادل ترکیب سری C_{eq}، را کم می‌کند). بنابراین، کاهش یافتن C_{eq} حاصل در مدار، ثابت فاز را کم می‌کند و ضریب توان در معادلهٔ ۳۳-۷۶ را افزایش می‌دهد. در صنایعی که با مصرف توان سر و کار دارند، برای تأمین این منظور معمولاً، در سرتاسر سیم‌های انتقال برق خازن‌هایی را به صورت ترکیب سری قرار می‌دهند.

خودآزمایی ۸: (الف) اگر در یک مدار جریان متناوب RLC سری جریان نسبت به نیروی محرک الکتریکی تقدم فاز داشته باشد، آیا باید ظرفیت خازن را افزایش یا کاهش داد تا آهنگ انرژی داده شده به مقاومت افزایش یابد؟ (ب) آیا با این تغییر، بسامد زاویه‌ای تشدید مدار به بسامد طبیعی نیروی محرک الکتریکی نزدیک‌تر می‌شود یا از آن دورتر می‌شود؟

مسألهٔ نمونهٔ ۳۳-۸

مدار RLC سری با نیروی محرک $\mathscr{E}_{rms}=۱۲۰\,V$، بسامد $f_d=۶۰٫۰\,Hz$، شامل مقاومت $R=۲۰۰\,\Omega$، رآکتانس القایی $X_L=۸۰٫۰\,\Omega$ و رآکتانس خازنی $X_C=۱۵۰\,\Omega$ را در نظر می‌گیریم.

(الف) ضریب توان $\cos\phi$ و ثابت فاز ϕ، مدار چقدر است؟

حل: در اینجا **نکتهٔ کلیدی** این است که ضریب توان $\cos\phi$ را می‌توان به کمک مقاومت R و امپدانس Z از طریق معادلهٔ ۳۳-۷۵ $(\cos\phi=R/Z)$ به‌دست آورد. برای محاسبهٔ Z با استفاده از معادلهٔ ۳۳-۶۱، داریم

$$Z = \sqrt{R^۲ + (X_L - X_C)^۲}$$

$$Z = \sqrt{(۲۰۰\Omega)^۲ + (۸۰٫۰\Omega - ۱۵۰\Omega)^۲} = ۲۱۱٫۹۰\Omega$$

در این صورت، با استفاده از معادلهٔ ۳۳-۷۵، داریم

$$\cos\phi = \frac{R}{Z} = \frac{۲۰۰\Omega}{۲۱۱٫۹۰\Omega} \Rightarrow$$

$$\cos\phi = ۰٫۹۴۳۸ \approx ۰٫۹۴۴ \qquad \text{(پاسخ)}$$

مقدار ϕ برابر است با:

$$\phi = \cos^{-۱} ۰٫۹۴۴ = \pm ۱۹٫۳^\circ$$

کسینوس هر در زاویهٔ $+۱۹٫۳^\circ$ و $-۱۹٫۳^\circ$ برابر با ۰٫۹۴۴ است. برای تعیین علامت درست، باید ببینیم که جریان مدار نسبت به نیروی محرک الکتریکی از لحاظ فاز جلوتر است یا عقب‌تر. چون $X_C > X_L$، پس، در مدار بار خازنی غالب است و جریان نسبت به نیروی محرک الکتریکی تقدم فاز دارد. پس، ϕ باید منفی باشد:

$$\phi = -۱۹٫۳^\circ \qquad \text{(پاسخ)}$$

به جای این کار، ϕ را با استفاده از معادلهٔ ۳۳-۶۵ هم می‌توانیم به دست آوریم. در این صورت، یک ماشین حسابگر می‌تواند پاسخ کامل با علامت منفی را به ما بدهد.

(ب) آهنگ متوسط اتلاف انرژی در مقاومت، P_{avg}، چقدر است؟

حل: یک راه پاسخگویی به این پرسش استفاده کردن از **نکتهٔ کلیدی** زیر است: چون بنا به فرض، مدار در حالت کارکرد پایاست، آهنگ اتلاف انرژی در مقاومت برابر با آهنگ انرژی داده شده به مدار، طبق معادلهٔ ۳۳-۷۶ $(P_{avg}=\mathscr{E}_{rms}I_{rms}\cos\phi)$ است.

نیروی محرک الکتریکی rms راه‌انداز $\mathscr{E}_{rms}$، در دست است و با توجه به قسمت (الف) $\cos\phi$ را هم می‌دانیم. برای پیدا کردن I_{rms} از این **نکتهٔ کلیدی** استفاده می‌کنیم که طبق معادلهٔ ۳۳-۷۳، جریان rms از مقدار $\mathscr{E}_{rms}$ و امپدانس مدار Z (که معلوم است)، به دست می‌آید:

$$I_{rms} = \frac{\mathscr{E}_{rms}}{Z}$$

با جانشانی این مقدار در معادلهٔ ۳۳-۷۶، داریم

$$P_{avg} = \mathscr{E}_{rms} I_{rms} \cos\phi = \frac{\mathscr{E}^{۲}_{rms}}{Z}\cos\phi$$

$$P_{avg} = \frac{(۱۲۰\,V)^{۲}}{۲۱۱٫۹۰\,\Omega}(۰٫۹۴۳۸) \Rightarrow$$

$$P_{avg} = ۶۴٫۱\,W \qquad \text{(پاسخ)}$$

راه دیگر برای پاسخگویی به این پرسش، استفاده از این **نکتهٔ کلیدی** است که آهنگ اتلاف انرژی در مقاومت R طبق معادلهٔ ۳۳-۷۱، به مجذور جریان I_{rms} گذرنده از آن بستگی دارد. در نتیجه، خواهیم داشت

$$P_{avg} = I^{۲}_{rms}R = \frac{\mathscr{E}^{۲}_{rms}}{Z^{۲}}R$$

$$P_{avg} = \frac{(۱۲۰\,V)^{۲}}{(۲۱۱٫۹۰\,\Omega)^{۲}}(۲۰۰\,\Omega) \Rightarrow$$

$$P_{avg} = ۶۴٫۱\,W \qquad \text{(پاسخ)}$$

(پ) ظرفیت جدید لازم C_{new}، چقدر باشد تا P_{avg} بیشینه شود، به شرط آنکه پارامترهای دیگر مدار تغییر نکنند؟

حل: یک **نکتهٔ کلیدی** این است که وقتی مدار با نیروی محرک الکتریکی راه‌انداز به حالت تشدید در می‌آید، P_{avg}، آهنگ متوسط انرژی داده شده به مدار و تلف شده در آن بیشینه می‌شود. **نکتهٔ کلیدی** دیگر این است که تشدید به ازای $X_C=X_L$، صورت می‌گیرد. با توجه به داده‌های مسأله، داریم $X_C>X_L$. پس، باید X_C را کاهش دهیم تا به حالت تشدید برسیم. با توجه به معادلهٔ ۳۳-۳۹ ($X_C=۱/\omega_d C$)، معلوم می‌شود که باید C را تا مقدار جدید C_{new} افزایش دهیم.

با استفاده از معادلهٔ ۳۳-۳۹ شرط $X_C=X_L$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{۱}{\omega_d C_{new}} = X_L$$

با قرار دادن $۲\pi f_d$ به جای ω_d (چون f_d معلوم است، نه ω_d) و حل کردن معادلهٔ حاصل نسبت به C_{new}، داریم

$$C_{new} = \frac{۱}{۲\pi f_d X_L} = \frac{۱}{(۲\pi)(۶۰\,Hz)(۸۰٫۰\,\Omega)} \Rightarrow$$

$$C_{new} = ۳٫۳۲ \times ۱۰^{-۵}\,F = ۳۳٫۲\,\mu F \qquad \text{(پاسخ)}$$

با دنبال کردن روش به کار رفته در قسمت (ب) می‌توان نشان داد که به ازای این مقدار C_{new}، توان متوسط P_{avg}، دارای مقدار بیشینهٔ ۷۲٫۰W خواهد بود.

۳۳-۱۱ مبدل‌ها

نکته‌های لازم در انتقال انرژی

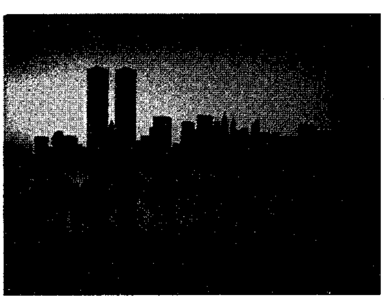
هرگاه یک مدار ac فقط بار مقاومتی داشته باشد ضریب توان در معادلهٔ ۳۳-۷۶ برابر است با $\cos 0° = ۱$ و نیروی محرک الکتریکی $\mathscr{E}_{rms}$، با V_{rms}، ولتاژ دو سر مقاومت بار برابر می‌شود. بنابراین، اگر جریان گذرنده از مقاومت بار I_{rms} باشد، انرژی با آهنگ متوسط

$$P_{avg} = \mathscr{E}I = IV \qquad (۷۷\text{-}۳۳)$$

تولید و تلف می‌شود. (در معادلهٔ ۳۳-۷۷ و در بقیهٔ این بخش، روش قراردادی را به کار می‌بریم و شاخص‌های پایین معرف کمیت‌های rms را حذف می‌کنیم. مهندسان و دانشمندان فرض می‌کنند که تمام جریان‌ها و ولتاژهای متغیر با زمان، به صورت کمیت‌های rms گزارش می‌شوند، یعنی، آن چیزی که اسباب‌های اندازه‌گیری نشان می‌دهند) معادلهٔ ۳۳-۷۷ نشان می‌دهد که برای تولید توان مورد نیاز می‌توان، گستره‌ای از گزینه‌های جریان و ولتاژ، از جریان‌های نسبتاً زیاد I و ولتاژهای نسبتاً کوچک V، تا برعکس این ترکیب، را به‌کار برد، به شرط آنکه حاصل‌ضرب IV برابر با مقدار مورد نظر باشد.

در سیستم‌های توزیع برق، مطلوب این است که در مرکز تولید (نیروگاه) برق و در محل مصرف (منزل یا کارخانه)، به دلایل ایمنی و به خاطر کارایی بیشتر وسایل، با ولتاژهای نسبتاً پایین سر و کار داشته باشیم. هیچ‌کس مایل نیست اتوی برقی یا قطار برقی اسباب بازی بچه‌ها با ولتاژ، مثلاً، ۱۰kV کار کند. از سوی دیگر، برای انتقال انرژی الکتریکی از نیروگاه برق تا محل مصرف، بهتر است که جریان پایین‌ترین مقدار ممکن (و در نتیجه اختلاف پتانسیل بالاترین مقدار ممکن) را داشته باشد تا $I^{۲}R$ (که اغلب تلفات اهمی نامیده می‌شود) به کمترین مقدار برسد.

به عنوان مثال، در نظر است از خط انتقال برق ۷۳۵ کیلوولتی برای انتقال انرژی الکتریکی از نیروگاه برق آبی لاگراند ۲[1] در کِبِک[2] تا مونرآل[3] به فاصلهٔ ۱۰۰۰km، استفاده شود. فرض کنید جریان خط ۵۰۰A و ضریب



در ساعت ۵:۱۷ بعدازظهر روز ۹ نوامبر سال ۱۹۶۵، یک رلهٔ معیوب در سیستم برق نزدیک آبشار نیاگارا فیوز قطع کنندهٔ مدار یک خط انتقال را به کار انداخت. این عمل به طور خودکار باعث شد جریان به خط‌های دیگر منتقل شود که این کار بیش از بار قابل تحمل آنها بود و در نتیجه فیوزهای دیگر هم برق را قطع کردند. در مدتی حدود چند دقیقه بخش اعظم نیویورک[4]، نیوانگلند[5] و آنتاریو[6] در تاریکی فرورفت.

1. LaGrand 2 2. Quebec 3. Montreal 4. New York 5. New England 6. Ontario

توان نزدیک به واحد است. بنابراین، طبق معادلهٔ ۳۳ـ۷۷، آهنگ متوسط انرژی تأمین شده برابر است با:

$$P_{avg} = \mathscr{E}I = (7.35\times10^{5}\mathrm{V})(500\mathrm{A}) = 368\mathrm{MW}$$

مقاومت خط انتقال در حدود ۰٫۲۲۰Ω/km و در نتیجه، مقاومت کل خط ۱۰۰۰ کیلومتری در حدود ۲۲۰Ω است. آهنگ اتلاف انرژی در این مقاومت تقریباً برابر است با:

$$P_{avg} = I^{2}R = (500\mathrm{A})^{2}(220\Omega) = 55.0\mathrm{MW}$$

این مقدار تقریباً ۱۵ درصد آهنگ انرژی تولید شده است.

حال تصور کنید اگر جریان دو برابر و ولتاژ نصف شود، چه اتفاقی می‌افتد. در نیروگاه، انرژی مانند پیش با آهنگ متوسط ۳۶۸MW تولید می‌شود، اما آهنگ اتلاف انرژی تقریباً برابر است با:

$$P_{avg} = I^{2}R = (1000\mathrm{A})^{2}(220\Omega) = 220\mathrm{MW}$$

که این مقدار تقریباً ۶۰ درصد آهنگ تولید انرژی است. از این رو، قاعدهٔ کلی انتقال انرژی چنین بیان می‌شود: انرژی باید با بیشترین ولتاژ ممکن و با کمترین جریان ممکن منتقل شود.

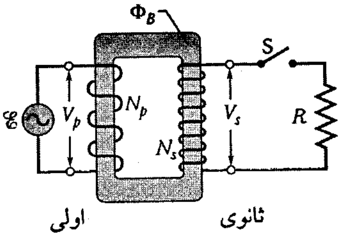
مبدل آرمانی

قاعدهٔ انتقال منجر به ناهمسازی میان نکته‌های لازم برای انتقال کارای ولتاژ بالا و نیاز مربوط به تولید و مصرف امن ولتاژ پایین می‌شود. ما به وسیله‌ای نیاز داریم که بتواند ولتاژ ac یک مدار را بالا ببرد (برای انتقال) و سپس پایین بیاورد (برای مصرف) و در عین حال حاصل‌ضرب جریان × ولتاژ را ثابت نگه دارد. **مبدل (ترانسفورماتور)** چنین وسیله‌ای است. این وسیله دارای هیچ بخش متحرکی نیست، با استفاده از قانون القایش فارادی کار می‌کند و برای آن همتایی به این سادگی در جریان مستقیم وجود ندارد.

مبدل آرمانی شکل ۳۳ـ۱۵ شامل دو پیچه با تعداد دورهای متفاوت است و سیم‌ها به دور یک هستهٔ آهنی پیچیده شده‌اند (پیچه‌ها نسبت به هستهٔ آهنی عایق‌بندی هستند). هنگام استفاده از مبدل پیچهٔ اولی با N_p دور سیم، به مولد جریان متناوب با نیروی محرک الکتریکی $\mathscr{E}$، که از معادلهٔ زیر به دست می‌آید وصل می‌شود:

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_m \sin \omega t \qquad (۷۸\text{-}۳۳)$$

پیچهٔ ثانوی با N_s دور سیم، به مقاومت بار R وصل می‌شود، اما مادام که کلید S باز باشد به حالت مدار باز است. (که فعلاً فرض می‌کنیم چنین باشد). بنابراین، از پیچهٔ ثانوی هیچ جریانی عبور نمی‌کند. علاوه بر این، فرض می‌کنیم در یک مبدل آرمانی مقاومت‌های پیچه‌های اولی و ثانوی ناچیزند و در ضمن تلفات انرژی ناشی از پسماند مغناطیسی در هستهٔ آهنی نیز قابل چشم‌پوشی است. در واقع، اتلاف انرژی در مبدل‌های با ظرفیت بالا و با طراحی خوب می‌تواند بسیار پایین تا حدود یک درصد باشد، و در نتیجه، فرض‌های ما پذیرفتنی باشند.



شکل ۳۳ـ۱۵ نموداری از یک مبدل آرمانی (دو پیچه با سیم‌های پیچیده شده به دور یک هستهٔ آهنی) در یک مدار اساسی مبدل. یک مولد ac جریان را در پیچهٔ سمت چپ (اولی) تولید می‌کند. وقتی کلید S بسته می‌شود، پیچهٔ سمت راست (ثانوی) به بار مقاومتی R وصل می‌شود.

در شرایط فرض شده، پیچهٔ اولی (یا به‌طور ساده اولی) یک القاگر خالص و مدار اولی مطابق شکل ۳۳ـ۱۰ الف، است. بنابراین، جریان (بسیار کم) پیچهٔ اولی، که **جریان مغناطنده**، I_{mag} نیز نامیده می‌شود، به اندازهٔ ۹۰ درجه نسبت به ولتاژ اولی V_p، تأخیر فاز دارد؛ در این حالت، ضریب توان اولی ($\cos\phi$ در معادلهٔ ۳۳ـ۷۶) صفر است و در نتیجه، هیچ توانی از مولد به مبدل داده نمی‌شود.

اما جریان اولی کم و متناوب I_{mag}، در هستهٔ آهنی یک شار مغناطیسی متناوب Φ_B، القا می‌کند. چون هسته در درون پیچهٔ ثانوی (یا به طور ساده ثانوی) نیز قرار دارد، شار القا شده از دورهای سیم پیچهٔ ثانوی هم عبور می‌کند. با توجه به قانون القایش فارادی (معادلهٔ ۳۱ـ۶)، نیروی محرک الکتریکی القا شده در هر دور، $\mathscr{E}_{turn}$، برای پیچه‌های اولی و ثانوی یکسان است. در ضمن، ولتاژ دو سر پیچهٔ اولی V_p، برابر با نیروی محرک الکتریکی القا شده در پیچهٔ اولی و ولتاژ دو سر پیچهٔ ثانوی V_s، برابر با نیروی محرک الکتریکی القا شده در پیچهٔ ثانوی است. بنابراین، می‌توان نوشت

$$\mathscr{E}_{turn} = \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{V_p}{N_p} = \frac{V_s}{N_s}$$

و از آنجا، داریم

$$V_s = V_p \frac{N_s}{N_p} \qquad \text{(تبدیل ولتاژ)} \qquad (۷۹\text{-}۳۳)$$ ■

به ازای $N_s > N_p$، این وسیله یک مبدل افزاینده است، زیرا ولتاژ اولی V_p را تا ولتاژ بالای V_s، افزایش می‌دهد. به همین ترتیب، به ازای $N_s < N_p$، وسیله یک مبدل کاهنده است.

تا اینجا، که کلید S باز بود، هیچ انرژی‌ای از مولد به بقیهٔ مدار منتقل نمی‌شد. اکنون، کلید S را می‌بندیم تا پیچهٔ ثانوی به بار مقاومتی R وصل شود. (در حالت کلی، بار می‌تواند شامل عنصرهای القایی و خازنی نیز باشد، اما در اینجا فقط مقاومت R را در نظر می‌گیریم). در این حالت، درمی‌یابیم که انرژی از مولد منتقل می‌شود و اینک دلیل آن را توضیح می‌دهیم.

وقتی کلید S بسته می‌شود چند اتفاق می‌افتد.

۱. در مدار ثانوی جریان متناوب I_s برقرار می‌شود، که توان تلف شدهٔ مربوط در مقاومت برابر با $I_s^2 R$ (مساوی با V_s^2/R) است.

۲. این جریان در هستهٔ آهنی شار مغناطیسی خود را به وجود می‌آورد و این شار هم (با توجه به قانون فارادی و قانون لنز) یک نیروی محرک الکتریکی مخالف در پیچهٔ اولی ایجاد می‌کند.

۳. اما ولتاژ پیچهٔ اولی V_p، در پاسخ به این نیروی محرک الکتریکی مخالف نمی‌تواند تغییر کند زیرا همیشه باید با $\mathscr{E}$، نیروی محرک الکتریکی تأمین شده توسط مولد برابر باشد و بستن کلید S این واقعیت را تغییر نمی‌دهد.

۴. برای ثابت ماندن V_p، اکنون مولد جریان متناوب I_p (علاوه بر I_{mag}) را در مدار اولی تولید می‌کند؛ بزرگی و ثابت فاز I_p باید درست به اندازه‌ای باشد که نیروی محرک الکتریکی القا شده توسط I_p در پیچهٔ اولی بتواند نیروی محرک الکتریکی القا شده توسط I_s را دقیقاً خنثی کند. چون ثابت فاز I_p مانند ثابت فاز I_{mag}، برابر با ۹۰ درجه نیست جریان I_p می‌تواند انرژی را به پیچهٔ اولی منتقل کند.

اکنون، می‌خواهیم رابطهٔ میان I_s و I_p را به دست آوریم. اما به جای تحلیل دقیق روش پیچیدهٔ قبلی تنها از اصل پایستگی انرژی استفاده می‌کنیم. آهنگ انتقال انرژی مولد به پیچهٔ اولی I_pV_p است. در این صورت، آهنگ انتقال انرژی از پیچهٔ اولی به پیچهٔ دومی (از طریق ارتباط میدان مغناطیسی متناوب دو پیچه) I_sV_s است. چون فرض کردیم که در این فرایند هیچ انرژی‌ای تلف نمی‌شود، با استفاده از اصل پایستگی انرژی، داریم

$$I_pV_p = I_sV_s$$

با جانشانی مقدار V_s از معادلهٔ ۳۳-۷۹، داریم

$$I_s = I_p \frac{N_p}{N_s} \qquad \text{(تبدیل جریان)} \qquad (۸۰\text{-}۳۳)$$ ■

این معادله نشان می‌دهد که، بسته به نسبت دورهای سیم پیچه‌ها N_p/N_s، جریان I_s در پیچهٔ ثانوی می‌تواند با جریان پیچهٔ اولی متفاوت باشد.

جریان I_p در مدار اولی به خاطر وجود بار مقاومتی R در مدار ثانوی، ظاهر می‌شود. برای تعیین I_p مقدار $I_s = V_s/R$ را در معادلهٔ ۳۳-۸۰ قرار می‌دهیم و سپس مقدار V_s را از معادلهٔ ۳۳-۷۹ جانشین می‌کنیم. در نتیجه، داریم

$$I_p = \frac{1}{R}\left(\frac{N_s}{N_p}\right)^2 V_p \qquad (۸۱\text{-}۳۳)$$

این معادله به شکل $I_p = V_p/R_{\text{eq}}$ است، که در آن مقاومت معادل R_{eq} برابر است با:

$$R_{\text{eq}} = \left(\frac{N_p}{N_s}\right)^2 R \qquad (۸۲\text{-}۳۳)$$ ■

در اینجا R_{eq} مقدار مقاومت بار «دیده شده» توسط مولد است؛ مولد، جریان I_p و ولتاژ V_p را موقعی تولید می‌کند که گویی به مقاومت R_{eq} وصل شده است.

همسازی امپدانس

معادلهٔ ۳۳ـ۸۲ خاصیت دیگری از کارکرد مبدل را نشان می‌دهد. برای انتقال بیشینهٔ انرژی از مولد نیروی محرک الکتریکی به یک بار مقاومتی باید مقاومت مولد با مقاومت بار برابر باشد. این رابطه برای مدارهای جریان متناوب نیز صادق است، با این تفاوت که در اینجا باید امپدانس مولد (به جای فقط مقاومت مولد) با بار همساز باشد. چنین شرطی اغلب تأمین نمی‌شود. مثلاً در یک دستگاه پخش صوت، امپدانس تقویت کننده بالا و امپدانس بلندگو پایین است. برای ایجاد همسازی میان امپدانس‌های دو وسیله می‌توان از یک مبدل با نسبت مناسب دورهای سیم پیچه‌ها N_p/N_s، استفاده کرد.

خودآزمایی ۹: یک مولد نیروی محرک الکتریکی جریان متناوب دارای مقاومتی کوچکتر از بار مقاومتی است؛ برای افزایش دادن میزان انتقال انرژی از مولد به بار در میان آن دو یک مولد وصل می‌کنیم. (الف) آیا N_s از N_p بیشتر است یا کمتر؟ (ب) آیا در این آرایش مبدل افزاینده است یا کاهنده؟

مسألهٔ نمونهٔ ۳۳ـ۹

مبدلی در قطب مصرف، در طرف اولی با ولتاژ $V_p=۸٫۵\text{kV}$ کار می‌کند و انرژی الکتریکی تعدادی از خانه‌های پیرامون را با ولتاژ $V_s=۱۲۰\text{V}$ تأمین می‌کند و هر دو ولتاژ مقدار جذر میانگین مربعی را نشان می‌دهند. مبدل را آرمانی کاهنده با بار مقاومتی خالص و ضریب توان واحد در نظر بگیرید.

(الف) نسبت دورهای سیم پیچه‌های این مبدل N_p/N_s، چقدر است؟

حل: در اینجا **نکتهٔ کلیدی** این است که نسبت دورها N_p/N_s، طبق معادلهٔ ۳۳ـ۷۹ با ولتاژهای rms اولی (معلوم) و ثانوی ارتباط دارد و آن را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{V_s}{V_p}=\frac{N_s}{N_p}$$

(توجه کنید که طرف راست این معادله، عکس نسبت دورها را نشان می‌دهد). هر دو طرف معادله را وارون می‌کنیم. در نتیجه، داریم

$$\frac{N_p}{N_s}=\frac{V_p}{V_s}=\frac{۸٫۵\times۱۰^۳\text{V}}{۱۲۰\text{V}} \Rightarrow$$

$$\frac{N_p}{N_s}=۷۰٫۸۳\approx۷۱ \qquad \text{(پاسخ)}$$

(ب) آهنگ متوسط مصرف (یا اتلاف) انرژی در خانه‌ها که توسط مبدل تأمین می‌شود، ۷۸kW است. جریان‌های rms پیچه‌های اولی و ثانوی مبدل را معین کنید.

حل: در اینجا **نکتهٔ کلیدی** این است که برای بار مقاومتی خالص ضریب توان $\cos\phi$ برابر با واحد است؛ پس، آهنگ متوسط تولید و مصرف انرژی از معادلهٔ ۳۳ـ۷۷ به دست می‌آید. در مدار اولی، به ازای $V_p=۸٫۵\text{kV}$، با استفاده از معادلهٔ ۳۳ـ۷۷، داریم

$$I_p=\frac{P_{avg}}{V_p}=\frac{۷۸\times۱۰^۳\text{W}}{۸٫۵\times۱۰^۳\text{V}} \Rightarrow$$

$$I_p=۹٫۱۷۶\text{A}\approx۹٫۲\text{A} \qquad \text{(پاسخ)}$$

به همین ترتیب، در مدار ثانوی، داریم

$$I_s=\frac{P_{avg}}{V_s}=\frac{۷۸\times۱۰^۳\text{W}}{۱۲۰\text{V}} \Rightarrow$$

$$I_s=۶۵۰\text{A} \qquad \text{(پاسخ)}$$

می‌توان تحقیق کرد که طبق معادله ۳۳ـ۸۰، رابطهٔ $I_s=I_p(N_p/N_s)$ برقرار است.

(پ) بار مقاومتی R_s در مدار ثانوی چقدر است؟ بار مقاومتی متناظر R_p در مدار اولی چقدر است؟

حل: برای هر دو مدار **نکتهٔ کلیدی** این است که رابطهٔ ولتاژ با جریان rms بار مقاومتی به صورت $V=IR$ است. برای مدار ثانوی، داریم

$$R_s=\frac{V_s}{I_s}=\frac{۱۲۰\text{V}}{۶۵۰\text{A}} \Rightarrow$$

$$R_s=۰٫۱۸۴۶\approx۰٫۱۸\Omega \qquad \text{(پاسخ)}$$

به همین ترتیب، برای مدار اولی، داریم

$$R_p=\frac{V_p}{I_p}=\frac{۸٫۵\times۱۰^۳\text{V}}{۹٫۱۷۶\text{A}} \Rightarrow$$

$$P_p=۰٫۹۲۶\Omega\approx۹۳۰\Omega \qquad \text{(پاسخ)}$$

نکتهٔ کلیدی دیگر برای پیدا کردن R_p این است که R_p بار مقاومتی معادل «دیده شده» از طرف اولی مبدل است که از معادلهٔ ۳۳ـ۸۲ به دست می‌آید. اگر در آن معادله به جای R_{eq} مقدار R_p و به جای R مقدار R_s را قرار دهیم، خواهیم داشت

$$R_p=\left(\frac{N_p}{N_s}\right)^۲R_s=(۷۰٫۸۳)^۲(۰٫۱۸۴۶\Omega) \Rightarrow$$

$$R_p=۹۲۶\Omega\approx۹۳۰\Omega \qquad \text{(پاسخ)}$$

مرور و خلاصهٔ مطالب فصل

تبدیل انرژی در مدار LC در نوسان‌کنندهٔ LC انرژی به طور متناوب در میان میدان الکتریکی خازن و میدان مغناطیسی القاگر دست به دست می‌شود؛ مقادیر لحظه‌ای این دو صورت انرژی عبارت‌اند از:

$$U_B = \frac{Li^2}{2} \quad , \quad U_E = \frac{q^2}{2C} \qquad (۳۳\text{-}۱ ، ۳۳\text{-}۲)$$

در این معادله‌ها q بار الکتریکی لحظه‌ای روی خازن و i جریان لحظه‌ای گذرنده از القاگر است. انرژی کل U (مساوی با U_E+U_B) ثابت می‌ماند.

نوسان‌های بار الکتریکی و جریان در مدار LC با توجه به اصل پایستگی انرژی معادله دیفرانسیل نوسان‌های مدار LC (بدون مقاومت) به صورت زیر است

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C}q = 0 \qquad (\text{نوسان‌های } LC) \quad (۳۳\text{-}۱۱)$$

جواب معادلهٔ ۳۳-۱۱ چنین به دست می‌آید:

$$q = Q\cos(\omega t + \phi) \qquad (\text{بار الکتریکی}) \quad (۳۳\text{-}۱۲)$$

که در آن Q دامنهٔ بار (بار بیشینهٔ روی خازن) و بسامد زاویه‌ای نوسان‌های ω، برابر است با:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad (۳۳\text{-}۴)$$

ثابت فاز ϕ در معادلهٔ ۳۳-۱۲ با توجه به شرایط آغازی دستگاه (در لحظهٔ $t=0$) به دست می‌آید.

جریان i دستگاه در زمان t برابر است با:

$$i = -\omega Q\sin(\omega t + \phi) \qquad (\text{جریان}) \quad (۳۳\text{-}۱۳)$$

که در آن ωQ دامنهٔ جریان I، است.

نوسان‌های میرا هرگاه در مدار نوسان‌کنندهٔ LC عنصر مصرف‌کنندهٔ R نیز وجود داشته باشد نوسان‌ها میرا می‌شوند. در نتیجه، داریم

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0 \qquad (\text{مدار } RLC) \quad (۳۳\text{-}۲۴)$$

جواب این معادلهٔ دیفرانسیل چنین به دست می‌آید:

$$q = Qe^{-Rt/2L}\cos(\omega' t + \phi) \qquad (۳۳\text{-}۲۵)$$

که در آن، داریم

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - (R/2L)^2} \qquad (۳۳\text{-}۲۶)$$

در اینجا فقط حالت‌های با R کم، و در نتیجه با میرایی کم، را در نظر می‌گیریم؛ در این صورت، داریم $\omega \approx \omega'$.

جریان‌های متناوب؛ نوسان‌های واداشته یک مدار RLC سری می‌تواند توسط نیروی محرک الکتریکی متناوب خارجی با معادلهٔ زیر به صورت نوسان‌های واداشته با بسامد زاویه‌ای راه‌انداز ω_d، کار کند

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_m \sin\omega_d t \qquad (۳۳\text{-}۲۸)$$

در این مدار جریان برقرار شده توسط نیروی محرک الکتریکی برابر است با:

$$i = I\sin(\omega_d t - \phi) \qquad (۳۳\text{-}۲۹)$$

که در آن ϕ ثابت فاز جریان است.

تشدید در یک مدار RLC سری راه افتاده با نیروی محرک الکتریکی خارجی سینوسی، دامنهٔ جریان، I، هنگامی بیشینه است ($I=\mathscr{E}_m/R$) که بسامد زاویه‌ای راه‌انداز ω_d، با بسامد زاویه‌ای طبیعی مدار ω، برابر باشد (یعنی، در حالت **تشدید**). در این حالت، $X_C=X_L$، $\phi=0$، و جریان با نیروی محرک الکتریکی همفاز است.

عنصرهای مداری تنها اختلاف پتانسیل متناوب دو سر یک مقاومت دارای دامنهٔ $V_R=IR$ است؛ در این حالت، جریان با اختلاف پتانسیل همفاز است.

در یک خازن، داریم $V_C=IX_C$، که در آن $X_C=1/\omega_d C$ **رآکتانس خازنی** است؛ در این حالت، جریان نسبت به اختلاف پتانسیل به اندازهٔ ۹۰ درجه ($\phi=-90^\circ=-\pi/2\text{rad}$) تقدم فاز دارد.

در یک القاگر، داریم $V_L=IX_L$، که در آن $X_L=\omega_d L$ **رآکتانس القایی** است؛ در این حالت، جریان نسبت به اختلاف پتانسیل به اندازهٔ ۹۰ درجه ($\phi=+90^\circ=+\pi/2\text{rad}$) تأخیر فاز دارد.

مدارهای RLC سری در یک مدار RLC سری با نیروی محرک الکتریکی با معادلهٔ ۳۳-۲۸ و جریان با معادلهٔ ۳۳-۲۹، داریم

$$I = \frac{\mathscr{E}_m}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

$$I = \frac{\mathscr{E}_m}{\sqrt{R^2 + (\omega_d L - 1/\omega_d C)^2}} \qquad (\text{دامنهٔ جریان}) \quad (۳۳\text{-}۶۰ ، ۳۳\text{-}۶۳)$$

و

$$\tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R} \qquad (\text{ثابت فاز}) \quad (۳۳\text{-}۶۵)$$

با تعریف کردن امپدانس مدار Z، به صورت

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \qquad (\text{امپدانس}) \quad (۳۳\text{-}۶۱)$$

معادلهٔ ۳۳-۶۰ را می‌توان به صورت $I=\mathscr{E}_m/Z$ نوشت.

توان در یک مدار RLC سری، **توان متوسط** مولد P_{avg}، برابر با آهنگ تولید انرژی گرمایی در مقاومت است:

$$P_{avg} = I_{rms}^2 R = \mathscr{E}_{rms} I_{rms}\cos\phi \qquad (۳۳\text{-}۷۱ ، ۳۳\text{-}۷۶)$$

در اینجا rms به معنای **جذر میانگین مربعی** است؛ رابطهٔ کمیت‌های rms با کمیت‌های بیشینه به صورت $I_{rms} = I/\sqrt{2}$، $V_{rms} = V_m/\sqrt{2}$ و $\mathscr{E}_{rms}=\mathscr{E}_m/\sqrt{2}$ است. کمیت $\cos\phi$ را **ضریب توان** مدار می‌نامند.

مبدل‌ها یک مبدل (به فرض آرمانی بودن) هسته‌ای آهنی است که روی آن در پیچهٔ اولی N_p دور سیم و در پیچهٔ ثانوی N_s دور سیم پیچیده شده است. اگر پیچهٔ اولی به دو سر یک مولد جریان متناوب وصل شود رابطهٔ میان ولتاژهای پیچه‌های اولی و ثانوی به صورت زیر است

$$V_s = V_p \frac{N_s}{N_p} \qquad \text{(تبدیل ولتاژ)} \qquad (۳۳\text{-}۷۹)$$

رابطهٔ جریان‌های گذرنده از پیچه‌ها چنین است:

$$I_s = I_p \frac{N_p}{N_s} \qquad \text{(تبدیل جریان)} \qquad (۳۳\text{-}۸۰)$$

و مقاومت معادل مدار ثانوی، دیده شده توسط مولد، برابر است با:

$$R_{eq} = \left(\frac{N_p}{N_s}\right)^2 R \qquad (۳۳\text{-}۸۲)$$

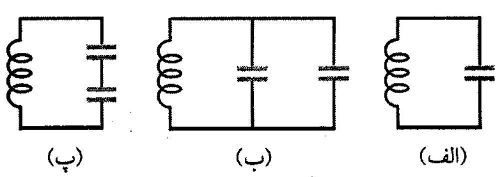
که در آن R بار مقاومتی در مدار ثانوی است. نسبت N_p/N_s را نسبت دورهای سیم پیچه‌های مبدل می‌نامند.

پرسش‌ها

۱. یک خازن باردار و یک القاگر را در لحظهٔ $t=0$ به هم وصل می‌کنیم. پس از چه مدت برحسب T، دورهٔ تناوب نوسان‌های حاصل، کمیت‌های زیر به مقدار بیشینهٔ خود می‌رسند: (الف) U_B، (ب) شار مغناطیسی گذرنده از القاگر، (پ) di/dt، و (ت) نیروی محرک الکتریکی القاگر؟

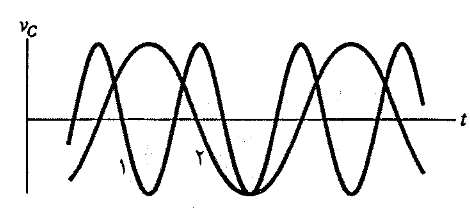
۲. در شکل ۳۳-۱، به ازای چه مقداری از ثابت فاز ϕ در معادلهٔ ۳۳-۱۲، حالت‌های (الف)، (پ)، (ث)، و (چ) در لحظهٔ $t=0$ رخ می‌دهند؟

۳. شکل ۳۳-۱۶، سه مدار نوسان کنندهٔ LC را با القاگرها و خازن‌های مشابه نشان می‌دهد. این مدارها را با توجه به زمان لازم برای بی‌بار شدن کامل خازن‌ها در حین نوسان کردن، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



شکل ۳۳-۱۶ پرسش ۳.

۴. شکل ۳۳-۱۷، نمودارهای v_C، ولتاژ دو سر خازن را برای مدارهای LC شماره‌های ۱ و ۲، که شامل خازن‌های مشابه و بار بیشینهٔ یکسان Q هستند، نشان می‌دهد. آیا (الف) القایدگی L و (ب) جریان بیشینهٔ I، در مدار ۱ نسبت به مدار ۲ بیشتر است، کمتر است یا مساوی است؟

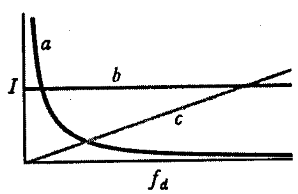


شکل ۳۳-۱۷ پرسش ۴.

۵. بارهای روی خازن‌های سه مدار نوسان کنندهٔ LC طبق معادله‌های زیر تغییر می‌کنند: (۱) $q = 2\cos 4t$، (۲) $q = 4\cos t$، (۳) $q = 3\cos 4t$ (q برحسب کولن و t برحسب ثانیه است). این مدارها را با توجه به (الف) دامنهٔ جریان و (ب) دوره تناوب نوسان، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.

۶. اگر در یک مدار نوسان کنندهٔ LC، القایدگی L را، که دارای بار الکتریکی بیشینه و معلوم Q است افزایش دهیم. آیا (الف) بزرگی جریان I و (ب) انرژی مغناطیسی بیشینهٔ U_B، افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد یا ثابت می‌ماند؟

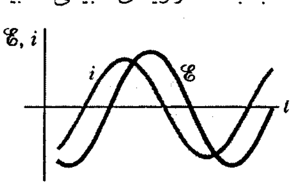
۷. یک مولد نیروی محرک الکتریکی متناوب با دامنهٔ نیروی محرک معین را به نوبت به یک مقاومت، یک خازن، و سپس به یک القاگر، وصل می‌کنیم. هر بار که یکی از این عنصرها را در مدار قرار می‌دهیم بسامد راه‌انداز، f_d را تغییر می‌دهیم و I، دامنهٔ جریان گذرنده از عنصر را اندازه‌گیری و منحنی‌های نتیجه‌های حاصل را رسم می‌کنیم. کدام یک از منحنی‌های شکل ۳۳-۱۸ مربوط به کدام یک از سه عنصر است؟



شکل ۳۳-۱۸ پرسش ۷.

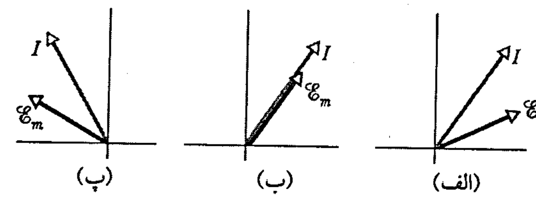
۸. مقادیر ثابت‌های فاز ϕ مربوط به چهار مدار RLC سری با نیروی محرک الکتریکی سینوسی، عبارت‌اند از: (۱) ۱۵- درجه، (۲) ۳۵+ درجه، (۳) $\frac{\pi}{3}$ rad، و (۴) $-\frac{\pi}{6}$ rad. (الف) در کدام مدار بار خازنی غالب است؟ (ب) در کدام مدار جریان نسبت به نیروی محرک الکتریکی متناوب تأخیر فاز دارد؟

۹. شکل ۳۳-۱۹، منحنی‌های جریان i و نیروی محرک الکتریکی راه‌انداز $\mathscr{E}$، مربوط به یک مدار RLC سری را نشان می‌دهد. (الف) آیا جریان نسبت به نیروی محرک الکتریکی تقدم فاز دارد یا تأخیر فاز؟ (ب) آیا بار مدار بیشتر خازنی است یا القایی؟ (پ) آیا بسامد زاویه‌ای نیروی محرک الکتریکی ω_d، نسبت به بسامد زاویه‌ای طبیعی ω بیشتر است یا کمتر؟



شکل ۳۳-۱۹ پرسش‌های ۹ و ۱۱.

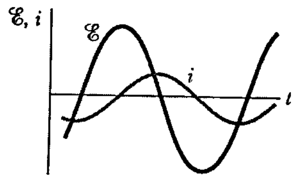
۱۰. شکل ۳۳-۲۰، سه حالت نظیر شکل ۳۳-۱۲ را نشان می‌دهد. در هر حالت، آیا بسامد زاویه‌ای راه‌انداز نسبت به بسامد زاویه‌ای تشدید مدار بیشتر است، کمتر است یا مساوی است؟



شکل ۳۳-۲۰ پرسش ۱۰.

۱۱. شکل ۳۳-۱۹، منحنی‌های جریان i و نیروی محرک الکتریکی راه‌انداز $\mathscr{E}$، مربوط به یک مدار RLC سری را نشان می‌دهد. اگر مقادیر (الف) L، (ب) C و (پ) ω_d را به تدریج افزایش دهیم، آیا منحنی جریان نسبت به منحنی نیروی محرک الکتریکی به سمت چپ جابه‌جا می‌شود یا به سمت راست، و آیا دامنهٔ منحنی افزایش پیدا می‌کند یا کاهش؟

۱۲. شکل ۳۳-۲۱، منحنی‌های جریان i و نیروی محرک الکتریکی راه‌انداز $\mathscr{E}$، مربوط به یک مدار RLC سری را نشان می‌دهد. (الف) آیا ثابت فاز مثبت است یا منفی؟ (ب) آیا برای افزایش دادن آهنگ انتقال انرژی به بار مقاومتی، L را باید افزایش داد یا کاهش؟ (پ) به جای آن، آیا C را باید افزایش داد یا کاهش؟



شکل ۳۳-۲۱ پرسش ۱۲.

تمرین‌ها و مسأله‌ها

بخش ۳۳-۲ نوسان‌های LC مطالعهٔ کیفی

۱ ت. در یک مدار نوسان کنندهٔ LC، اگر بار بیشینهٔ روی خازن ۱ر۶۰μC و انرژی کل ۱۴۰μJ باشد، ظرفیت خازن چقدر است؟

۲ ت. در یک مدار نوسان کننده LC، داریم $L =$ ۱ر۱۰mH و $C=$۴ر۰۰μF. بار بیشینهٔ روی خازن ۳ر۰۰μC است. جریان بیشینه را پیدا کنید.

۳ ت. یک مدار نوسان کنندهٔ LC، شامل یک القاگر با القاییدگی ۷۵ر۰mH و یک خازن با ظرفیت ۳ر۶۰μF است. اگر بار بیشینهٔ روی خازن ۲ر۹۰μC باشد، (الف) انرژی کل مدار و (ب) جریان بیشینه، چقدر است؟

۴ ت. در یک مدار نوسان کنندهٔ LC، انرژی کل در مدت ۱ر۵۰μs از انرژی الکتریکی در خازن به انرژی مغناطیسی در القاگر، تبدیل می‌شود. (الف) دورهٔ تناوب نوسان چقدر است؟ (ب) بسامد نوسان چقدر است؟ (پ) چه مدت پس از رسیدن انرژی مغناطیسی به مقدار بیشینه مقدار آن دوباره بیشینه می‌شود؟

۵ م. بسامد نوسان یک مدار LC برابر با ۲۰۰kHz است. در لحظهٔ $t=$۰، صفحهٔ A خازن دارای بار مثبت بیشینه است. در چه زمان‌های $t>$۰، (الف) بار مثبت صفحهٔ A دوباره بیشینه می‌شود، (ب) صفحهٔ دیگر خازن دارای بار مثبت بیشینه می‌شود، و (پ) میدان مغناطیسی القاگر بیشینه می‌شود؟

بخش ۳۳-۳ مانستگی الکتریکی-مکانیکی نوسان‌ها

۶ ت. وقتی یک جسم ۰ر۵۰ کیلوگرمی متصل به یک فنر نسبت به وضعیت تعادل خود به اندازهٔ ۲ر۰mm کشیده و رها می‌شود، با نیروی بازگردانندهٔ ۸ر۰N حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد. (الف) بسامد زاویه‌ای نوسان چقدر است؟ (ب) دورهٔ تناوب نوسان چقدر است؟ (پ) ظرفیت یک مدار نوسان کنندهٔ LC با همان دورهٔ تناوب و القاییدگی ۵ر۰H، چقدر است؟

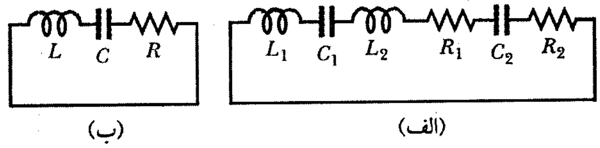
۷ م. یک مدار نوسان کنندهٔ LC شامل یک القاگر ۱ر۲۵H دارای انرژی ۵ر۷۰μJ است. بار بیشینهٔ روی خازن ۱۷۵μC است. مطلوب است تعیین (الف) جرم، (ب) ثابت نیروی فنر، (پ) جابه‌جایی بیشینه، و (ت) تندی بیشینه، برای یک دستگاه مکانیکی با دورهٔ تناوب یکسان.

بخش ۳۳-۴ نوسان‌های LC مطالعهٔ کمّی

۸ ت. نوسانگرهای LC را در مدارهای متصل به بلندگوها برای تولید برخی صداهای موسیقی الکترونیکی به کار می‌برند. چه القاگری باید با یک خازن ۶ر۷μF به کار برده شود تا بسامد ۱۰kHz، واقع در میانهٔ گسترهٔ بسامدهای صوتی، به وجود آید؟

۹ ت. در یک مدار نوسان‌کنندهٔ LC با عنصرهای $L=$۵۰mH و $C=$۴ر۰μF، جریان در آغاز بیشینه است. پس از چه مدت خازن برای نخستین بار به‌طور کامل باردار می‌شود؟

۱۰ ت. یک مدار تک حلقه‌ای شامل القاگرها (L_1، L_2، ...)، خازن‌ها (C_1، C_2، ...) و مقاومت‌ها (R_1، R_2، ...) است که به طور سری، مثلاً، مطابق شکل ۳۳-۲۲ الف، به هم وصل شده‌اند. نشان دهید که بدون در نظر گرفتن ترتیب اتصال عنصرهای مداری در این حلقه، رفتار این مدار مانند رفتار مدار LC سادهٔ نشان داده شده در شکل ۳۳-۲۲ ب است. (راهنمایی: قاعدهٔ حلقه را به کار ببرید و مسأله ۴۳ در فصل ۳۱ را ببینید).

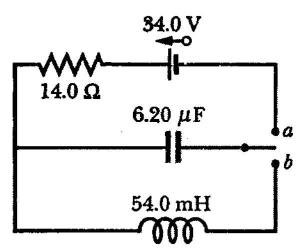


شکل ۳۳-۲۲ تمرین ۱۰.

۱۱ م. یک مدار نوسان کنندهٔ LC، متشکل از خازنی به ظرفیت ۱٫۰nF و پیچه‌ای به القاییدگی ۳٫۰mH دارای ولتاژ بیشینهٔ ۳٫۰V است. (الف) بار بیشینهٔ روی خازن چیست؟ (ب) جریان بیشینهٔ گذرنده از مدار چقدر است؟ (پ) انرژی بیشینهٔ ذخیره شده در میدان مغناطیسی پیچه چیست؟

۱۲ م. در مدار نوسان کنندهٔ LC، شامل خازنی به ظرفیت $C=$۴٫۰۰μF، هنگام نوسان کردن مدار اختلاف پتانسیل بیشینهٔ دو سر خازن ۱٫۵۰V و جریان بیشینهٔ گذرنده از القاگر ۵۰٫۰mA است. (الف) القاییدگی L چقدر است؟ (ب) بسامد نوسان‌ها چیست؟ (پ) چه مدت طول می‌کشد تا بار خازن از صفر به مقدار بیشینهٔ خود برسد؟

۱۳ م. در مدار شکل ۳۳-۲۳، کلید را به مدتی دراز در وضعیت a قرار می‌دهیم. سپس، کلید را به نقطهٔ b وصل می‌کنیم. (الف) بسامد جریان نوسان کنندهٔ حاصل را حساب کنید. (ب) دامنهٔ نوسان‌های جریان چقدر است؟



شکل ۳۳-۲۳ مسألهٔ ۱۳.

۱۴ م. القاگری با القاییدگی ۱۰mH و دو خازن به ظرفیت‌های ۵٫۰μF و ۲٫۰μF در اختیار داریم. بسامدهای نوسانی را که با به هم بستن این سه عنصر در ترکیب‌های گوناگون می‌توانند تولید شوند در فهرستی گردآوری کنید.

۱۵ م. خازن متغیری با گسترهٔ ظرفیت ۱۰ تا ۳۶۵pF همراه با یک پیچه برای ساختن یک مدار LC با بسامد متغیر به منظور کوک کردن ورودی رادیو به‌کار می‌رود. (الف) با این خازن نسبت بیشینهٔ بسامدها به کمینهٔ بسامدهای مورد استفاده چقدر است؟ (ب) اگر بخواهیم با این مدار بسامدهای ۰٫۵۴MHz تا ۱٫۶۰MHz را تولید کنیم نسبت حساب شده در قسمت (الف) خیلی بزرگ می‌شود. با افزودن یک خازن به طور موازی با خازن متغیر می‌توان این گستره را تنظیم کرد. ظرفیت این خازن افزوده شده چقدر باید باشد و از چه القاگری باید استفاده شود تا گسترهٔ مطلوب بسامدها به دست آید؟

۱۶ م. در یک مدار نوسان کنندهٔ LC و در لحظهٔ معینی ۷۵٪ انرژی کل در میدان مغناطیسی القاگر ذخیره می‌شود. (الف) بار روی خازن در آن لحظه، برحسب بار بیشینهٔ خازن، چقدر است؟ (ب) جریان القاگر در آن لحظه، برحسب جریان بیشینهٔ القاگر، چقدر است؟

۱۷ م. در یک مدار نوسان کنندهٔ LC، داریم $L=$۲۵٫۰mH و $C=$۷٫۸۰μF. در لحظهٔ $t=$۰، جریان مدار ۹٫۲۰mA، بار روی خازن ۳٫۸۰μC، و خازن در حال باردار شدن است. (الف) انرژی کل مدار چقدر است؟ (ب) بار بیشینهٔ روی خازن چیست؟ (پ) جریان بیشینه چقدر است؟ (ت) اگر معادلهٔ بار روی خازن به صورت $q=Q\cos(\omega t+\phi)$ باشد، زاویهٔ فاز ϕ چقدر است؟ (ث) فرض کنید داده‌ها تغییر نمی‌کنند، جز آنکه خازن در لحظهٔ $t=$۰ در حال خالی شدن است. در این صورت، ϕ چقدر است؟

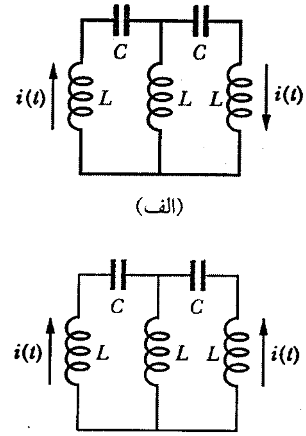
۱۸ م. القاگری به دو سر خازنی وصل شده است که ظرفیت آن با چرخاندن یک پیچ می‌تواند تغییر کند. می‌خواهیم بسامد این مدار LC برحسب زاویهٔ چرخش پیچ از صفر تا ۱۸۰ درجه، از 2×10^5Hz تا 4×10^5Hz به‌طور خطی تغییر کند. به ازای $L=$۱٫۰mH، منحنی تغییرات ظرفیت خازن C، را برحسب زاویهٔ چرخش پیچ رسم کنید.

۱۹ م. در یک مدار نوسان‌کنندهٔ LC، داریم $L=$۳٫۰۰mH و $C=$۲٫۷۰μF. در لحظهٔ $t=$۰، بار روی خازن صفر و جریان ۲٫۰۰A است. (الف) بار بیشینه‌ای که روی خازن ظاهر می‌شود چقدر است؟ (ب) چه مدت پس از لحظهٔ $t=$۰، برحسب دورهٔ تناوب نوسان T، انرژی ذخیره شده در خازن با بیشترین آهنگ خود افزایش می‌یابد؟ (پ) این بیشترین آهنگ که با آن انرژی به خازن انتقال می‌یابد، چقدر است؟

۲۰ م. یک مدار سری شامل القاییدگی L_1 و ظرفیت C_1، با بسامد زاویه‌ای ω نوسان می‌کند. مدار سری دیگری، شامل القاییدگی L_2 و ظرفیت C_2، با همان بسامد زاویه‌ای نوسان می‌کند. بسامد زاویه‌ای نوسان یک مدار سری متشکل از این چهار عنصر، برحسب ω، چقدر است؟ از مقاومت چشم‌پوشی کنید. (راهنمایی: از فرمول‌های مربوط به ظرفیت معادل و القاییدگی معادل استفاده کنید؛ بخش ۲۶-۴ و مسألهٔ ۴۳ در فصل ۳۱ را ببینید).

۲۱ م. در یک مدار نوسان کنندهٔ LC، ظرفیت خازن $C=$۶۴٫۰μF است و جریان برحسب زمان از معادله $i=(1.60)\sin(2500t+0.680)$ به‌دست می‌آید، که در آن t برحسب ثانیه، i برحسب آمپر و ثابت فاز برحسب رادیان است. (الف) چه مدت پس از لحظهٔ $t=$۰، جریان به مقدار بیشینهٔ خود می‌رسد؟ (ب) القاییدگی L و (پ) انرژی کل، چقدر است؟

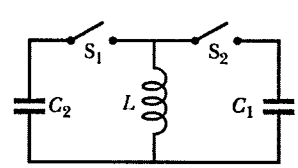
۲۲ م. سه القاگر مشابه L و دو خازن مشابه C در یک مدار دو حلقه‌ای، مطابق شکل ۳۳-۲۴، به هم وصل شده‌اند. (الف) فرض کنید جریان‌های مدار در شکل ۳۳-۲۴ الف نشان داده شده‌اند. جریان در القاگر میانی چقدر است؟ معادله‌های مربوط به حلقه‌ها را بنویسید و نشان دهید که اگر جریان



شکل ۳۳-۲۴ مسألهٔ ۲۲.

با بسامد زاویه‌ای $\omega=1/\sqrt{LC}$ نوسان کند، این معادله‌ها صدق می‌کنند. (ب) اکنون فرض کنید که جریان‌های مدار مطابق شکل ۳۳-۲۴ ب هستند. جریان در القاگر میانی چقدر است؟ معادله‌های مربوط به حلقه‌ها را بنویسید و نشان دهید که اگر جریان با بسامد زاویه‌ای $\omega=1/\sqrt{3LC}$ نوسان کند، این معادله‌ها صدق می‌کنند. چون این مدار می‌تواند با دو بسامد متفاوت نوسان کند، به جای آن نمی‌توان یک مدار LC تک حلقه‌ای معادل قرار داد.

*۲۳ **م.** در شکل ۳۳-۲۵، خازن ۱ با ظرفیت $C_1=$ ۹۰۰μF در آغاز تا ولتاژ ۱۰۰V باردار شده و خازن ۲ با ظرفیت $C_2=$ ۹۰۰μF بی‌بار است. القایدگی القاگر ۰ر۱۰H است. به تفصیل توضیح دهید که با دستکاری کلیدهای S_1 و S_2 چگونه می‌توان خازن ۲ را تا ولتاژ ۳۰۰V باردار کرد؟



شکل ۳۳-۲۵ مسألهٔ ۲۳.

بخش ۳۳-۵ نوسان‌های میرا در مدار RLC

۲۴ **ت.** یک مدار LC میرا را در نظر بگیرید. (الف) نشان دهید که جملهٔ میراکنندهٔ $e^{-Rt/2L}$ را (که شامل L است اما شامل C نیست) می‌توان به صورت $e^{-\pi R(\sqrt{C/L})t/T}$ (که شامل L و C است) نوشت. در اینجا T دورهٔ تناوب نوسان است (با چشم‌پوشی از مقاومت). (ب) با استفاده از قسمت (الف) نشان دهید که یکای $\sqrt{L/C}$ در SI، اهم است. (پ) با استفاده از قسمت (الف) نشان دهید که شرط کوچک بودن اتلاف انرژی در هر چرخه، عبارت است از $R \ll \sqrt{L/C}$.

۲۵ **ت.** مقاومت R که باید به طور سری با القاگری به القایدگی $L=$ ۲۲۰mH و خازنی به ظرفیت $C=$ ۱۲ر۰μF وصل شود تا بار بیشینهٔ روی خازن در طول ۵۰ر۰ چرخه به ۹۹ر۰٪ مقدار آغازی خود کاهش یابد، چقدر است؟ (فرض کنید $\omega \approx \omega'$).

۲۶ **م.** یک مدار تک حلقه‌ای شامل مقاومت ۷ر۲۰Ω، القاگر ۱۲ر۰H و خازن ۳ر۲۰μF است. بار آغازی خازن ۶ر۲۰μC و جریان مدار صفر است. بار روی خازن را پس از N چرخهٔ کامل، به ازای $N=$ ۵، ۱۰، ۱۰۰، حساب کنید.

۲۷ **م.** در مدار نوسان کنندهٔ RLC سری، زمان لازم برای افت انرژی بیشینهٔ خازن را در حین نوسان کردن به نصف مقدار آغازی پیدا کنید. فرض کنید به ازای $t=0$، داریم $q=Q$.

۲۸ **م.** در یک مدار RLC سری، در لحظهٔ $t=0$ هیچ باری روی خازن وجود ندارد و از القاگر جریان I عبور می‌کند. (الف) ثابت فاز مدار ϕ، مربوط به معادلهٔ ۳۳-۲۵ را پیدا کنید. (ب) معادلهٔ بار الکتریکی خازن q، را برحسب زمان t و برحسب دامنهٔ جریان و بسامد زاویه‌ای نوسان‌ها ω'، بنویسید.

*۲۹ **م.** در یک مدار نوسان کنندهٔ RLC سری، نشان دهید که اتلاف نسبی انرژی در هر چرخهٔ نوسان، یعنی $\Delta U/U$، با تقریب خوبی برابر است با $2\pi R/\omega L$. کمیت $\omega L/R$ را اغلب Q (ضریب کیفیت) مدار می‌نامند. مدار با Q بالا دارای مقاومت کم و اتلاف نسبی انرژی (مساوی با $2\pi/Q$) کم در هر چرخه است.

بخش ۳۳-۸ بررسی سه مدار ساده

۳۰ **ت.** خازنی به ظرفیت ۱ر۵۰μF را، مطابق شکل ۳۳-۹ الف، به دو سر یک مولد جریان متناوب با $\mathscr{E}_m=$ ۳۰ر۰V وصل می‌کنیم. دامنهٔ جریان متناوب حاصل، در صورتی که بسامد نیروی محرک الکتریکی (الف) ۱ر۰۰kHz، و (ب) ۸ر۰۰kHz باشد، چیست؟

۳۱ **ت.** القاگری به القایدگی ۵۰ر۰mH را، مطابق شکل ۳۳-۱۰ الف، به دو سر یک مولد جریان متناوب با $\mathscr{E}_m=$ ۳۰ر۰V وصل می‌کنیم. دامنهٔ جریان متناوب حاصل، در صورتی که بسامد نیروی محرک الکتریکی (الف) ۱ر۰۰kHz، و (ب) ۸ر۰۰kHz باشد، چیست؟

۳۲ **ت.** مقاومت ۵۰ر۰Ω را، مطابق شکل ۳۳-۸ الف، به دو سر یک مولد جریان متناوب با $\mathscr{E}_m=$ ۳۰ر۰V وصل می‌کنیم. دامنهٔ جریان متناوب حاصل در صورتی که بسامد نیروی محرک الکتریکی (الف) ۱ر۰۰kHz، و (ب) ۸ر۰۰kHz باشد، چیست؟

۳۳ **ت.** (الف) به ازای چه بسامدی، القاگری با القایدگی ۶ر۰mH و خازنی با ظرفیت ۱۰μF رآکتانس مساوی دارند. (ب) مقدار این رآکتانس چقدر است؟ (پ) نشان دهید که این بسامد برابر با بسامد طبیعی یک مدار نوسان کنندهٔ با همان مقادیر L و C است.

۳۴ **م.** معادلهٔ نیروی محرک یک مولد جریان متناوب $\mathscr{E}=\mathscr{E}_m\sin\omega t$ است، که در آن $\mathscr{E}_m=$ ۲۵ر۰V و $\omega=$ ۳۷۷rad/s. این مولد به دو سر القاگری با

القاییدگی ۱۲٫۷H وصل می‌شود. (الف) مقدار بیشینهٔ جریان چقدر است؟ (ب) وقتی جریان بیشینه است، نیروی محرک الکتریکی مولد چقدر است؟ (پ) وقتی نیروی محرک الکتریکی مولد ۱۲٫۵V− و بزرگی‌اش در حال افزایش است، جریان مدار چقدر است؟

۳۵ م. معادلهٔ نیروی محرک الکتریکی یک مولد جریان متناوب $\mathscr{E}=\mathscr{E}_m\sin(\omega_d t-\pi/4)$ است، که در آن $\mathscr{E}_m=$ ۳۰٫۰V و $\omega=$ ۳۵۰rad/s. جریان تولید شده در مدار متصل به این مولد، از معادلهٔ $i(t)=I\sin(\omega_d t-3\pi/4)$ به دست می‌آید، که در آن $I=$ ۶۲۰mA. (الف) در چه زمانی پس از لحظهٔ $t=0$ نیروی محرک الکتریکی مولد برای نخستین بار به مقدار بیشینه می‌رسد؟ (ب) در چه زمانی پس از لحظهٔ $t=0$ جریان مدار برای نخستین بار به مقدار بیشینه می‌رسد؟ (پ) در این مدار به جز مولد عنصر دیگری هم وجود دارد. این عنصر خازن است، القاگر است یا مقاومت است؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید. (ت) مقدار ظرفیت، القاییدگی، یا مقاومت این عنصر موجود در مدار چقدر است؟

۳۶ م. مولد جریان متناوب مسألهٔ ۳۴ به خازنی به ظرفیت ۴٫۱۵μF وصل می‌شود. (الف) مقدار بیشینهٔ جریان چقدر است؟ (ب) وقتی جریان بیشینه است، نیروی محرک الکتریکی مولد چقدر است؟ (پ) وقتی نیروی محرک الکتریکی مولد ۱۲٫۵V− و بزرگی‌اش در حال افزایش است، جریان مدار چقدر است؟

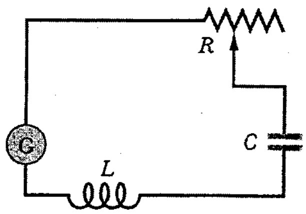
بخش ۳۳ـ۹ مدار RLC سری

۳۷ ت. (الف) مقادیر Z، ϕ و I خواسته شده در مسألهٔ نمونهٔ ۳۳ـ۷ را با این شرط که خازن از مدار حذف شود و پارامترهای دیگر مسأله بدون تغییر بمانند، پیدا کنید. (ب) نمودار فازوری مربوط به وضعیت جدید را شبیه شکل ۳۳ـ۱۱ ت، با مقیاس رسم کنید.

۳۸ ت. (الف) مقادیر Z، ϕ و I خواسته شده در مسألهٔ نمونهٔ ۳۳ـ۷ را با این شرط که القاگر از مدار حذف شود و پارامترهای دیگر مسأله بدون تغییر بمانند، پیدا کنید. (ب) نمودار فازوری مربوط به وضعیت جدید را شبیه شکل ۳۳ـ۱۱ ت، با مقیاس رسم کنید.

۳۹ ت. (الف) مقادیر Z، ϕ و I خواسته شده در مسألهٔ نمونهٔ ۳۳ـ۷ را به‌ازای $C=$ ۷۰٫۰μF و با این شرط که پارامترهای دیگر مسأله بدون تغییر بمانند، پیدا کنید. (ب) نمودار فازوری مربوط به وضعیت جدید را شبیه شکل ۳۳ـ۱۱ ت، با مقیاس رسم و دو نمودار را به‌دقت با هم مقایسه کنید.

۴۰ م. در شکل ۳۳ـ۲۶، یک مولد با بسامد تنظیم‌پذیر به یک مقاومت متغیر R، خازنی به ظرفیت $C=$ ۵٫۵۰μF و القاگری با القاییدگی L وصل شده است. دامنهٔ جریان تولید شده در مدار توسط مولد به ازای بسامد ۱٫۳۰kHz یا بسامد ۱٫۵۰kHz، در تراز نیم ـ بیشینه است. (الف) مقدار L چقدر است؟ (ب) اگر R افزایش یابد بسامدهایی که در آنها دامنهٔ جریان در حالت نیم ـ بیشینه است، چه تغییری می‌کنند؟



شکل ۳۳ـ۲۶ مسألهٔ ۴۰.

۴۱ م. آیا در یک مدار RLC دامنهٔ ولتاژ دو سر القاگر می‌تواند از دامنهٔ نیروی محرک الکتریکی مولد بیشتر باشد؟ مدار RLC با مشخصات $\mathscr{E}_m=$ ۱۰V، $R=$ ۱۰Ω، $L=$ ۱٫۰H، و $C=$ ۱٫۰μF را در نظر بگیرید. دامنهٔ ولتاژ دو سر القاگر را در حالت تشدید به دست آورید.

۴۲ م. هنگامی که نیروی محرک الکتریکی مولد مسألهٔ نمونهٔ ۳۳ـ۷ بیشینه است، ولتاژ دو سر (الف) مولد، (ب) مقاومت، (پ) خازن، و (ت) القاگر، چقدر است؟ (ث) با جمع کردن این مقادیر با علامت مناسب، ثابت کنید که قانون حلقه صادق است.

۴۳ م. پیچه‌ای با خودالقایی ۸۸mH و مقاومت نامعلوم، با خازنی به ظرفیت ۰٫۹۴μF به طور سری به یک مولد نیروی محرک متناوب با بسامد ۹۳۰Hz وصل شده است. اگر زاویهٔ اختلاف فاز میان ولتاژ اعمال شده و جریان مدار ۷۵ درجه باشد، مقاومت پیچه چقدر است؟

۴۴ م. یک مولد ac با $\mathscr{E}_m=$ ۲۲۰V و بسامد کار ۴۰۰Hz، در یک مدار RLC سری با مشخصات $R=$ ۲۲۰Ω، $L=$ ۱۵۰mH، و $C=$ ۲۴٫۰μF نوسان‌هایی ایجاد می‌کند. مطلوب است تعیین (الف) رآکتانس خازنی X_C، (ب) امپدانس Z، و (پ) دامنهٔ جریان I. اکنون، خازن دیگری با همان ظرفیت را به طور سری به عنصرهای دیگر وصل می‌کنیم. آیا مقادیر (ت) X_C، (ث) Z، و (ج) I افزایش می‌یابند، کاهش می‌یابند یا ثابت می‌مانند؟

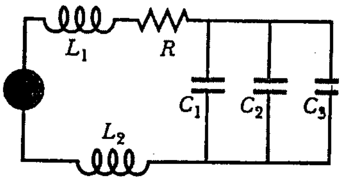
۴۵ م. یک مدار RLC سری، مانند شکل ۳۳ـ۷، دارای مشخصات $R=$ ۵٫۰۰Ω، $C=$ ۲۰٫۰μF، $L=$ ۱٫۰۰H و $\mathscr{E}_m=$ ۳۰٫۰V است. (الف) به ازای چه بسامد زاویه‌ای ω_d، دامنهٔ جریان مانند منحنی‌های تشدید شکل ۳۳ـ۱۳، دارای مقدار بیشینه است. (ب) این مقدار بیشینه چقدر است؟ (پ) به ازای چه بسامدهای زاویه‌ای ω_{d1} و ω_{d2}، دامنهٔ جریان به اندازهٔ نصف مقدار بیشینه است؟ (ت) نیم ـ پهنای نسبی [مساوی با $(\omega_{d1}-\omega_{d2})/\omega$] منحنی تشدید این مدار چقدر است؟

۴۶ م. یک مولد ac را به طور سری به القاگر $L=$ ۲٫۰۰mH و خازن C وصل می‌کنیم. می‌خواهیم C را با استفاده از خازن‌هایی با ظرفیت‌های $C_1=$ ۴٫۰۰μF و $C_2=$ ۶٫۰۰μF، به تنهایی یا با هم، تهیه کنیم. بسامدهای تشدید این مدار، بسته به نحوهٔ استفاده از C_1 و C_2، چه مقادیری می‌توانند داشته باشند؟

۴۷ م. نشان دهید که نیم - پهنای نسبی یک منحنی تشدید (به مسأله ۴۵ رجوع کنید) از معادلهٔ زیر به دست می‌آید

$$\frac{\Delta\omega_d}{\omega} = \sqrt{\frac{۳C}{L}}\,R$$

۴۸ م. در شکل ۳۳-۲۷، یک مولد با بسامد تنظیم‌پذیر، به مقاومت R=۱۰۰Ω، القاییدگی‌های L_1=۱٫۷۰mH و L_2=۲٫۳۰mH، و ظرفیت‌های C_1=۴٫۰۰μF، C_2=۲٫۵۰μF و C_3=۳٫۵۰μF وصل شده است. (الف) بسامد تشدید مدار چقدر است؟ (راهنمایی: مسأله ۴۳ در فصل ۳۱ را ببینید). چه تغییری در بسامد تشدید به وجود می‌آید، اگر (ب) مقدار R افزایش پیدا کند، (پ) مقدار L_1 افزایش پیدا کند، و (ت) خازن C_3 از مدار حذف شود؟



شکل ۳۳-۲۷ مسألهٔ ۴۸.

بخش ۳۳-۱۰ توان در مدارهای جریان متناوب

۴۹ ت. در یک مقاومت معین چه جریان مستقیمی می‌تواند همان مقدار گرمایی را تولید کند که یک جریان متناوب با مقدار بیشینهٔ ۲٫۶A تولید می‌کند؟

۵۰ ت. یک ولت‌سنج با مقاومت درونی زیاد را، به نوبت، به دو سر القاگر، خازن، و مقاومت موجود در یک مدار سری، شامل مولد جریان متناوب با نیروی محرک الکتریکی ۱۰۰V (rms)، وصل می‌کنیم. ولت‌سنج در هر سه حالت مقدار یکسانی را می‌خواند. این مقدار خوانده شده چقدر است؟

۵۱ ت. مقدار بیشینهٔ یک‌ولتاژ متناوب با مقدار rms برابر با ۱۰۰V، چقدر است؟

۵۲ ت. (الف) در شرایط قسمت (پ) مسألهٔ ۳۴، آیا مولد انرژی می‌دهد یا از بقیهٔ مدار انرژی می‌گیرد؟ (ب) به این پرسش در مورد شرایط قسمت (پ) مسألهٔ ۳۶ نیز پاسخ دهید.

۵۳ ت. آهنگ متوسط اتلاف انرژی را در مدارهای مربوط به تمرین‌های ۳۱، ۳۲، ۳۷ و ۳۸ حساب کنید.

۵۴ ت. نشان دهید که آهنگ متوسط انرژی داده شده به مدار شکل ۳۳-۷ را از رابطهٔ $P_{avg}=\mathscr{E}^۲_{rms}R/Z^۲$ نیز می‌توان به دست آورد. نشان دهید که این رابطهٔ توان متوسط می‌تواند در حالت‌های مربوط به مدار مقاومتی خالص، مدار RLC در حال تشدید، مدار خازنی خالص و مدار القایی خالص، نتیجه‌های قابل قبولی به دست بدهد.

۵۵ ت. یک دستگاه تهویهٔ متصل به خط جریان متناوب ۱۲۰ ولت rms، شامل مقاومت ۱۲٫۰Ω و رآکتانس القایی ۱٫۳۰Ω به طور سری است. (الف) امپدانس دستگاه تهویه را حساب کنید. (ب) آهنگ متوسط انرژی داده شده به دستگاه را پیدا کنید.

۵۶ م. در یک مدار نوسان کنندهٔ RLC سری، داریم R=۱۶٫۰Ω، C=۳۱٫۲μF، L=۹٫۲۰mH و $\mathscr{E}=\mathscr{E}_m\sin\omega_d t$، که در آن $\mathscr{E}_m$=۴۵٫۰V و ω_d=۳۰۰۰rad/s. در زمان t=۰٫۴۴۲ms، مطلوب است تعیین (الف) آهنگ انرژی تولید شده توسط مولد، (ب) آهنگ تغییر انرژی در خازن، (پ) آهنگ تغییر انرژی در القاگر، و (ت) آهنگ اتلاف انرژی در مقاومت. (ث) معنای نتیجه‌های منفی در قسمت‌های (الف)، (ب) و (پ) چیست؟ (ج) نشان دهید که مجموع نتیجه‌های قسمت‌های (ب)، (پ) و (ت) برابر با نتیجهٔ قسمت (الف) است.

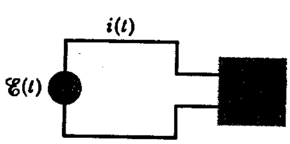
۵۷ م. شکل ۳۳-۲۸، مولد جریان متناوبی را نشان می‌دهد که از طریق دو پایانه به یک «جعبهٔ سیاه» وصل شده است. این جعبه شامل یک مدار RLC، یا شاید یک مدار چند حلقه‌ای، است که عنصرها و اتصال‌های مدار نامعلوم‌اند. اندازه‌گیری‌های خارج جعبه نشان می‌دهند که:

$$\mathscr{E}(t) = (۷۵٫۰\,\mathrm{V})\sin\omega_d t$$

و

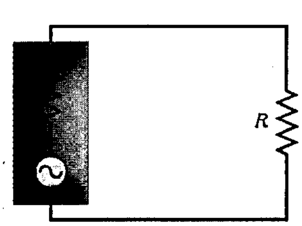
$$i(t) = (۱٫۲۰\,\mathrm{A})\sin(\omega_d t + ۴۲٫۰^\circ)$$

(الف) ضریب توان مدار چقدر است؟ (ب) آیا جریان نسبت به نیروی محرک الکتریکی تقدم فاز دارد یا تأخیر فاز؟ (پ) آیا مدار درون جعبه بیشتر دارای بار القایی است یا بار خازنی؟ (ت) آیا مدار درون جعبه در حال تشدید است؟ (ث) آیا درون جعبه حتماً باید خازن وجود داشته باشد؟ القاگر چطور؟ مقاومت چطور؟ (ج) آهنگ متوسط انرژی داده شده به جعبه توسط مولد چقدر است؟ (چ) چرا برای پاسخ دادن به همهٔ این پرسش‌ها نیازی به دانستن بسامد زاویه‌ای ω_d نیست؟



شکل ۳۳-۲۸ مسألهٔ ۵۷.

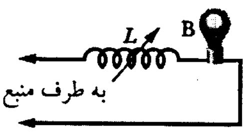
۵۸ م. در شکل ۳۳-۲۹، نشان دهید که آهنگ متوسط اتلاف انرژی در مقاومت R هنگامی بیشینه است که R با مقاومت درونی مولد جریان متناوب r، برابر باشد. (در بحث‌های اخیر به طور ضمنی فرض شده بود که r=۰).



شکل ۳۳-۲۹ مسأله‌های ۵۸ و ۶۵.

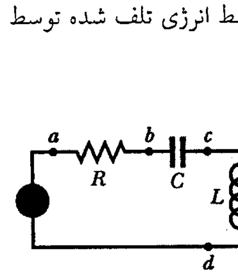
۵۹ م. در یک مدار RLC، مانند شکل ۳۳-۷، فرض کنید R=۵ر۰۰Ω، L=۶۰ر۰mH، f_d=۶۰ر۰Hz، و $\mathscr{E}_m$=۳۰ر۰V. به ازای چه مقادیری از ظرفیت خازن، آهنگ متوسط انرژی تلف شده در مقاومت، (الف) بیشینه و (ب) کمینه، است؟ (پ) مقدار این آهنگ‌های انرژی تلف شدهٔ بیشینه و کمینه چیست؟ (ت) زاویه‌های فاز متناظر و (ث) ضریب‌های توان متناظر، کدام‌اند؟

۶۰ م. یک «کاهندهٔ نور» که برای کاهش دادن شدت نور لامپ‌ها در تئاتر به‌کار می‌رود، مطابق شکل ۳۳-۳۰، از یک القاگر متغیر L (که القاییدگی آن بین صفر و L_{max} تنظیم می‌شود) به طور سری با لامپ روشنایی B تشکیل شده است. مشخصات منبع تغذیه ۱۲۰V(rms)، ۵۰Hz؛ و مشخصات لامپ «۱۲۰V، ۱۰۰۰W» است. (الف) مقدار لازم L_{max} چقدر باید باشد تا آهنگ اتلاف انرژی در لامپ روشنایی از حد بالای توان ۱۰۰۰W خود تا نسبت $\frac{۱}{۵}$ تغییر کند؟ فرض کنید که مقاومت لامپ از دما مستقل است. (ب) آیا به جای القاگر می‌توان از یک مقاومت متغیر (که بین صفر و R_{max} تنظیم می‌شود) استفاده کرد؟ اگر می‌شود، مقدار R_{max} لازم چقدر است؟ چرا این کار را انجام نمی‌دهند؟



شکل ۳۳-۳۰ مسألهٔ ۶۰.

۶۱ م. در شکل ۳۳-۳۱، داریم R = ۱۵ر۰Ω، C = ۴ر۷۰μF و L=۲۵ر۰mH. مولدی یک ولتاژ سینوسی ۷۵ر۰V(rms) با بسامد f=۵۵۰Hz به مدار می‌دهد. (الف) جریان rms مدار را حساب کنید. (ب) مقدار rms ولتاژهای V_{ab}، V_{bc}، V_{cd}، V_{bd}، V_{ad} را به دست آورید. (پ) آهنگ متوسط انرژی تلف شده توسط هر یک از عنصرهای مدار چقدر است؟



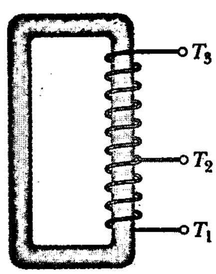
شکل ۳۳-۳۱ مسألهٔ ۶۱.

بخش ۳۳-۱۱ مبدل‌ها

۶۲ ت. مولدی به پیچهٔ اولی یک مبدل با ۵۰ دور سیم یک ولتاژ ۱۰۰V می‌دهد. اگر تعداد دورهای سیم پیچهٔ ثانوی ۵۰۰ باشد، ولتاژ پیچهٔ ثانوی چقدر است؟

۶۳ ت. مبدلی شامل ۵۰۰ دور سیم در پیچهٔ اولی و ۱۰ دور سیم در پیچهٔ ثانوی است. (الف) اگر ولتاژ پیچهٔ اولی V_p، برابر با ۱۲۰V(rms) باشد، مقدار ولتاژ V_s در پیچهٔ ثانوی در حالت مدار باز، چقدر است؟ (ب) اکنون، اگر دو سر پیچهٔ ثانوی را به بار مقاومتی ۱۵Ω وصل کنیم، جریان‌های پیچه‌های اولی و ثانوی چه خواهند بود؟

۶۴ ت. شکل ۳۳-۳۲ یک «مبدل خودکار» را نشان می‌دهد. این مبدل شامل یک تک پیچه (با یک هستهٔ آهنی) است. پیچه دارای سه پایانهٔ T_i است. در میان پایانه‌های $T_۱$ و $T_۲$، ۲۰۰ دور سیم و در میان پایانه‌های $T_۲$ و $T_۳$، ۸۰۰ دور سیم وجود دارد. هر دو پایانه را می‌توان به عنوان «پایانهٔ اولی» و هر دو پایانه را می‌توان به عنوان «پایانهٔ ثانوی» مبدل در نظر گرفت. تمام نسبت‌های ممکن تغییر دادن ولتاژهای اولی به ولتاژ ثانوی مبدل را در فهرستی گردآوری کنید.

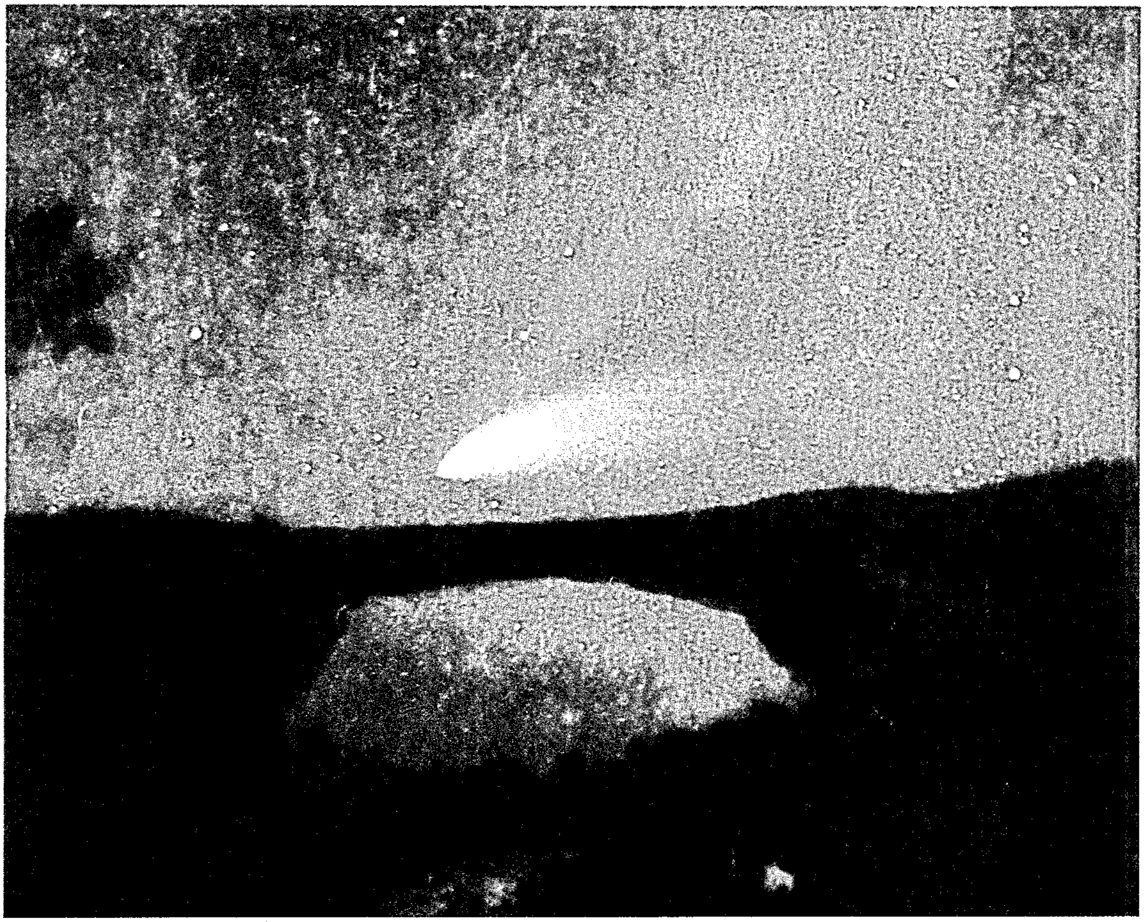


شکل ۳۳-۳۲ تمرین ۶۴.

۶۵ م. در شکل ۳۳-۲۹، فرض کنید جعبهٔ مستطیلی سمت چپ نمایشگر خروجی (با امپدانس بالای) یک تقویت کنندهٔ صوتی با r=۱۰۰۰Ω باشد، و نیز فرض کنید R=۱۰Ω معرف پیچهٔ (با امپدانس کم) یک بلندگو است. برای انتقال بیشینهٔ انرژی به مقاومت بار R، باید شرط $R=r$ برقرار باشد، که در این حالت چنین نیست، اما با استفاده از یک مبدل می‌توان برای «تبدیل» مقاومت‌ها استفاده کرد؛ در این حالت مقاومت‌ها از نظر الکتریکی به گونه‌ای رفتار می‌کنند که گویی از مقدار واقعی خود بزرگتر یا کوچکتر شده‌اند. پیچه‌های اولی و ثانوی یک مبدل را که باید در شکل ۳۳-۲۹ بین تقویت کننده و بلندگو قرار داده شوند طوری انتخاب کنید که همسازی امپدانس صورت گیرد. نسبت دورهای سیم پیچه‌ها چقدر باید باشد؟

۳۴

موجهای الکترومغناطیسی



به برون سوی خورشید می‌راند. اما ذرات گرد و غبار تحت تأثیر باد خورشیدی قرار نمی‌گیرند و به ظاهر در مدار دنباله‌دار به حرکت ادامه می‌دهند.

چرا بیشتر ذرات گرد و غبار در تصویر به شکل دُم به پایین خم شده دیده می‌شوند؟

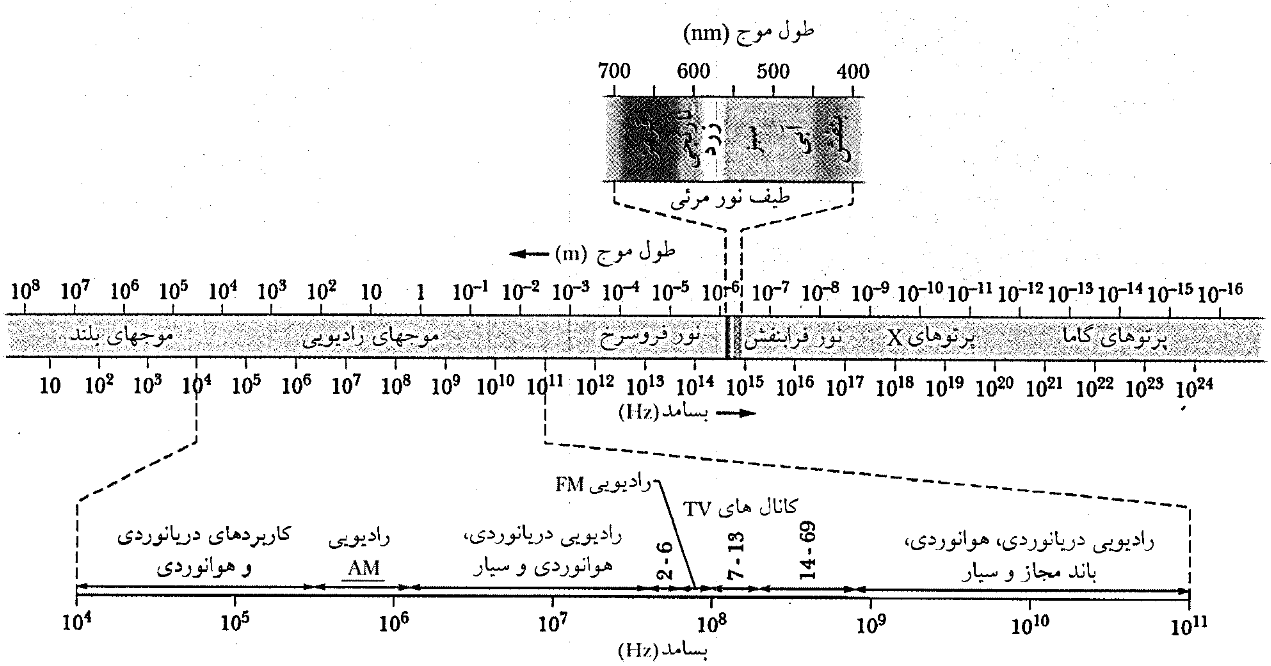
در این فصل به این پرسش پاسخ داده خواهد شد.

۱ـ۳۴ رنگین کمان ماکسول

کار بزرگ جیمز کلرک ماکسول این بود که نشان دهد باریکهٔ نور موج پیشروندهای از میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی، به نام **موج الکترومغناطیسی** است، و از این رو، **اپتیک** (**نور شناخت**)، دانش مطالعهٔ نور مرئی شاخه‌ای از **الکترومغناطیس** است. در این فصل، بحث را با الکترومغناطیس آغاز می‌کنیم تا به اپتیک برسیم. در اینجا نتیجه‌های حاصل از بحث‌های صرفاً الکتریکی و مغناطیسی را جمع‌بندی و اساس مبحث اپتیک را پایه‌گذاری می‌کنیم.

در زمان ماکسول (میانهٔ سدهٔ ۱۸۰۰ میلادی) نورهای مرئی، فروسرخ و فرابنفش، تنها موجهای الکترومغناطیسی شناخته شده بودند. اما **هاینریش هرتز**[1] با انگیزهٔ کارهای ماکسول موجهای رادیویی را کشف کرد و دریافت که این موجها در فضا با همان تندی نور مرئی حرکت می‌کنند.

همان‌طور که شکل ۱ـ۳۴ نشان می‌دهد، امروزه **طیف وسیع** (یا گسترهٔ) موجهای الکترومغناطیسی را با الهام از تخیلات یک نویسنده به عنوان «رنگین کمان ماکسول» می‌شناسیم. چه خوب است به وسعت گسترهٔ موجهای الکترومغناطیسی‌ای که ما را از طریق این طیف دربرگرفته است توجه کنیم. خورشید، که تابش‌هایش محیط زندگی ما را جان می‌بخشد و در پرتو آن به عنوان گونه‌ای از موجودات تکامل یافته‌ایم، چشمه‌ای غالب در تأمین حیات است. از سوی دیگر، ما همواره در معرض علایم رادیویی و تلویزیونی قرار داریم و میکروموجها از دستگاه‌های رادار و رلهٔ تلفن نیز ممکن است به ما برسند. ما موجهای الکترومغناطیسی چراغ‌های روشنایی، قطعه‌های داغ موتور اتومبیل، دستگاه‌های مولد پرتو X، برق درخش‌های عکاسی، مواد پرتوزای مدفون شده در زمین را نیز دریافت می‌کنیم. علاوه بر آن، نور ستاره‌ها و اشیای دیگر از کهکشان ما و نیز از کهکشان‌های دیگر، به ما می‌رسد. موجهای الکترومغناطیسی به جاهای دیگر هم سیر می‌کنند. علایم تلویزیونی تراگسیل شده از زمین از سال ۱۹۵۰/۱۳۲۹ تاکنون پیام‌های ساکنان زمین را (از طریق برنامه‌های «**لوسی دوستت دارم**»، گو اینکه به طور ضعیف) به ساکنان با فرهنگ سیاره‌های مربوط به بیش از ۴۰۰ ستارهٔ نزدیک می‌رسانند.



شکل ۱ـ۳۴ نمودار طیف موجهای الکترومغناطیسی.

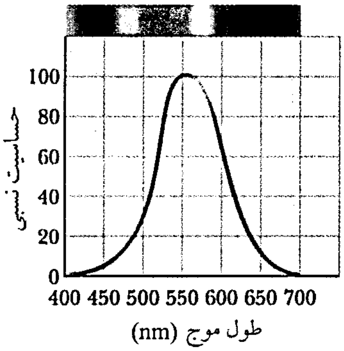
1. Heinrich Hertz

مقیاس طول موجهای رسم شده در شکل ۳۴ـ۱ (و نیز مقیاس بسامدهای متناظر با آنها) به گونه‌ای است که هر خط تقسیم آن نمایشگر تغییر طول موج (و تغییر بسامد متناظر با آن) با ضریبی برابر با ۱۰ است. دو سوی این مقیاس باز است، یعنی در موجهای الکترومغناطیسی طول موجها حد بالا و پایینی ندارند.

برخی ناحیه‌های طیف الکترومغناطیسی در شکل ۳۴ـ۱ با نام‌های آشنایی مشخص شده‌اند، که **پرتوهای X** و **موجهای رادیویی** از آن جمله‌اند. این نام‌ها، به طور کلی، بیان کنندهٔ گسترهٔ طول موجهایی هستند که در آن ناحیه برخی انواع چشمه‌ها و آشکارسازهای موجهای الکترومغناطیسی به کار می‌روند. ناحیه‌های دیگر شکل ۳۴ـ۱، از قبیل ناحیه‌های مشخص شده با TV و رادیویی AM، نمایشگر نوارهایی از طول موجهای خاص هستند که طبق قانون برای منظورهای تجاری یا مقاصد دیگر در نظر گرفته شده‌اند. در طیف الکترومغناطیسی هیچ شکافی وجود ندارد و تمام موجهای الکترومغناطیسی، بدون توجه به محلی که در طیف دارند، با تندی یکسان c در **فضای تهی** (خلاء) سیر می‌کنند.

البته، ناحیهٔ مرئی طیف نور برای ما اهمیت ویژه‌ای دارد. شکل ۳۴ـ۲، حساسیت نسبی چشم سالم انسان نسبت به نور با طول موجهای گوناگون را نشان می‌دهد. طول موج مربوط به مرکز ناحیهٔ مرئی در حدود ۵۵۵nm است. رنگ نور این طول موج در ما احساسی به وجود می‌آورد که آن را **زرد ـ سبز** می‌نامیم.

حدود طیف نور مرئی کاملاً مشخص نیست، زیرا منحنی حساسیت چشم در دو سوی طول موجهای بلند و کوتاه به طور مجانب به سمت خط با حساسیت صفر میل می‌کند. هرگاه حدود این طیف را به اختیار بین طول موجهایی انتخاب کنیم که در آنها حساسیت چشم به یک درصد مقدار بیشینه برسد، طول موجهای مربوط در حدود ۴۳۰nm و ۶۹۰nm خواهند بود. با وجود این، اگر نور به قدر کافی شدید باشد چشم می‌تواند موجهای الکترومغناطیسی فراتر از این دو حد را هم احساس کند.



شکل ۳۴ـ۲ نمودار حساسیت نسبی چشم انسان سالم نسبت به موجهای الکترومغناطیسی با طول موجهای گوناگون. این بخش از طیف الکترومغناطیسی را که چشم نسبت به آن حساس است **نور مرئی** می‌نامند.

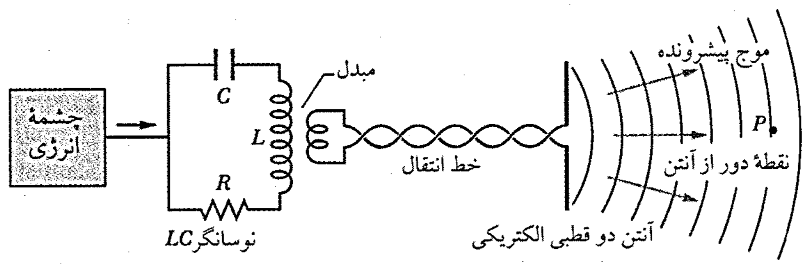
۳۴ـ۲ موج الکترومغناطیسی پیشرونده، مطالعهٔ کیفی

برخی موجهای الکترومغناطیسی، از قبیل پرتوهای X، پرتوهای گاما و نور مرئی، از چشمه‌های نوری تابیده (گسیلیده) می‌شوند که در اندازه‌های اتم یا هستهٔ اتم هستند و بر آنها قانون‌های **فیزیک کوانتومی** حاکم‌اند. در اینجا به بحث دربارهٔ چگونگی تولید موجهای الکترومغناطیسی می‌پردازیم. برای ساده کردن موضوع، نظر خود را به ناحیه‌ای از طیف موجها (طول موج $\lambda \approx 1\text{m}$) محدود می‌کنیم که در آن **چشمهٔ تابش** (موجهای تابیده شده) در قلمرو مقیاس ماکروسکوپی و دارای ابعاد کنترل‌پذیر است.

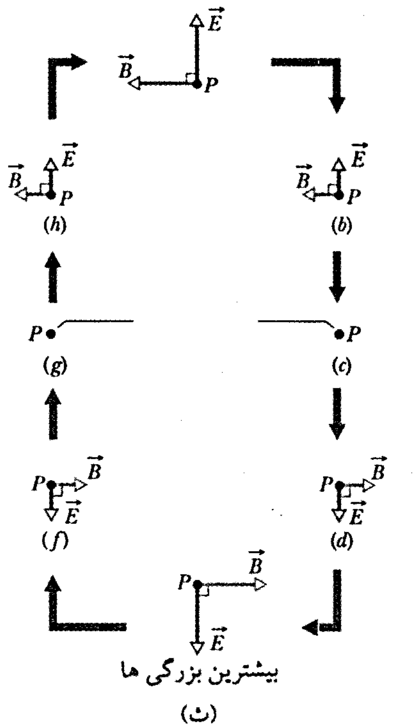
شکل ۳۴ـ۳، طرح اجمالی مولد موجهای الکترومغناطیسی را نشان می‌دهد. در قلب این مولد یک نوسانگر LC قرار دارد که نوسان‌های با بسامد زاویه‌ای ω (مساوی با $\frac{1}{\sqrt{LC}}$) را تولید می‌کند. چنانکه شکل ۳۳ـ۱ نشان می‌دهد، در این مدار بارها و جریان‌های الکتریکی با این بسامد زاویه‌ای به طور سینوسی تغییر می‌کنند. یک چشمهٔ ولتاژ خارجی ـ که ممکن است یک مولد جریان متناوب باشد ـ انرژی لازم برای جبران کردن تلفات گرمایی در مدار و انرژی گسیل شده به صورت موج الکترومغناطیسی تابشی را تأمین می‌کند.

نوسانگر LC در شکل ۳۴ـ۳، به وسیلهٔ یک مبدل و یک خط انتقال، با آنتن، که در اصل شامل دو میلهٔ رسانای باریک است، جفت می‌شود. جریان متغیر سینوسی نوسانگر از طریق این جفت شدگی باعث ایجاد نوسان‌های سینوسی بارهای الکتریکی در طول میله‌های آنتن با بسامد زاویه‌ای نوسانگر LC، یعنی ω، می‌شود. جریان وابسته به حرکت این بارها در میله‌های آنتن نیز از لحاظ بزرگی و جهت به طور سینوسی با بسامد زاویه‌ای ω تغییر می‌کند. در این حالت، آنتن مانند یک دوقطبی الکتریکی است که گشتاور دوقطبی الکتریکی آن در طول آنتن از لحاظ بزرگی و جهت به طور سینوسی تغییر می‌کند.

چون بزرگی و جهت گشتاور دوقطبی در حال تغییر کردن است، میدان الکتریکی حاصل از دوقطبی نیز از لحاظ بزرگی و جهت تغییر می‌کند. هم‌چنین، در اثر تغییر کردن جریان، بزرگی و جهت میدان مغناطیسی حاصل هم تغییر می‌کند. اما، تغییرات میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی به طور آنی در همهٔ نقاط فضا اتفاق



شکل ۳۴ـ۳ نمودار آرایشی از چگونگی تولید موج الکترومغناطیسی پیشرونده در ناحیهٔ موج کوتاه رادیویی طیف موجهای الکترومغناطیسی. در اینجا یک نوسانگر LC در آنتن جریانی سینوسی به وجود می‌آورد که موج را تولید می‌کند. نقطهٔ P، نقطه‌ای دور از آنتن است که در آنجا یک آشکارساز می‌تواند موج پیشروندهٔ در حال عبور را دریافت کند.



شکل ۳۴ـ۴ (الف) تا (ح) نمودار تغییرات میدان الکتریکی $\vec{E}$ و میدان مغناطیسی $\vec{B}$ در نقطهٔ P در شکل ۳۴ـ۳، در طول یک طول موج از موج الکترومغناطیسی‌ای که از این نقطه می‌گذرد. در این نمودار موج به طور مستقیم در بیرون سوی صفحهٔ شکل پیش می‌رود. دو میدان از لحاظ بزرگی و جهت به طور سینوسی تغییر می‌کنند. توجه کنید که میدان‌ها همیشه برهم و بر راستای انتشار موج عمودند.

نمی‌افتد، بلکه این تغییرات با تندی نور c، از آنتن به برون سوی آن پیش می‌روند. بسامد زاویه‌ای این موج ω است، که همان بسامد زاویه‌ای نوسانگر LC است.

شکل ۳۴ـ۴، نشان می‌دهد که میدان الکتریکی $\vec{E}$ و میدان مغناطیسی $\vec{B}$ در طول یک طول موج از موج الکترومغناطیسی گذرنده از نقطهٔ دوردست P در شکل ۳۴ـ۳، چگونه برحسب زمان تغییر می‌کنند. در هر قسمت از شکل ۳۴ـ۴، موج به طور مستقیم در برون سوی صفحهٔ شکل پیش می‌رود. (نقطهٔ دوردست P به این جهت اختیار شده است که خمیدگی موج نشان داده شده در شکل ۳۴ـ۳ به قدر کافی کم و قابل چشم‌پوشی است. در چنین نقاطی، موج را **موج تخت** می‌نامند و بحث دربارهٔ آن آسان‌تر می‌شود). در شکل ۳۴ـ۴ چند نکته قابل توجه است، که به چگونگی تولید یک موج ربطی ندارد:

۱. میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی $\vec{E}$ و $\vec{B}$ همیشه بر راستای انتشار موج عمودند. بنابراین، همان‌طور که در فصل ۱۷ (مبانی فیزیک جلد دوم) گفته شد، این موج یک **موج عرضی** است.
۲. میدان الکتریکی همیشه بر میدان مغناطیسی عمود است.
۳. جهت پیشروی موج با حاصل‌ضرب برداری $\vec{E}\times\vec{B}$ معین می‌شود.
۴. میدان‌ها درست مانند موجهای عرضی مورد بحث در فصل ۱۷، همیشه به طور سینوسی تغییر می‌کنند. علاوه بر این، میدان‌ها با یک بسامد تغییر می‌کنند و با هم **همفاز** (**همگام**) هستند.

با توجه به این نکته‌ها، می‌توان فرض کرد که موج الکترومغناطیسی پیشرونده به سمت نقطهٔ P در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند و میدان الکتریکی در شکل ۳۴ـ۴ به طور موازی با محور y، و میدان مغناطیسی به طور موازی با محور z، نوسان می‌کند (البته، با استفاده از دستگاه مختصات راستگرد). بنابراین، معادله‌های میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی را می‌توان به صورت تابع‌هایی سینوسی از مکان x (در طول مسیر حرکت موج) و زمان t نوشت:

$$E = E_m \sin(kx - \omega t) \qquad (۳۴ـ۱)$$

$$B = B_m \sin(kx - \omega t) \qquad (۳۴ـ۲)$$

که در آن E_m و B_m دامنه‌های میدان‌ها و ω و k، چنانکه در فصل ۱۷ دیدیم، به ترتیب، بسامد زاویه‌ای و عدد موج هستند. با توجه به این معادله‌ها در می‌یابیم که نه تنها این دو میدان موجهای الکترومغناطیسی را تشکیل می‌دهند، بلکه آنها خود شکل‌هایی از موج هستند. معادلهٔ ۳۴ـ۱ **مؤلفهٔ الکتریکی** و معادلهٔ ۳۴ـ۲ **مؤلفهٔ مغناطیسی** موج الکترومغناطیسی را به دست می‌دهد. چنانکه خواهیم دید، این دو مؤلفهٔ موجی نمی‌توانند به‌طور مستقل وجود داشته باشند.

با توجه به معادلهٔ ۱۷ـ۱۲ (مبانی فیزیک جلد دوم) می‌دانیم که تندی موج برابر است با ω/k. اما چون در اینجا موج یک موج الکترومغناطیسی است، تندی آن (در خلاء) به جای v، با نماد c معرفی می‌شود. در بخش بعد خواهیم دید که مقدار c از معادلهٔ زیر:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \qquad \text{(تندی موج)} \qquad (۳۴ـ۳)$$

به دست می‌آید، که برابر است با $3{,}0 \times 10^8 \, \text{m/s}$. به بیان دیگر:

◀ تمام موجهای الکترومغناطیسی، از جمله نور مرئی، در خلاء دارای تندی مساوی c هستند.

در ضمن، خواهیم دید که رابطهٔ تندی موج c، با دامنه‌های میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی به صورت زیر است:

$$\frac{E_m}{B_m} = c \qquad \text{(نسبت دامنه‌ها)} \qquad (۳۴ـ۴)$$

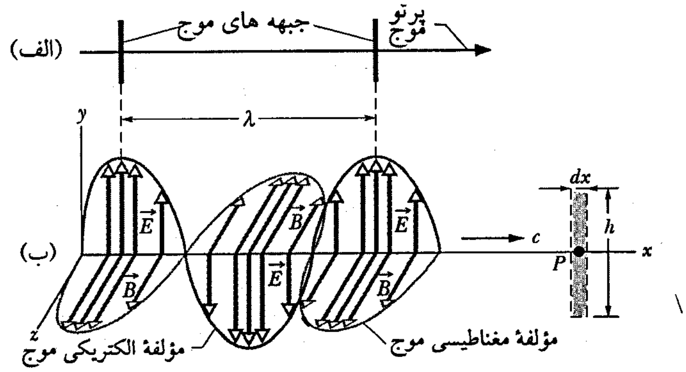
اگر معادلهٔ ۳۴ـ۱ را به معادلهٔ ۳۴ـ۲ تقسیم و سپس معادلهٔ ۳۴ـ۴ را جانشانی کنیم، نسبت بزرگی‌های دو میدان را در هر لحظه و در هر نقطه چنین به دست می‌آوریم:

$$\frac{E}{B} = c \qquad \text{(نسبت بزرگی‌ها)} \qquad (۳۴ـ۵)$$

موجهای الکترومغناطیسی را می‌توان به صورت شکل ۳۴ـ۵ الف، با پرتو موج (خط نشان دهندهٔ جهت انتشار موج)، یا با جبهه‌های موج (سطح‌های فرضی‌ای که در روی آنها موج دارای میدان الکتریکی با بزرگی یکسان است)، یا هر دو، نمایش داد. دو جبههٔ موج نشان داده شده در شکل ۳۴ـ۵ الف، به اندازهٔ یک طول موج λ (مساوی با $2\pi/k$)، از هم فاصله دارند. (موجهایی که تقریباً در یک راستا پیش می‌روند یک باریکه، مانند باریکهٔ نور لیزر، تشکیل می‌دهند، که می‌تواند به صورت پرتو موج هم نمایش داده شود).

هم‌چنین، موج را به صورت شکل ۳۴ـ۵ ب هم می‌توان نمایش داد. این شکل یک «عکس فوری» از بردارهای میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی موج را در لحظهٔ معینی از زمان نشان می‌دهد. منحنی‌های گذرنده از نوک‌های بردارها نشان دهندهٔ نوسان‌های سینوسی داده شده با معادله‌های ۳۴ـ۱ و ۳۴ـ۲ هستند؛ مؤلفه‌های موج $\vec{E}$ و $\vec{B}$، همفاز و برهم عمود هستند و هر دو بر راستای انتشار موج عمودند.

توصیف شکل ۳۴ـ۵ ب، نیاز به اندکی دقت دارد. در فصل ۱۷، با ترسیم‌های مشابهی در مورد موج عرضی



شکل ۳۴ـ۵ (الف) نمودار موج الکترومغناطیسی که پرتو موج و دو جبههٔ موج را نشان می‌دهد. جبهه‌های موج به اندازهٔ یک طول موج λ، از هم فاصله دارند. (ب) نمودار همان موج به صورت یک «عکس فوری» از میدان‌های الکتریکی $\vec{E}$ و مغناطیسی $\vec{B}$، در نقاط روی محور x واقع در راستایی که موج با تندی c در طول آن پیش می‌رود. هنگام عبور موج از نقطهٔ P، میدان‌ها به گونه‌ای که در شکل ۳۴ـ۴ نشان داده شده است، تغییر می‌کنند. مؤلفهٔ الکتریکی موج فقط شامل میدان‌های الکتریکی و مؤلفهٔ مغناطیسی موج فقط شامل میدان‌های مغناطیسی است. مربع مستطیل نشان داده شده با خط‌چین، در شکل ۳۴ـ۶ به کار خواهد رفت.

روی یک تار کشیده، وجود جابه‌جایی بخش‌هایی از تار به بالا و پایین، وقتی که موج می‌گذرد (**مثل چیزی که به واقع حرکت می‌کند**)، نمایش داده شد. اما در شکل ۳۴ـ۵ ب، با حالت انتزاعی‌تری روبه‌رو هستیم. در لحظهٔ نشان داده شده در شکل، در هر نقطه از محور x هر یک از میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی بزرگی و جهت معینی دارند (اما همیشه بر محور x عمودند). این کمیت‌های برداری را در هر نقطه با یک جفت پیکان نمایش داده‌ایم. از این رو، در نقاط مختلف باید پیکان‌ها را با طول‌های متفاوت و، مانند تیغ‌های خار یک ساقهٔ گل سرخ، از محور x به برون‌سو رسم کنیم. اما پیکان‌ها فقط مقادیر میدان‌ها را در نقاط واقع بر محور x نشان می‌دهند. نه پیکان‌ها و نه منحنی‌های سینوسی، هیچ‌یک، حرکت‌های جانبی را نمایش نمی‌دهند و پیکان‌ها نقطه‌های روی محور x را به نقطه‌های بیرون محور وصل نمی‌کنند.

شکل‌هایی نظیر شکل ۳۴ـ۵، به ما کمک می‌کنند که یک وضعیت بسیار پیچیده را به طور واقعی در ذهن خود مجسم کنیم. نخست، میدان مغناطیسی را در نظر می‌گیریم. این میدان چون به طور سینوسی تغییر می‌کند، یک میدان الکتریکی عمودی القایی (از طریق قانون القایش فارادی) به وجود می‌آورد، که آن هم دارای تغییرات سینوسی است. اما تغییرات سینوسی میدان الکتریکی، باعث القای یک میدان مغناطیسی عمودی (از طریق قانون القایش ماکسول) می‌شود، که تغییرات سینوسی دارد. این عمل، به همین ترتیب ادامه می‌یابد. دو میدان از طریق القا به نحو دایم یکدیگر را می‌آفرینند و نتیجهٔ تغییرات سینوسی این میدان‌ها به صورت یک موج، یعنی، موج **الکترومغناطیسی**، انتشار پیدا می‌کند. بدون این نتیجهٔ حیرت‌انگیز، ما قادر به دیدن اشیا نیستیم؛ در واقع، چون ما برای حفظ دمای زمین نیاز به موجهای الکترومغناطیسی گسیل شده از خورشید داریم، بدون این نتیجه، حتی قادر به زندگی کردن هم نیستیم.

عجیب‌ترین موج

موجهای مورد بحث در فصل‌های ۱۷ و ۱۸ نیاز به یک محیط مادی دارند تا در آن، یا در طول آن، انتشار پیدا کنند. ما موجهایی را مطالعه کردیم که در طول یک تار، در زمین و در هوا منتشر می‌شدند. اما موج الکترومغناطیسی (که می‌توانیم دربارهٔ آن اصطلاح موج نوری، یا نور را به کار ببریم) به نحو عجیبی متفاوت است، چون برای انتشار نیاز به هیچ‌گونه محیط مادی ندارد. این موج، به واقع، می‌تواند در یک محیط مادی، نظیر هوا و شیشه، و هم‌چنین، در فضای تهی میان ستاره‌ها و زمین، سیر کند.

پس از اعلام نظریهٔ نسبیت خاص توسط **اینشتین**[1] در سال ۱۲۸۴/۱۹۰۵، و پذیرفته شدن این نظریه معلوم شد که تندی موجهای نوری حالت ویژه‌ای دارد. یکی از دلیل‌ها این است که بدون توجه به چارچوب مرجعی که تندی نور را اندازه می‌گیرد مقدار این تندی ثابت است. اگر باریکهٔ نوری را در راستای محوری بفرستید و از چند ناظر در حال اندازه‌گیری این تندی، که در طول آن محور با تندی‌های مختلف با باریکهٔ نور به‌طور همسو یا ناهمسو حرکت می‌کنند، تندی نور را بپرسید، خواهید دید که همهٔ آنها برای نور **تندی یکسانی** را اندازه می‌گیرند. این نتیجه، یک دستاورد حیرت‌انگیز است و با آنچه این ناظران در اندازه‌گیری تندی هر نوع موج دیگر به دست می‌آورند کاملاً تفاوت دارد؛ در موجهای دیگر تندی ناظران نسبت به موج بر اندازه‌گیری‌های آنان اثر می‌گذارد.

امروزه **متر** چنان تعریف می‌شود که تندی نور (یا تندی هر موج الکترومغناطیسی) در خلاء به طور دقیق دارای مقدار زیر باشد:

$$c = ۲۹۹۷۹۲۴۵۸ \mathrm{m/s}$$

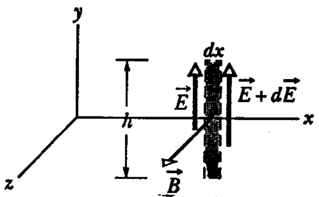
این مقدار می‌تواند به عنوان یک استاندارد مورد استفاده قرار گیرد. در واقع، اکنون اگر زمان گذر یک تپ نوری را از نقطه‌ای تا نقطهٔ دیگر اندازه بگیریم، ما در حقیقت تندی نور را اندازه‌گیری نکرده‌ایم، بلکه فاصلهٔ میان آن دو نقطه را سنجیده‌ایم.

---

1. Einstein

۳ـ۳۴ موج الکترومغناطیسی پیشرونده، مطالعهٔ کمّی

اکنون می‌خواهیم معادله‌های ۳۴ـ۳ و ۳۴ـ۴ را به دست آوریم، و مهم‌تر از آن، خاصیت القای دوگانهٔ میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی را که به گسیل نور منجر می‌شود، استنتاج کنیم.



شکل ۳۴ـ۶ هنگامی که موج الکترومغناطیسی به سمت راست پیش می‌رود و از نقطهٔ P می‌گذرد، تغییر سینوسی میدان مغناطیسی $\vec{B}$ در مربع مستطیلی به مرکز P سبب ایجاد میدان‌های الکتریکی القا شده در پهنای مربع مستطیل می‌شود. در لحظهٔ نشان داده شده در شکل، میدان مغناطیسی $\vec{B}$ از نظر بزرگی در حال کاهش یافتن است. در نتیجه، بزرگی میدان الکتریکی القا شده در سمت راست مستطیل نسبت به سمت چپ بیشتر می‌شود.

معادلهٔ ۳۴ـ۴ و میدان الکتریکی القایی

در شکل ۳۴ـ۶، مربع مستطیل خطچین به ابعاد dx و h در نقطهٔ P، واقع بر روی محور x و در صفحهٔ xy، ثابت در نظر گرفته شده است (این مستطیل در سمت راست شکل ۳۴ـ۵ ب نشان داده شده است). در حین حرکت موج الکترومغناطیسی به سمت راست و عبور از مربع مستطیل، شار مغناطیسی Φ_B گذرنده از مستطیل تغییر می‌کند و ـ بنا به قانون القایش فارادی ـ در سراسر ناحیهٔ مستطیل میدان‌های الکتریکی القایی ظاهر می‌شوند. فرض می‌کنیم $\vec{E}$ و $\vec{E}+d\vec{E}$ میدان‌های الکتریکی القا شده در طول دو ضلع بلندتر مستطیل باشند. این میدان‌های الکتریکی، در واقع، مؤلفهٔ الکتریکی موج الکترومغناطیسی هستند.

اکنون، این میدان‌ها را در لحظه‌ای در نظر می‌گیریم که مؤلفهٔ مغناطیسی موج در حال عبور از مستطیل، مربوط به بخش کوچک و پررنگ منحنی در شکل ۳۴ـ۵ ب، باشد. درست در این لحظه، میدان مغناطیسی درون مستطیل در جهت مثبت محور z است و بزرگی آن در حال کاهش یافتن است (بزرگی این مؤلفه درست پیش از ورود به بخش پررنگ منحنی بیشتر بود). با کاهش یافتن میدان مغناطیسی، شار مغناطیسی Φ_B گذرنده از مستطیل نیز کاهش پیدا می‌کند. بنا به قانون فارادی، این تغییر شار با میدان‌های الکتریکی القایی مخالفت می‌کند و این اثر سبب ایجاد میدان مغناطیسی $\vec{B}$ در جهت مثبت محور z می‌شود.

طبق قانون لنز، معنای این اثر آن است که اگر مرزهای مستطیل را یک حلقهٔ رسانا تصور کنیم، در این حلقه یک جریان القایی در جهت پادساعتگرد ظاهر می‌شود. البته، چیزی به نام حلقهٔ رسانا وجود ندارد، اما این تحلیل نشان می‌دهد که بردارهای میدان الکتریکی القایی $\vec{E}$ و $\vec{E}+d\vec{E}$، به واقع در جهت نشان داده شده از شکل ۳۴ـ۶ هستند و بزرگی $\vec{E}+d\vec{E}$ از بزرگی $\vec{E}$ بیشتر است. به عبارت دیگر، میدان الکتریکی القایی خالص در طول حلقهٔ مستطیل شکل در جهت پادساعتگرد اثر نمی‌کند.

اکنون، قانون القایش فارادی:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad (۶ـ۳۴)$$

را در طول حلقهٔ مستطیل شکل ۳۴ـ۶ به کار می‌بریم. در این انتگرال‌گیری ضلع‌های بالا و پایین مستطیل سهمی ندارند، زیرا در این حالت $\vec{E}$ و $d\vec{s}$ برهم عمودند. پس، مقدار انتگرال چنین به دست می‌آید:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = (E+dE)h - Eh = h\,dE \qquad (۷ـ۳۴)$$

شار مغناطیسی Φ_B گذرنده از مستطیل برابر است با:

$$\Phi_B = (B)h\,dx \qquad (۸ـ۳۴)$$

که در آن B بزرگی میدان $\vec{B}$ در درون مستطیل و $h\,dx$ مساحت مستطیل است. با مشتق گرفتن از دو طرف معادلهٔ ۳۴ـ۸ نسبت به t، داریم

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = h\,dx\frac{dB}{dt} \qquad (۹ـ۳۴)$$

اگر معادله‌های ۳۴ـ۷ و ۳۴ـ۹ را در معادلهٔ ۳۴ـ۶ جانشانی کنیم، داریم

$$h\,dE = -h\,dx\frac{dB}{dt} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{dB}{dt} \qquad (۱۰ـ۳۴)$$

در واقع، همان‌طور که معادله‌های ۳۴ـ۱ و ۳۴ـ۲ نشان می‌دهند، B و E، هر دو، تابع‌هایی از دو متغیر x و t هستند. اما در محاسبهٔ dE/dx باید t را ثابت فرض کنیم، چون شکل ۳۴ـ۶ نشان دهندهٔ یک «عکس فوری

لحظه‌ای» است. هم‌چنین، در محاسبهٔ dB/dt باید x را ثابت بگیریم، زیرا ما با آهنگ تغییر زمانی B در یک جای خاص، مانند نقطهٔ P در شکل ۳۴ـ۵ ب، مواجه هستیم. در این شرایط مشتق‌ها، مشتق‌های جزئی هستند و معادلهٔ ۳۴ـ۱۰ باید به صورت زیر نوشته شود

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t} \tag{۳۴ـ۱۱}$$

در این معادله علامت منها مناسب و لازم است زیرا، گرچه E، در محل مستطیل شکل ۳۴ـ۶ برحسب x در حال افزایش یافتن است، اما برحسب t در حال کاهش یافتن است.

با استفاده از معادلهٔ ۳۴ـ۱، داریم

$$\frac{\partial E}{\partial x} = kE_m \cos(kx-\omega t)$$

هم‌چنین، با استفاده از معادلهٔ ۳۴ـ۲، داریم

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\omega B_m \cos(kx-\omega t)$$

در این صورت، با توجه به معادلهٔ ۳۴ـ۱۱، می‌توانیم بنویسیم

$$kE_m \cos(kx-\omega t) = \omega B_m \cos(kx-\omega t) \tag{۳۴ـ۱۲}$$

برای یک موج پیشرونده نسبت ω/k همان تندی موج و برابر با c است. بنابراین، از معادلهٔ ۳۴ـ۱۲ نتیجه می‌گیریم که:

$$\frac{E_m}{B_m} = c \qquad \text{(نسبت دامنه)} \tag{۳۴ـ۱۳}$$

و این، همان معادلهٔ ۳۴ـ۴ است.

معادلهٔ ۳۴ـ۳ و میدان مغناطیسی القایی

شکل ۳۴ـ۷، مربع مستطیل خط‌چین دیگری را در نقطهٔ P از شکل نشان می‌دهد؛ این مستطیل در صفحهٔ xz قرار دارد. در حین حرکت کردن موج الکترومغناطیسی به سمت راست و عبور از این مستطیل جدید شار الکتریکی Φ_E گذرنده از مستطیل تغییر می‌کند و ـ بنا به قانون القایش ماکسول ـ در سراسر ناحیهٔ مستطیل میدان‌های مغناطیسی القایی ظاهر می‌شوند. این میدان‌های مغناطیسی، در واقع مؤلفهٔ مغناطیسی موج الکترومغناطیسی‌اند.

با توجه به شکل ۳۴ـ۵، دیده می‌شود که در لحظهٔ اختیار شده برای میدان مغناطیسی شکل ۳۴ـ۶، میدان الکتریکی در مستطیل شکل ۳۴ـ۷ در جهتی است که نشان داده شده است. یادآوری می‌شود که در لحظهٔ اختیار شده میدان مغناطیسی در شکل ۳۴ـ۶ در حال کاهش یافتن است. چون دو میدان همفازند میدان الکتریکی در شکل ۳۴ـ۷، و هم‌چنین شار الکتریکی Φ_E گذرنده از مستطیل، باید کاهش پیدا کند. بر پایهٔ همان استدلالی که دربارهٔ شکل ۳۴ـ۶ به کار بردیم، مشاهده می‌کنیم که تغییر شار الکتریکی Φ_E باعث ایجاد میدان مغناطیسی القایی با بردارهای $\vec{B}$ و $\vec{B}+d\vec{B}$ در جهت نشان داده شده در شکل ۳۴ـ۷ می‌شود. $\vec{B}+d\vec{B}$ بزرگتر از $\vec{B}$ است.

اکنون، با کاربرد قانون القایش ماکسول در پیرامون مستطیل خط‌چین شکل ۳۴ـ۷ در جهت پادساعتگرد، داریم

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_\circ \varepsilon_\circ \frac{d\Phi_E}{dt} \tag{۳۴ـ۱۴}$$

در این انتگرال‌گیری فقط ضلع‌های بلند مستطیل سهیم‌اند و مقدار انتگرال چنین به دست می‌آید:

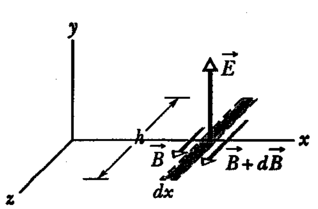
$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = -(B+dB)h + Bh = -h\,dB \tag{۳۴ـ۱۵}$$

شار الکتریکی Φ_E گذرنده از مستطیل برابر است با:

$$\Phi_E = (E)(h\,dx) \tag{۳۴ـ۱۶}$$

که در آن E، بزرگی میانگین میدان $\vec{E}$ در مستطیل است. با مشتق گرفتن از دو طرف معادلهٔ ۳۴ـ۱۶ نسبت به t، داریم

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = h\,dx\frac{dE}{dt}$$



شکل ۳۴ـ۷ تغییر سینوسی میدان الکتریکی در این مستطیل واقع در نقطهٔ P از شکل ۳۴ـ۵ (که نشان داده نشده است)، میدان‌های مغناطیسی را در طول مستطیل القا می‌کند. لحظهٔ نشان داده شده در شکل مربوط به شکل ۳۴ـ۶ است: بزرگی $\vec{E}$ در حال کاهش یافتن است و بزرگی میدان مغناطیسی القا شده در سمت راست مستطیل نسبت به سمت چپ بیشتر می‌شود.

اگر این معادله و معادلهٔ ۳۴ـ۱۵ را در معادلهٔ ۳۴ـ۱۴ جانشانی کنیم، داریم

$$-h\,dB = \mu_{\circ}\varepsilon_{\circ}\left(h\,dx\frac{dE}{dt}\right)$$

با تغییر دادن این معادله به صورت نمادگذاری مشتق جزئی، چنانکه پیشتر دیدیم (معادلهٔ ۳۴ـ۱۱)، می‌توان چنین نوشت:

$$-\frac{\partial B}{\partial x} = \mu_{\circ}\varepsilon_{\circ}\frac{\partial E}{\partial t} \qquad (۱۷\text{ـ}۳۴)$$

در اینجا نیز علامت منها در معادله لازم است، چون، با آنکه B برحسب x در نقطهٔ P در مستطیل شکل ۳۴ـ۷، در حال افزایش یافتن است، اما E برحسب t در حال کاهش یافتن است.

اگر با استفاده از معادله‌های ۳۴ـ۱ و ۳۴ـ۲ به ارزیابی معادلهٔ ۳۴ـ۱۷ بپردازیم نتیجه می‌گیریم که:

$$-kB_m\cos(kx-\omega t) = -\mu_{\circ}\varepsilon_{\circ}\omega E_m\cos(kx-\omega t)$$

این معادله می‌تواند چنین نوشته شود:

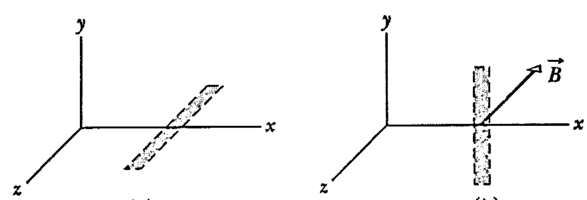
$$\frac{E_m}{B_m} = \frac{1}{\mu_{\circ}\varepsilon_{\circ}(\omega/k)} = \frac{1}{\mu_{\circ}\varepsilon_{\circ}c}$$

از ترکیب این معادله با معادلهٔ ۳۴ـ۱۳، داریم

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_{\circ}\varepsilon_{\circ}}} \qquad \text{(تندی موج)} \qquad (۱۸\text{ـ}۳۴)$$

که دقیقاً همان معادلهٔ ۳۴ـ۳ است.

خودآزمایی ۱: در قسمت ۱ شکل زیر، میدان مغناطیسی $\vec{B}$ مربوط به مستطیل شکل ۳۴ـ۶ در لحظهٔ متفاوتی نشان داده شده است. میدان $\vec{B}$ در صفحهٔ xz قرار دارد، با محور z موازی است و بزرگی‌اش در حال افزایش است. (الف) با ترسیم میدان‌های الکتریکی القایی و نشان دادن جهت‌ها و بزرگی‌های نسبی (مانند شکل ۳۴ـ۶) قسمت ۱ را کامل کنید. (ب) در همین لحظه، با ترسیم میدان الکتریکی موج الکترومغناطیسی قسمت ۲ را کامل کنید. هم‌چنین، میدان‌های مغناطیسی القایی را ضمن نشان دادن جهت‌ها و بزرگی‌های نسبی (مانند شکل ۳۴ـ۷) رسم کنید.



۳۴ـ۴ انتقال انرژی و بردار پوئین تینگ

تمام کسانی که حمام آفتاب می‌گیرند می‌دانند که موجهای الکترومغناطیسی می‌توانند انرژی را منتقل کنند و آن را به جسمی که بر آن می‌تابند تحویل دهند. آهنگ انتقال در یکای مساحت سطح توسط این موجها با بردار $\vec{S}$ معرفی می‌شود و **بردار پوئین تینگ** نام دارد. این نامگذاری در پی بزرگداشت **جان هنری پوئین تینگ**[1] (۱۸۵۲/۱۲۳۱-۱۹۱۴/۱۲۹۳)، که نخستین بار خواص این بردار را مورد بحث قرار داد، انجام شده است. بردار $\vec{S}$ چنین تعریف می‌شود:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_{\circ}}\vec{E}\times\vec{B} \qquad \text{(بردار پوئین تینگ)} \qquad (۱۹\text{ـ}۳۴)$$

■

1. John Henry Poynting

بزرگی S مربوط به آهنگی است که با آن انرژی در هر لحظه (inst) توسط موج از یکای مساحت سطح منتقل می‌شود:

$$S = \left(\frac{\text{زمان/انرژی}}{\text{مساحت}}\right)_{\text{inst}} = \left(\frac{\text{توان}}{\text{مساحت}}\right)_{\text{inst}} \qquad (۲۰\text{-}۳۴)$$

با توجه به این معادله نتیجه می‌گیریم که یکای SI بردار $\vec{S}$ **وات بر مترمربع** (با نماد W/m^2) است.

◀ جهت بردار پوئین تینگ $\vec{S}$ یک موج الکترومغناطیسی در هر نقطه، جهت پیشروی موج و جهت انتقال انرژی در آن نقطه را به دست می‌دهد.

چون در یک موج الکترومغناطیسی میدانهای $\vec{E}$ و $\vec{B}$ برهم عمودند بزرگی حاصل‌ضرب $\vec{E}\times\vec{B}$ برابر با EB است. در این صورت بزرگی بردار $\vec{S}$ برابر است با:

$$S = \frac{1}{\mu_0}EB \qquad (۲۱\text{-}۳۴)$$

که در آن S، E و B مقادیری لحظه‌ای‌اند. E و B آن‌قدر به هم جفت شدگی نزدیک دارند که فقط کافی است با یکی از آنها سر و کار داشته باشیم. ما E را بزرگ اختیار می‌کنیم، چون در اغلب وسایل آشکارسازی موجهای الکترومغناطیسی بیشتر با مؤلفهٔ الکتریکی موج کار داریم تا مؤلفهٔ مغناطیسی آن. با استفاده از رابطهٔ $B=E/c$ در معادلهٔ ۳۴-۵، معادلهٔ ۳۴-۲۱ را می‌توان چنین نوشت:

$$S = \frac{1}{c\mu_0}E^2 \qquad \text{(آهنگ شار انرژی لحظه‌ای)} \qquad (۲۲\text{-}۳۴) \quad \blacksquare$$

با جانشانی معادلهٔ $E=E_m\sin(kx-\omega t)$ در معادلهٔ ۳۴-۲۲ می‌توان برای آهنگ انتقال انرژی معادله‌ای به‌دست آورد که تابعی از زمان باشد. اما کاربرد مفیدتر در عمل، میانگین انرژی منتقل شده در طی زمان است. بدین منظور، باید مقدار میانگین S با نماد S_{avg} را که **شدت موج** I، نیز نامیده می‌شود، پیدا کنیم. بنابراین، با توجه به معادلهٔ ۳۴-۲۰ شدت موج I، برابر است با:

$$I = S_{\text{avg}} = \left(\frac{\text{زمان/انرژی}}{\text{مساحت}}\right)_{\text{avg}} = \left(\frac{\text{توان}}{\text{مساحت}}\right)_{\text{avg}} \qquad (۲۳\text{-}۳۴)$$

با استفاده از معادلهٔ ۳۴-۲۲، داریم

$$I = S_{\text{avg}} = \frac{1}{c\mu_0}[E^2]_{\text{avg}} = \frac{1}{c\mu_0}[E_m^2\sin^2(kx-\omega t)]_{\text{avg}} \qquad (۲۴\text{-}۳۴)$$

در یک چرخهٔ کامل مقدار میانگین $\sin^2\theta$ برای هر متغیر زاویه‌ای θ برابر با $\frac{1}{2}$ است (شکل ۳۳-۱۴ را ببینید). علاوه بر این، کمیت جدید E_{rms}، یعنی مقدار جذر میانگین مربعی (rms) میدان الکتریکی را چنین تعریف می‌کنیم:

$$E_{\text{rms}} = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \qquad (۲۵\text{-}۳۴)$$

اکنون معادلهٔ ۳۴-۲۴ را می‌توان دوباره چنین نوشت:

$$I = \frac{1}{c\mu_0}E_{\text{rms}}^2 \qquad (۲۶\text{-}۳۴) \quad \blacksquare$$

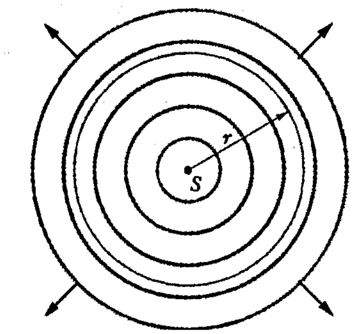
با توجه به رابطهٔ $E=cB$ و اینکه c عدد بسیار بزرگی است، ممکن است نتیجه بگیریم که انرژی وابسته به میدان الکتریکی خیلی بزرگتر از انرژی وابسته به میدان مغناطیسی است. این نتیجه‌گیری نادرست است و دو انرژی دقیقاً با هم برابرند. برای نشان دادن این موضوع، از معادلهٔ ۲۳-۲۶، که چگالی انرژی مربوط به میدان الکتریکی u (مساوی با $\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2$) را به دست می‌دهد استفاده می‌کنیم و cB را به جای E قرار می‌دهیم. در این صورت، می‌توان نوشت:

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0(cB)^2$$

اکنون، اگر با استفاده از معادلهٔ ۳۴-۳ مقدار c را جانشانی کنیم، داریم

$$u_E = \frac{۱}{۲}\varepsilon_\circ \frac{۱}{\mu_\circ \varepsilon_\circ} B^۲ = \frac{B^۲}{۲\mu_\circ}$$

اما طبق معادلهٔ ۳۱-۵۶، کمیت $B^۲/۲\mu_\circ$ همان u_B، چگالی انرژی میدان مغناطیسی $\vec{B}$ است. بنابراین، مشاهده می‌کنیم که در همه جای یک موج الکترومغناطیسی رابطهٔ $u_E = u_B$ برقرار است.



شکل ۳۴-۸ نمودار چشمهٔ نقطه‌ای S که موجهای الکترومغناطیسی را به طور یکنواخت در تمام جهت‌ها گسیل می‌کند. جبهه‌های موج کروی از یک کرهٔ تصوری به شعاع r و به مرکز S عبور می‌کنند.

تغییر شدت تابش برحسب فاصله

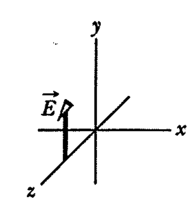
چگونگی تغییر شدت برحسب فاصله از یک چشمهٔ واقعی تابش الکترومغناطیسی، به ویژه، وقتی که چشمه تابش را به صورت یک باریکه در جهت خاصی (مانند یک نورافکن گردان) منتشر می‌کند، اغلب، پیچیده است. اما در برخی حالت‌ها چشمه را می‌توان یک چشمهٔ نقطه‌ای که نور را به‌طور همسانگرد، یعنی با شدت یکسان، در تمام جهت‌ها گسیل می‌کند، فرض کرد. شکل ۳۴-۸، مقطع جبهه‌های موج خاصی را که از چشمهٔ نقطه‌ای همسانگرد S در لحظه‌ای خاص گسیل می‌شوند، نشان می‌دهد.

اکنون فرض می‌کنیم که انرژی موجها در حین انتشار یافتن از چشمه پایسته است. هم‌چنین، چنانکه شکل ۳۴-۸ نشان می‌دهد، مرکز یک کرهٔ تصوری به شعاع r را در محل چشمه در نظر می‌گیریم. همهٔ انرژی گسیل شده توسط چشمه باید از این کره بگذرد. بنابراین، آهنگ عبور انرژی تابشی از این کره باید با آهنگ انرژی گسیل شده از چشمه، یعنی با توان چشمه P_s، برابر باشد. در این صورت، شدت I، در کره برابر است با:

$$I = \frac{P_s}{۴\pi r^۲} \qquad (۳۴\text{-}۲۷)$$ ■

در آن $۴\pi r^۲$ مساحت سطح کره است. معادلهٔ ۳۴-۲۷ نشان می‌دهد که شدت تابش الکترومغناطیسی از یک چشمهٔ نقطه‌ای همسانگرد برحسب مجذور فاصله از چشمه کاهش پیدا می‌کند.

خودآزمایی ۲: شکل زیر، نمودار میدان الکتریکی یک موج الکترومغناطیسی را در نقطهٔ معین و در لحظهٔ معینی نشان می‌دهد. این موج در حال انتقال انرژی در جهت منفی محور z است. در این نقطه و در این لحظه جهت میدان مغناطیسی موج الکترومغناطیسی چیست؟



مسألهٔ نمونهٔ ۳۴-۱

ناظری در فاصلهٔ ۱٫۸ متری یک چشمهٔ نور نقطه‌ای همسانگرد با توان $P_s = ۲۵۰\,W$ قرار دارد. مطلوب است محاسبهٔ مقادیر جذر میانگین مربعی (rms) میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی حاصل از این چشمه در محل ناظر.

حل: در اینجا نخستین دو **نکتهٔ کلیدی** عبارت‌اند از:

۱. مقدار rms میدان الکتریکی E_{rms}، در نور با شدت نور I، از طریق معادلهٔ ۳۴-۲۶ $(I = E_{rms}^۲/c\mu_\circ)$ رابطه دارد.

۲. چون این چشمهٔ نقطه‌ای نور را در تمام جهت‌ها با شدت یکسان گسیل می‌کند شدت نور I، در هر نقطه به فاصلهٔ r از چشمه با توان چشمه P_s، از طریق معادلهٔ ۳۴-۲۷ $(I = P_s/۴\pi r^۲)$ رابطه دارد.

با در نظر گرفتن این دو نکته با هم، داریم

$$I = \frac{P_s}{۴\pi r^۲} = \frac{E_{rms}^۲}{c\mu_\circ}$$

و از آنجا، نتیجه می‌گیریم که:

$$E_{rms} = \sqrt{\frac{P_s c\mu_\circ}{۴\pi r^۲}}$$

$$E_{rms} = \sqrt{\frac{(۲۵۰\,W)(۳٫۰۰\times۱۰^۸\,m/s)(۴\pi\times۱۰^{-۷}\,H/m)}{(۴\pi)(۱٫۸\,m)^۲}} \Rightarrow$$

$$E_{rms} = ۴۸٫۱\,V/m = ۴۸\,V/m \qquad \text{(پاسخ)}$$

نکتهٔ کلیدی سوم این است که بزرگی‌های میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی یک موج الکترومغناطیسی در هر لحظه و در هر نقطه در موج از طریق تندی نور c، طبق معادلهٔ ۳۴ـ۵ $(E/B=c)$ با هم رابطه دارند. بنابراین، مقادیر rms این میدان‌ها هم از طریق معادلهٔ ۳۴ـ۵ با هم رابطه دارند و می‌توان نوشت:

$$B_{rms} = \frac{E_{rms}}{c} = \frac{۴۸٫۱ \text{V/m}}{۳٫۰۰ \times ۱۰^۸ \text{m/s}} \Rightarrow$$

(پاسخ) $$B_{rms} = ۱٫۶ \times ۱۰^{-۷}\text{T}$$

توجه کنید که مقدار E_{rms} (مساوی با ۴۸V/m) با توجه به استانداردهای عادی آزمایشگاهی قابل ملاحظه به نظر می‌رسد، در حالی که مقدار B_{rms} (مساوی با $۱٫۶ \times ۱۰^{-۷}$T) بسیار کوچک است. به کمک این تفاوت می‌توان توضیح داد که چرا بیشتر وسایل مورد استفاده در آشکارسازی و اندازه‌گیری موجهای الکترومغناطیسی، برای پاسخ دادن به مؤلفهٔ الکتریکی موج الکترومغناطیسی طراحی می‌شوند. اما این نتیجه‌گیری غلط است که، بگوییم مؤلفهٔ الکتریکی از مؤلفهٔ مغناطیسی موج الکترومغناطیسی «قوی‌تر» است. چون، ما نمی‌توانیم کمیت‌هایی را که با یکاهای متفاوت اندازه‌گیری می‌شوند، با هم مقایسه کنیم. همان‌طور که دیده‌ایم، مؤلفه‌های الکتریکی و مغناطیسی موج، تا آنجا که به انتشار موج مربوط است، مبنای یکسانی دارند، چون انرژی میانگین آنها، که می‌تواند معیاری برای مقایسه باشد، دقیقاً یکسان است.

۳۴ـ۵ فشار تابشی

موجهای الکترومغناطیسی هم تکانهٔ خطی و هم انرژی دارند. بنابراین، با تابیدن نور به یک شیء می‌توان به آن یک فشار ـ **فشار تابشی** ـ وارد کرد. اما این فشار بسیار کم است، چون، به عنوان مثال، وقتی که برای گرفتن عکس نور درخش عکاسی به ما می‌تابد ما فشار این نور را حس نمی‌کنیم.

برای توضیح دادن فشار تابشی، فرض کنید باریکه‌ای از تابش الکترومغناطیسی، یعنی نور، را در بازهٔ زمانی Δt به یک شیء می‌تابانیم. علاوه بر این، فرض کنید که شیء برای حرکت کردن آزاد است و تابش نور به طور کامل توسط آن **جذب** می‌شود (دریافت می‌شود)، بدین معنا که شیء در طی بازهٔ زمانی Δt از تابش نور انرژی ΔU دریافت می‌کند. ماکسول نشان داد که شیء تکانهٔ خطی هم دریافت می‌کند. رابطهٔ بزرگی تغییر تکانهٔ شیء Δp، با تغییر انرژی به صورت زیر است

(۲۸ـ۳۴) $$\Delta p = \frac{\Delta U}{c} \quad \text{(جذب کامل)}$$ ■

که در آن c تندی نور است. جهت تغییر تکانهٔ شیء همان جهت باریکهٔ فرودی (تابش) است که شیء جذب می‌کند.

نور تابشی به جای آنکه جذب شود، می‌تواند توسط شیء **بازتابیده** شود، یعنی، نور پس از برخورد به شیء می‌تواند در جهت دیگری فرستاده شود. اگر نور تابشی به طور کامل در روی مسیر اول خود بازتابیده شود، بزرگی تغییر تکانهٔ شیء دو برابر مقدار داده شده در بالا می‌شود:

(۲۹ـ۳۴) $$\Delta p = \frac{۲\Delta U}{c} \quad \text{(بازتاب کامل بر روی مسیر اولی)}$$ ■

به همین روش، هرگاه یک گوی تنیس پس از برخورد کشسان کامل به یک شیء باز گردد تغییر تکانهٔ شیء دوبرابر حالتی می‌شود که گلوله‌ای (مثلاً، یک گلوله خمیر) با همان جرم و سرعت گوی تنیس، به طور ناکشسان کامل، به شیء برخورد کند. هرگاه باریکهٔ نور فرودی به شیء، بخشی جذب و بخشی بازتابیده شود، تغییر تکانهٔ شیء بین دو مقدار $\Delta U/c$ و $۲\Delta U/c$ خواهد بود.

با توجه به قانون دوم نیوتون، می‌دانیم که رابطهٔ تغییر تکانه و نیرو چنین است:

(۳۰ـ۳۴) $$F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

برای تعیین رابطهٔ مربوط به نیروی وارد شده از سوی نور تابشی برحسب شدت تابش I، فرض کنید سطحی که به آن نور می‌تابد تخت و دارای مساحت A است و مسیر تابش بر این سطح عمود است. در بازهٔ زمانی Δt انرژی تابیده شده به سطحی به مساحت A برابر است با:

(۳۱ـ۳۴) $$\Delta U = IA\,\Delta t$$

اگر این انرژی به طور کامل جذب شود با توجه به معادلهٔ ۳۴ـ۲۸، داریم

$$\Delta p = \frac{IA\,\Delta t}{c}$$

در نتیجه، با استفاده از معادلهٔ ۳۴ـ۳۰ بزرگی نیروی وارد بر سطحی به مساحت A برابر است با:

$$F = \frac{IA}{c} \quad \text{(جذب کامل)} \qquad (۳۴\text{ـ}۳۲)$$

به همین ترتیب، اگر نور تابشی بر روی مسیر اولی به طور کامل بازتابیده شود، طبق معادلهٔ ۳۴ـ۲۹، داریم

$$\Delta p = \frac{2IA\,\Delta t}{c}$$

در نتیجه، معادلهٔ ۳۴ـ۳۰ به صورت زیر در می‌آید

$$F = \frac{2IA}{c} \quad \text{(بازتاب کامل بر روی مسیر اولی)} \qquad (۳۴\text{ـ}۳۳)$$

هرگاه باریکهٔ نور فرودی به شیء، بخشی جذب و بخشی بازتابیده شود، بزرگی نیروی وارد بر سطح به مساحت A بین دو مقدار IA/c و $2IA/c$ خواهد بود.

فشار تابشی p_r، برابر با نیروی وارد بر یکای سطح شیء است که از تابش نور حاصل می‌شود. این کمیت را می‌توان در شرایط معادله‌های ۳۴ـ۳۲ و ۳۴ـ۳۳، از تقسیم دو طرف هر معادله به مساحت A به دست آورد. در این صورت، داریم

$$p_r = \frac{I}{c} \quad \text{(جذب کامل)} \qquad (۳۴\text{ـ}۳۴) \quad ■$$

و

$$p_r = \frac{2I}{c} \quad \text{(بازتاب کامل بر روی مسیر اولی)} \qquad (۳۴\text{ـ}۳۵) \quad ■$$

مواظب باشید نماد فشار تابشی p_r، را با نماد تکانه p، اشتباه نکنید. در اینجا نیز مانند فشار شاره‌ها در فصل ۱۵ (مبانی فیزیک جلد دوم) یکای SI فشار تابشی همان **نیوتون بر مترمربع** (با نماد N/m^2) است که **پاسکال** (با نماد Pa) نام دارد.

گسترش فنّاوری لیزر به پژوهشگران اجازه داده است که بتوانند به فشارهای تابشی خیلی بیشتر از، مثلاً، فشار تابشی حاصل از نور درخش لامپ عکاسی دست پیدا کنند. این خاصیت از آنجا ناشی می‌شود که باریکهٔ نور لیزر ـ برخلاف باریکهٔ نور حاصل از یک لامپ رشته‌ای کوچک ـ می‌تواند در یک لکهٔ نورانی کوچک به قطر چند برابر طول موج نور کانونی شود. چنین خاصیتی سبب می‌شود که اشیای کوچک واقع در محل لکهٔ نورانی انرژی قابل توجهی دریافت کنند.

خودآزمایی ۳: نوری با شدت یکنواخت به طور عمود به یک سطح جذب کنندهٔ کامل می‌تابد و آن را روشن می‌کند. اگر مساحت سطح کاهش پیدا کند، آیا (الف) فشار تابشی، و (ب) نیروی تابشی وارد بر سطح، افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد یا ثابت می‌ماند؟

مسألهٔ نمونهٔ ۳۴ـ۲

وقتی ذرات گرد و غبار از یک دنباله‌دار رها می‌شوند مدار حرکت آن را ادامه نمی‌دهند، زیرا فشار تابشی حاصل از نور خورشید این ذرات را در راستای شعاعی به برون سوی خورشید می‌راند. فرض کنید یک ذرهٔ گرد و غبار کروی به شعاع R، که دارای چگالی $\rho = 3{,}5 \times 10^3 \, kg/m^3$ است، نور خورشید را به طور کامل جذب می‌کند. به ازای چه مقدار R نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ وارد بر ذرهٔ گرد و غبار از سوی خورشید درست با نیروی تابشی $\vec{F}_r$، وارد بر ذره از نور خورشید، متوازن می‌شود؟

حل: می‌توانیم فرض کنیم که خورشید از ذرهٔ گرد و غبار آن‌قدر دور است که مانند یک چشمهٔ نور نقطه‌ای همسانگرد عمل می‌کند. بنابراین، چون گفته شده است که فشار تابشی ذره را در راستای شعاعی به برون سوی خورشید می‌راند، پس نیروی تابشی $\vec{F}_r$ وارد بر ذره، در راستای شعاعی و در برون سوی مرکز خورشید است. در همین حال، نیروی گرانشی وارد بر ذره $\vec{F}_g$، در درون سوی مرکز خورشید است. پس، معادلهٔ توازن این دو نیرو را می‌توان چنین نوشت:

$$F_r = F_g \qquad (۳۴\text{ـ}۳۶)$$

اکنون، هر یک از دو نیرو را به طور جداگانه به دست می‌آوریم.

نیروی تابشی: برای تعیین نیروی سمت چپ معادلهٔ ۳۴ـ۳۶ از سه **نکتهٔ کلیدی** زیر استفاده می‌کنیم.

۱. چون ذره نور را به طور کامل جذب می‌کند بزرگی نیروی F_r را می‌توان با استفاده از شدت نور خورشید I، در محل ذره و مساحت مقطع A، از طریق معادلهٔ ۳۴-۳۲ ($F=IA/c$) به دست آورد.

۲. چون فرض کردیم که خورشید یک چشمهٔ نور نقطه‌ای همسانگرد است با استفاده از معادلهٔ ۳۴-۲۷ ($I=P_s/4\pi r^2$) می‌توان P_s، توان خورشید را به I، شدت نور در محل ذره به فاصلهٔ r از خورشید، ربط داد.

۳. چون ذره کروی است مساحت مقطع آن πR^2 (نه نصف مساحت سطح کره) است.

با در نظر گرفتن این سه نکته با هم، داریم

$$F_r = \frac{IA}{c} = \frac{P_s \pi R^2}{4\pi r^2 c} = \frac{P_s R^2}{4 r^2 c} \qquad (۳۴\text{-}۳۷)$$

نیروی گرانشی: در اینجا **نکتهٔ کلیدی** قانون نیوتون دربارهٔ گرانش (معادلهٔ ۱۴-۱) (مبانی فیزیک جلد اول) است. بزرگی نیروی گرانشی وارد بر ذره برابر است با:

$$F_g = \frac{G M_s m}{r^2} \qquad (۳۴\text{-}۳۸)$$

که در آن M_s جرم خورشید و m جرم ذره است. رابطهٔ جرم ذره با چگالی ρ و حجم ذره V (مساوی با $\frac{4}{3}\pi R^3$ برای کره) چنین است:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

پس از حل کردن این معادله نسبت m و جانشانی نتیجهٔ حاصل در معادلهٔ ۳۴-۳۸، داریم

$$F_g = \frac{G M_s \rho \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)}{r^2} \qquad (۳۴\text{-}۳۹)$$

اکنون، با جانشانی معادله‌های ۳۴-۳۷ و ۳۴-۳۹ در معادلهٔ ۳۴-۳۶ و حل کردن معادلهٔ حاصل نسبت به R، داریم

$$R = \frac{3P_s}{16\pi c \rho G M_s}$$

با استفاده از مقدار دادهٔ شدهٔ ρ و مقادیر معلوم G (پیوست ب) و M_s (پیوست پ) می‌توان مقدار مخرج کسر بالا را چنین به دست آورد:

$$(16\pi)(3.00\times10^{8}\,\mathrm{m/s})(3.5\times10^{3}\,\mathrm{kg/m^3})$$
$$\times(6.67\times10^{-11}\,\mathrm{N.m^2/kg^2})(1.99\times10^{30}\,\mathrm{kg}) = 7.0\times10^{33}\,\mathrm{N/s}$$

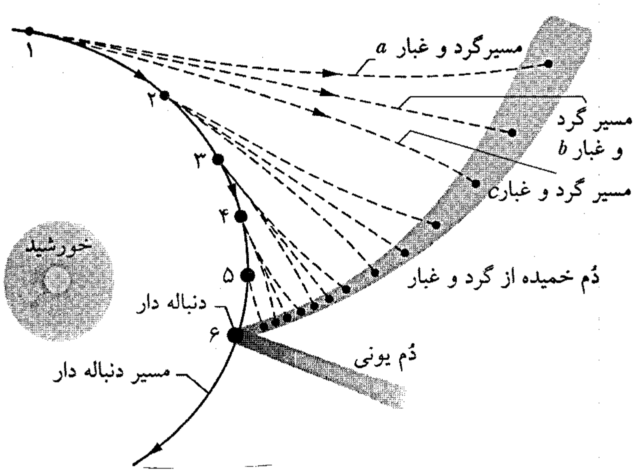
با استفاده از مقدار P_s از پیوست پ، داریم

$$R = \frac{(3)(3.9\times10^{26}\,\mathrm{W})}{7.0\times10^{33}\,\mathrm{N/s}} \Rightarrow$$

$$R = 1.7\times10^{-7}\,\mathrm{m} \qquad \text{(پاسخ)}$$

توجه کنید که این نتیجه از r، فاصلهٔ ذرهٔ گرد و غبار از خورشید مستقل است.

ذرات گرد و غبار با شعاع $R=1.7\times10^{-7}\,\mathrm{m}$، مسیری تقریباً مستقیم، مانند مسیر b در شکل ۳۴-۹، می‌پیمایند. به ازای مقادیر بزرگ‌تر R مقایسهٔ معادله‌های ۳۴-۳۷ و ۳۴-۳۹ نشان می‌دهد که چون F_g برحسب R^3 و F_r برحسب R^2 تغییر می‌کند، نیروی گرانشی F_g بر نیروی تابشی F_r غالب می‌شود. در نتیجه، این ذرات مسیری را دنبال می‌کنند که مانند مسیر c در شکل ۳۴-۹ به درون سوی خورشید خم می‌شود. به همین ترتیب، به ازای مقادیر کوچکتر R، نیروی تابشی غلبه می‌کند و ذرات گرد و غبار مسیری را می‌پیمایند که مانند مسیر a در برون سوی خورشید خم می‌شود. ترکیب این ذرات گرد و غبار دُم متشکل از گرد و غبار دنباله‌دار را به وجود می‌آورد.



شکل ۳۴-۹ مسألهٔ نمونهٔ ۳۴-۲. در این شکل دنباله‌دار در مکان ۶ است. گرد و غبارهای رها شده در پنج مکان قبلی، که در اثر فشار تابشی نور خورشید به برون سوی خورشید رانده شده‌اند، مسیرهای خط‌چین را پیموده‌اند و اکنون دُم خمیده‌ای از گرد و غبار برای دنباله‌دار تشکیل داده‌اند.

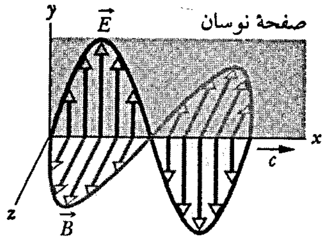
۳۴-۶ قطبش نور

در انگلیس، آنتن‌های تلویزیونی **بسیار پربسامد** (VHF)[1] را به طور قائم نصب می‌کنند، اما در امریکای شمالی این آنتن‌ها به حالت افقی‌اند. این تفاوت ناشی از جهت نوسان موجهای الکترومغناطیسی حامل علامت‌های تلویزیونی است. در انگلیس، تجهیزات تراگسیل علامت‌ها طوری طراحی می‌شوند که موجهای الکترومغناطیسی تولید شده به طور قائم **قطبیده** باشند؛ یعنی، میدان الکتریکی این موجها در سطح قائم نوسان کنند. از این رو، برای آنکه میدان الکتریکی موجهای تلویزیونی فرودی در طول آنتن جریانی به وجود

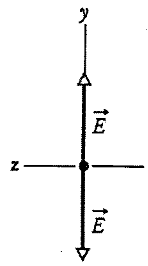
1. very high frequncy

آورند (و علامتی برای گیرندهٔ تلویزیونی فراهم کنند)، باید آنتن به صورت قائم باشد. در امریکای شمالی، موجهای الکترومغناطیسی به طور افقی قطبیده‌اند.

شکل ۳۴ـ۱۰ الف، یک موج الکترومغناطیسی را نشان می‌دهد که میدان الکتریکی‌اش به طور موازی با محور قائم y، نوسان می‌کند. صفحهٔ شامل بردارهای $\vec{E}$ را **صفحهٔ نوسان موج** می‌نامند (بدین جهت، این موج، موج با **قطبش خطی** در راستای محور y گفته می‌شود). قطبش موج (حالت موج قطبیده) را می‌توان، مطابق شکل ۳۴ـ۱۰ ب، با نشان دادن جهت‌های نوسان‌های میدان الکتریکی با دید صفحهٔ نوسان به طور «رو در رو»، نمایش داد. در این شکل، «پیکان دو سر» قائم نشان می‌دهد که در حین انتشار و عبور موج میدان الکتریکی به‌طور قائم نوسان می‌کند. این میدان به طور پیوسته در طول محور y در جهت بالا و پایین تغییر می‌کند.



(الف)



(ب)

شکل ۳۴ـ۱۰ (الف) نمودار صفحهٔ نوسان موج الکترومغناطیسی قطبیده. (ب) برای نشان دادن قطبش نور، صفحهٔ نوسان به طور «رودررو» دیده می‌شود و جهت‌های میدان الکتریکی نوسان کننده با پیکان‌های دو سر نمایش داده شده‌اند.

نور قطبیده

همهٔ موجهای الکترومغناطیسی گسیل شده از ایستگاه فرستندهٔ تلویزیونی دارای یک نوع قطبیدگی هستند، اما موجهای الکترومغناطیسی گسیل شده از هر چشمهٔ نور عادی (مانند خورشید یا لامپ روشنایی) **قطبیده کاتوره‌ای** یا **ناقطبیده** هستند؛ یعنی، میدان الکتریکی در هر نقطه همیشه بر راستای انتشار موج عمود است اما جهت آن به طور کاتوره‌ای تغییر می‌کند. بنابراین، اگر بخواهیم در دوره‌ای از زمان با یک دید رودررو، نوسان‌ها را نمایش دهیم، نمی‌توانیم ترسیم ساده‌ای از پیکان‌های دو سر، نظیر شکل ۳۴ـ۱۰ ب، ارائه دهیم. آنچه می‌توانیم نشان دهیم نقش آشفته‌ای از پیکان‌های دو سر، نظیر شکل ۳۴ـ۱۱ الف، است.

در اصل، این نقش آشفته را با تجزیه کردن هر میدان الکتریکی شکل ۳۴ـ۱۱ الف، به مؤلفه‌هایی در راستای محورهای y و z، می‌توان ساده کرد. در این صورت، در حین پیشروی و عبور موج، مؤلفهٔ y خالص به طور موازی با محور y و مؤلفهٔ z خالص موازی با محور z نوسان می‌کند. نتیجه اینکه، نور ناقطبیده را می‌توان با یک زوج پیکان دو سر، مطابق شکل ۳۴ـ۱۱ ب، نمایش داد. پیکان دو سر مربوط به محور y نمایشگر نوسان‌های مؤلفهٔ y خالص میدان الکتریکی و پیکان دو سر مربوط به محور z نمایشگر نوسان‌های مؤلفهٔ z خالص میدان الکتریکی است. نتیجهٔ انجام دادن همهٔ این کارها، این است که نور ناقطبیده را به صورت برهم نهی دو موج قطبیده تغییر می‌دهیم. صفحه‌های نوسان این دو موج برهم عمودند ـ یکی از صفحه‌ها شامل محور y و صفحهٔ دیگر شامل محور z است. یکی از دلیل‌های انجام دادن این تغییر این است که نقش شکل ۳۴ـ۱۱ ب از نقش شکل ۳۴ـ۱۱ الف، خیلی آسان‌تر است.

برای نمایش دادن **نور با قطبش نسبی** (نوری که نوسان‌های میدانی آن، نه کاملاً کاتوره‌ای، نظیر شکل ۳۴ـ۱۱ الف، و نه موازی با یک محور، نظیر شکل ۳۴ـ۱۱ ب، هستند) شکل‌های مشابهی می‌توان رسم کرد. در چنین وضعیتی، یکی از پیکان‌های دو سر موجود در زوج پیکان‌های دو سر عمود را می‌توان بلندتر از دیگری رسم کرد.

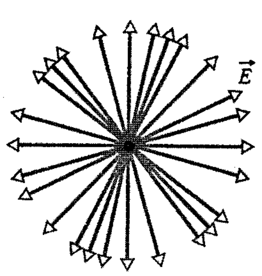
نور مرئی ناقطبیده را با گذراندن آن از یک **ورقهٔ قطبنده**، مطابق شکل ۳۴ـ۱۲، می‌توان به نور قطبیده تبدیل کرد. این ورقه‌ها به نام تجارتی پلاروید یا **پالایه‌های پلارویدی** معروف‌اند و در سال ۱۳۱۱/۱۹۳۲ توسط **ادوین لند**[1]، در زمانی که وی دانشجوی دورهٔ کارشناسی بود، اختراع شدند. ورقهٔ قطبنده شامل برخی مولکول‌های دراز جا داده شده در پلاستیک است. در موقعی که ورقه را می‌سازند، آن را می‌کشند تا مولکول‌ها را در ردیف‌های موازی، مانند شیارهای زمین‌های شخم زده شده، قرار دهند. با این شرایط در هنگام عبور کردن نور از ورقه، مؤلفه‌های میدان الکتریکی در یک راستا از ورقه می‌گذرند، حال آنکه مؤلفه‌های عمود بر آن راستا توسط مولکول‌ها جذب و ناپدید می‌شوند.

در اینجا به مولکول‌ها نخواهیم پرداخت، اما برای ورقه یک **راستای قطبنده** که در طول آن مؤلفه‌های میدان الکتریکی عبور می‌کنند، در نظر خواهیم گرفت:

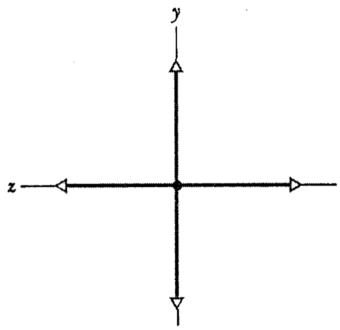
1. Edwin Land

◀ مؤلفه‌های میدان الکتریکی موازی با راستای قطبنده از ورقهٔ قطبنده می‌گذرند (تراگسیل می‌شوند) و مؤلفه‌های عمود بر این راستا جذب می‌شوند.

بنابراین، میدان الکتریکی نور خارج شده از ورقه فقط شامل مؤلفه‌هایی است که با راستای قطبندهٔ ورقه موازی‌اند؛ از این رو، نور در این راستا قطبیده است. در شکل ۳۴-۱۲، مؤلفه‌های قائم میدان الکتریکی توسط ورقه تراگسیل و مؤلفه‌های موازی جذب می‌شوند. در نتیجه، موجهای تراگسیل شده به طور قائم قطبیده‌اند.



(الف)



(ب)

شکل ۳۴-۱۱ (الف) نقش نور ناقطبیده، که شامل موجهایی با میدان‌های الکتریکی دارای جهت‌های کاتوره‌ای است. در اینجا موجها همه در راستای یک محور در برون سوی صفحهٔ شکل پیش می‌روند و همه دارای دامنهٔ یکسان E هستند. (ب) نمودار دیگری از نمایش دادن نور ناقطبیده. نور، حاصل برهم نهی دو موج قطبیده است که صفحه‌های نوسان آنها برهم عمودند.

شدت نور قطبیدهٔ تراگسیل شده

اکنون، به بررسی شدت نور تراگسیل شده توسط یک ورقهٔ قطبنده می‌پردازیم. این موضوع را با نور ناقطبیده، که نوسان‌های میدان الکتریکی آن می‌توانند، مطابق شکل ۳۴-۱۱ ب، به مؤلفه‌های y و z تجزیه شوند، آغاز می‌کنیم. علاوه بر این، کار را می‌توان طوری ترتیب داد که محور y با راستای قطبندهٔ ورقه موازی باشد. در این صورت، فقط مؤلفه‌های y میدان الکتریکی نور از ورقه عبور می‌کنند و مؤلفه‌های z میدان جذب می‌شوند. اگر سمتگیری موجهای اصلی کاتوره‌ای باشد، با توجه به شکل ۳۴-۱۱ ب، مجموع مؤلفه‌های y با مجموع مؤلفه‌های z برابر می‌شود. وقتی مؤلفه‌های z جذب می‌شوند نیمی از شدت نور اصلی I_0، تلف می‌شود. در این صورت، I شدت نور قطبیدهٔ خارج شده از ورقه برابر است با:

$$I = \frac{1}{2} I_0 \qquad (۳۴\text{-}۴۰) \quad ■$$

اجازه دهید این اثر را **قاعدهٔ یک ـ نیمه** به نامیم؛ این قاعده تنها وقتی به کار می‌رود که نور وارد شده به ورقهٔ قطبنده ناقطبیده باشد.

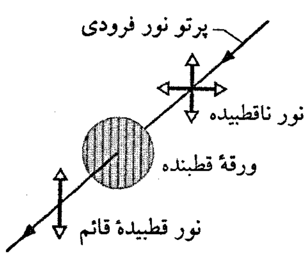
اکنون، فرض کنید که نور وارد شده به ورقهٔ قطبنده از پیش قطبیده است. شکل ۳۴-۱۳، یک ورقهٔ قطبندهٔ واقع در صفحهٔ شکل را نشان می‌دهد و $\vec{E}$، میدان الکتریکی این موج نور قطبیده به سمت ورقه (پیش از جذب شدن) پیش می‌رود. میدان $\vec{E}$ را می‌توان نسبت به راستای قطبندهٔ ورقه به دو مؤلفه تجزیه کرد؛ مؤلفهٔ موازی E_y، از ورقه عبور می‌کند و مؤلفهٔ عمودی E_z جذب می‌شود. چون θ زاویهٔ میان $\vec{E}$ و راستای قطبندهٔ ورقه است، مؤلفهٔ موازی تراگسیل شدهٔ میدان برابر است با:

$$E_y = E\cos\theta \qquad (۳۴\text{-}۴۱)$$

یادآوری می‌شود که شدت یک موج الکترومغناطیسی (نظیر موج نوری) با مجذور بزرگی میدان الکتریکی متناسب است (معادلهٔ ۳۴-۲۶). پس در این حالت، شدت موج خارج شده از ورقه I، متناسب با E_y^2 و شدت موج اصلی متناسب با E^2 است. بنابراین، با توجه به معادلهٔ ۳۴-۴۱ می‌توان نوشت $I/I_0 = \cos^2\theta$، و از آنجا، داریم

$$I = I_0 \cos^2\theta \qquad (۳۴\text{-}۴۲) \quad ■$$

اجازه دهید این اثر را **قاعدهٔ مجذور ـ کسینوس** بنامیم؛ این قاعده تنها وقتی به کار می‌رود که نور وارد شده به ورقهٔ قطبنده از پیش قطبیده باشد. در این صورت، شدت موج تراگسیل شده I، وقتی بیشینه و برابر با شدت موج اصلی I_0 است، که موج اصلی موازی با راستای قطبندهٔ ورقه، قطبیده باشد (وقتی که زاویهٔ θ در معادلهٔ ۳۴-۴۲ برابر با صفر یا ۱۸۰ درجه باشد). I وقتی صفر است که موج اصلی به طور عمود بر راستای قطبندهٔ ورقه، قطبیده باشد (وقتی که زاویهٔ θ برابر با ۹۰ درجه باشد).



شکل ۳۴-۱۲ نور ناقطبیده هنگام عبور از ورقهٔ قطبنده قطبیده می‌شود. در این حالت، راستای قطبیدگی با راستای قطبندهٔ ورقه موازی است. در این شکل راستای قطبنده با خط‌های قائم رسم شده در ورقه نمایش داده شده است.

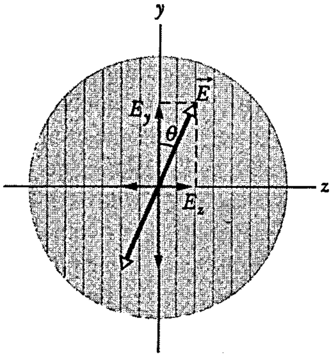
شکل ۳۴-۱۴، آرایشی را نشان می‌دهد که در آن نور ناقطبیدهٔ آغازی از دو ورقهٔ قطبندهٔ P_1 و P_2 عبور می‌کند. (اغلب، ورقهٔ اول را **قطبی‌گر** و ورقهٔ دوم را **تحلیل‌گر** می‌نامند). چون راستای قطبندهٔ ورقهٔ P_1 قائم است نور تراگسیل شده از P_1 به طرف P_2 به طور قائم قطبیده است. هرگاه راستای قطبندهٔ P_2 هم قائم باشد، در این صورت، تمام نور تراگسیل شده از P_1 از ورقهٔ P_2 عبور می‌کند. اما اگر راستای قطبندهٔ P_2 افقی باشد هیچ بخشی از نور تراگسیل شده از P_1، از ورقهٔ P_2 عبور نمی‌کند. با در نظر گرفتن سمتگیری‌های نسبی دو

ورقه هم به همین نتیجه‌ها می‌رسیم. هرگاه راستاهای قطبندهٔ ورقه‌ها موازی باشند تمام نور تراگسیل شده از ورقهٔ اول، از ورقهٔ دوم می‌گذرد و اگر این راستاها برهم عمود باشند (ورقه‌ها متعامد باشند) هیچ نوری از ورقهٔ دوم نمی‌گذرد. در شکل ۳۴-۱۵، این دو حالت فرین به وسیلهٔ شیشه‌های عینک قطبیده نمایش داده شده‌اند.

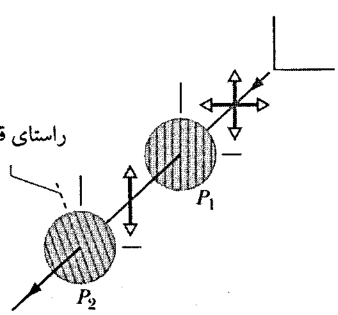
سرانجام، اگر در شکل ۳۴-۱۴، دو راستای قطبنده با هم زاویه‌ای بسازند که مقدار آن بین صفر و ۹۰ درجه واقع شده باشد، بخشی از نور تراگسیل شده از P_1، از P_2 عبور می‌کند و شدت این نور از معادلهٔ ۳۴-۴۲ به‌دست می‌آید.

نور به جز از طریق ورقه‌های قطبنده، از راه‌های دیگری مانند بازتاب (که در بخش ۳۴-۹ مورد بحث قرار خواهد گرفت) و **پراکندگی** مربوط به اتم‌ها یا مولکول‌ها هم می‌تواند قطبیده شود. در پراکندگی، نوری که به یک شیء، مثلاً به یک مولکول، برخورد می‌کند در راستاهای مختلفی، آن هم به طور کاتوره‌ای، پراکنده می‌شود. نمونه‌ای از این حالت، پراکندگی نور خورشید به وسیلهٔ مولکول‌ها در جوّ زمین است، که روشنایی کلی آسمان را تأمین می‌کند.

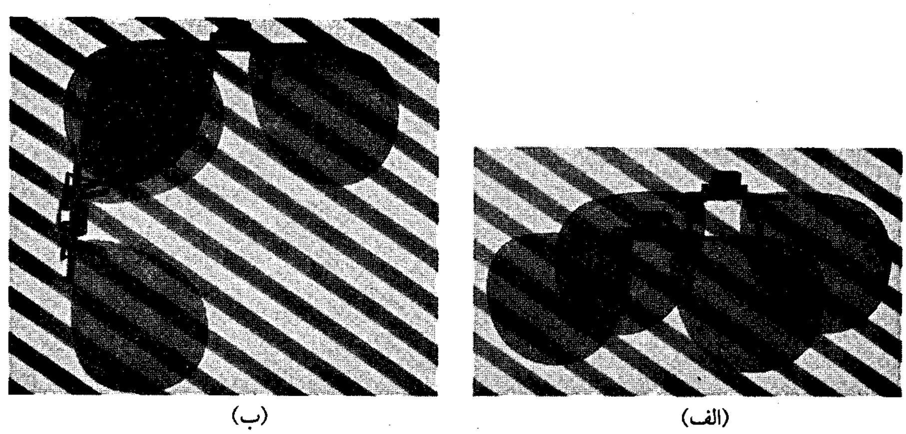
اگرچه نور مستقیم خورشید ناقطبیده است، اما نور مربوط به سراسر آسمان در اثر پراکندگی، دست کم به‌طور نسبی، قطبیده است. زنبورهای عسل در پرواز کردن و رفت و آمد به سوی کندوهای خود از قطبش نور آسمان بهره می‌گیرند. به همین ترتیب، **وایکینگ‌ها*** هم در دریانوردی سراسر دریای شمال در هنگام روز و در موقع قرار داشتن خورشید در زیر افق (به خاطر بالا بودن عرض جغرافیایی دریای شمال) از قطبش نور آسمان استفاده می‌کردند. این دریانوردان پیشین برخی بلورها (به نام **کوردیریت****) را که در موقع چرخش در نور قطبیده تغییر رنگ می‌دادند، کشف کردند. آنان با نگاه کردن به آسمان به وسیلهٔ این نوع بلور، در حالی که آن را به دور خط دیدشان می‌چرخاندند، می‌توانستند خورشید پنهان را جایابی و در نتیجه جهت جنوب را معین کنند.



شکل ۳۴-۱۳ نمودار نور قطبیدهٔ وارد شده به ورقهٔ قطبنده. میدان الکتریکی نور $\vec{E}$، را می‌توان به دو مؤلفهٔ E_y (موازی با راستای قطبندهٔ ورقه) و E_z (عمود بر این راستا) تجزیه کرد. مؤلفهٔ E_y از ورقه عبور می‌کند و مؤلفهٔ E_z جذب می‌شود.



شکل ۳۴-۱۴ نور تراگسیل شده از ورقهٔ قطبندهٔ P_1 به طور قائم قطبیده شده و با پیکان دو سر قائم نمایش داده شده است. شدت نوری که از ورقهٔ قطبندهٔ P_2 عبور می‌کند به زاویهٔ میان راستای قطبش نور و راستای قطبندهٔ ورقهٔ P_2 بستگی دارد (این راستا با خط‌های رسم شده در ورقه به صورت خط‌چین نمایش داده شده است).



شکل ۳۴-۱۵ شیشه‌های عینک قطبنده شامل ورقه‌هایی هستند که در موقع استفاده کردن از آنها راستاهای قطبنده قائم‌اند. (الف) هنگامی که سمتگیری راستاهای قطبنده در این دو شیشه یکسان است همپوشانی دو شیشه نور را به خوبی عبور می‌دهد، اما (ب) موقعی که این راستاها متعامدند همپوشانی دو شیشه جلو عبور نور را می‌گیرد.

مسألهٔ نمونهٔ ۳۴-۳

شکل ۳۴-۱۶، یک سیستم شامل سه ورقهٔ قطبنده را که در مسیر نور از پیش ناقطبیده، قرار گرفته‌اند نشان می‌دهد. راستای قطبنده، در ورقهٔ اول با محور y موازی است، در ورقهٔ دوم با محور y در جهت پادساعتگرد زاویهٔ ۶۰ درجه می‌سازد، و در ورقه سوم با محور x موازی است. چه کسری از شدت نور آغازی I_0 از سیستم خارج می‌شود و وضعیت نور قطبیده چگونه است؟

حل: در اینجا **نکته‌های کلیدی** زیر را در نظر می‌گیریم:

۱. ورقه به ورقهٔ سیستم را، از ورقهٔ اول که نور به آن وارد شده است تا ورقهٔ آخر، مورد بررسی قرار می‌دهیم.

* **وایکینگ‌ها** (Vikings) دریانوردان اسکاندیناوی بودند که در سده‌های هشتم تا دهم میلادی کرانه‌های اروپا را مورد تاراج قرار می‌دادند. ـ م.

** **کوردیریت** (cordierite) سیلیکات منیزیوم و آلومینیوم است که اندکی هم آهن دارد. ـ م.

۲. برای تعیین شدت نور تراگسیل شده از هر ورقه، قاعدهٔ یک ـ نیمه یا قاعدهٔ مجذور ـ کسینوس را، بسته به اینکه نور وارد شده به ورقه ناقطبیده یا از پیش قطبیده باشد، به کار می‌بریم.

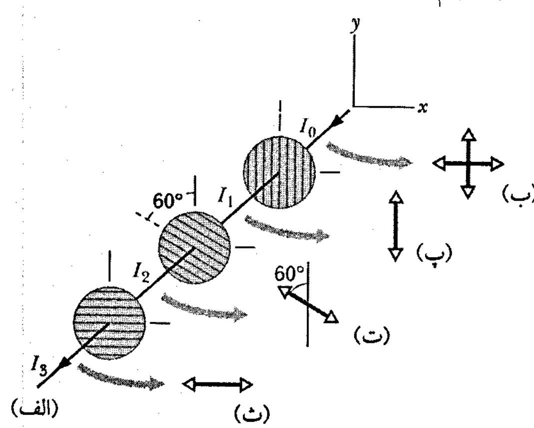
۳. نور تراگسیل شده از یک ورقهٔ قطبنده همیشه به طور موازی با راستای قطبندهٔ ورقه قطبیده است.

ورقهٔ اول: در شکل ۳۴ـ۱۶ ب، موج نور اصلی با استفاده از نمایش رو در رو و پیکان دو سر شکل ۳۴ـ۱۱ ب، نشان داده شده است. چون نور از پیش ناقطبیده است، شدت نور تراگسیل شده از ورقهٔ اول I_1، از قاعدهٔ یک ـ نیمه (معادلهٔ ۳۴ـ۴۰) به دست می‌آید:

$$I_1 = \frac{1}{2} I_0$$

چون راستای قطبندهٔ ورقهٔ اول با محور y موازی است وضعیت قطبش نور تراگسیل شده از این ورقه نیز با دید رودررو، مطابق شکل ۳۴ـ۱۶ پ، است.

ورقهٔ دوم: چون نور وارد شده به ورقهٔ دوم قطبیده است، شدت نور تراگسیل شده از این ورقه I_2، از قاعدهٔ مجذور ـ کسینوس (معادلهٔ ۳۴ـ۴۲) به دست می‌آید. در این قاعده θ، زاویهٔ میان راستای قطبندهٔ نور وارد شده به ورقه (که با محور y موازی است) و راستای قطبندهٔ ورقهٔ دوم (زاویهٔ ۶۰ درجه نسبت به محور y در جهت پادساعتگرد) است. در نتیجه، θ برابر با ۶۰ درجه است و، داریم



شکل ۳۴ـ۱۶ مسألهٔ نمونهٔ ۳۴ـ۳. (الف) نمودار وارد شدن نور از پیش ناقطبیده با شدت I_0، به یک سیستم شامل سه ورقهٔ قطبنده. شدت‌های نور تراگسیل شده از ورقه‌ها با I_1، I_2 و I_3 مشخص شده‌اند. در شکل، وضعیت قطبش نور با دید از روبه‌رو، در (ب) نور آغازی و نور تراگسیل شده از (پ) ورقهٔ اول، (ت) ورقهٔ دوم، و (ث) ورقهٔ سوم، نیز نشان داده شده است.

$$I_2 = I_1 \cos^2 60^\circ$$

وضعیت قطبش این نور تراگسیل شده موازی با راستای قطبندهٔ ورقهٔ تراگسیلندهٔ نور یعنی، در راستای زاویهٔ ۶۰ درجه نسبت به محور y در جهت پادساعتگرد با دید رودررو، مطابق شکل ۳۴ـ۱۶ ت، است.

ورقهٔ سوم: چون نور وارد شده به ورقهٔ سوم قطبیده است، شدت نور گسیل شده از این ورقه I_3، از قاعدهٔ مجذور ـ کسینوس به دست می‌آید. در این حالت θ زاویهٔ میان راستای قطبندهٔ نور وارد شده به ورقه (شکل ۳۴ـ۱۶ ت) و راستای قطبندهٔ ورقهٔ سوم (موازی با محور x) است. در نتیجه، θ برابر با ۳۰ درجه است و، داریم

$$I_3 = I_2 \cos^2 30^\circ$$

نور نهایی تراگسیل شده با این شدت در راستای موازی با محور x قطبیده است (شکل ۳۴ـ۱۶ ث). برای تعیین این شدت، ابتدا I_2 و سپس I_1 را در معادلهٔ بالا جانشانی می‌کنیم:

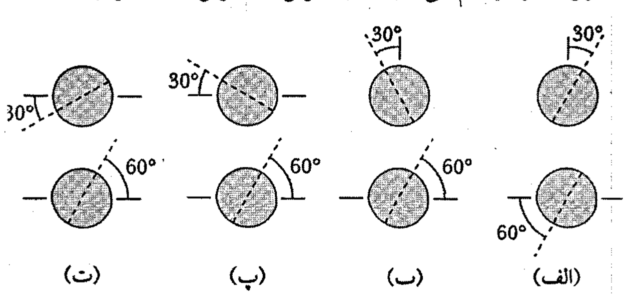
$$I_3 = I_2 \cos^2 30^\circ = (I_1 \cos^2 60^\circ)(\cos^2 30^\circ)$$

$$I_3 = (\frac{1}{2} I_0)\cos^2 60^\circ \cos^2 30^\circ = 0.094 I_0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{I_3}{I_0} = 0.094$$ (پاسخ)

معنای این پاسخ این است که ۹٫۴ درصد شدت نور آغازی از ورقهٔ سوم سیستم خارج می‌شود. (اکنون، اگر ورقهٔ دوم را حذف کنیم چه کسری از شدت نور آغازی از سیستم خارج می‌شود؟)

خودآزمایی ۴: شکل زیر، چهار جفت ورقهٔ قطبنده را با دید از روبه‌رو، نشان می‌دهد. هر جفت ورقه در مسیر نور از پیش ناقطبیده (نظیر سه ورقهٔ شکل ۳۴ـ۱۶ الف) قرارگرفته است. راستای قطبندهٔ هر ورقه (که با خط‌چین ترسیم شده است) نسبت به محور افقی x یا محور قائم y نشان داده شده است. این جفت ورقه‌ها را با توجه به بزرگی کسری از شدت نور آغازی که از سیستم می‌گذرد، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



۳۴ـ۷ بازتاب و شکست نور

گرچه موج نوری در حین دور شدن از چشمهٔ خود گسترش پیدا می‌کند، اما پیشروی آن را می‌توان تقریباً به صورت خط مستقیم در نظر گرفت؛ همان‌طور که در مورد موج نوری شکل ۳۴ـ۵ الف چنین کردیم. مبحث مطالعهٔ خواص موجهای نوری بر پایهٔ این تقریب را **اپتیک هندسی** می‌نامند. در باقی‌ماندهٔ این فصل و در تمام فصل ۳۵ دربارهٔ اپتیک هندسی نور مرئی بحث خواهد شد.

شکل ۳۴-۱۷ الف، تصویر سیاه و سفید نمونه‌ای از موجهای نوری را نشان می‌دهد که تقریباً به خط مستقیم منتشر می‌شوند. در این شکل، یک باریکهٔ نور (**باریکهٔ نور فرودی**) از سمت چپ پایین می‌آید، در هوا پیش می‌رود و به صفحهٔ (تخت) سطح شیشه‌ای برخورد می‌کند. بخشی از نور از سطح باز می‌تابد و باریکه‌ای در حال بالا رفتن به سمت راست تشکیل می‌دهد، چنانکه گویی یک باریکهٔ اصلی نور از سطح شیشه‌ای بالا آمده و در حال پیشروی است. نور باقی‌مانده از سطح به شیشه وارد می‌شود و با تشکیل دادن یک باریکه به پایین و سمت راست پیش رود. چون نور می‌تواند از شیشه عبور کند، شیشه را مادهٔ **شفاف** می‌نامند؛ یعنی، از درون شیشه می‌توان چیزی را دید. (در این فصل فقط مواد شفاف را در نظر خواهیم گرفت).

پدیدهٔ عبورکردن نور از یک سطح (**یا فصل مشترک**) جداکنندهٔ دو محیط شفاف را **شکست نور** می‌گویند و نور عبورکرده از سطح **پرتو شکست** نام دارد. به جز در موقعی که باریکهٔ نور فرودی بر سطح عمود است، شکست نور در یک سطح راستای انتشار نور را تغییر می‌دهد. بدین جهت گفته می‌شود که در اثر شکست، باریکهٔ نور **خم می‌شود**. توجه کنید که خم شدن نور در شکل ۳۴-۱۷ الف فقط در سطح اتفاق می‌افتد، وگرنه درون شیشه نور به خط راست انتشار پیدا می‌کند.

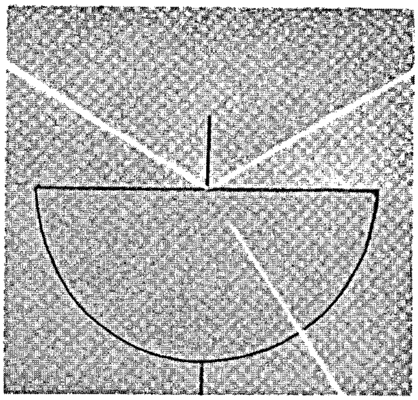
در شکل ۳۴-۱۷ ب، باریکه‌های نور در تصویر با یک پرتو تابش، یک پرتو بازتاب و یک پرتو شکست (و جبهه‌های موج) نشان داده شده‌اند. هر پرتو دارای سمتگیری‌ای نسبت به خطی، به نام **خط عمود**، است که در نقطهٔ بازتاب و شکست بر سطح عمود است. در شکل ۳۴-۱۷ ب، **زاویهٔ تابش** θ_1، **زاویهٔ بازتاب** θ'_1، و **زاویهٔ شکست** θ_2 است. همهٔ این زاویه‌ها، مطابق شکل، نسبت به خط عمود اندازه‌گیری می‌شوند. صفحهٔ شامل پرتو فرودی و خط عمود **صفحهٔ تابش** نام دارد، که همان صفحهٔ شکل ۳۴-۱۷ ب است.

آزمایش نشان می‌دهد که بازتاب و شکست از دو قانون زیر پیروی می‌کنند:

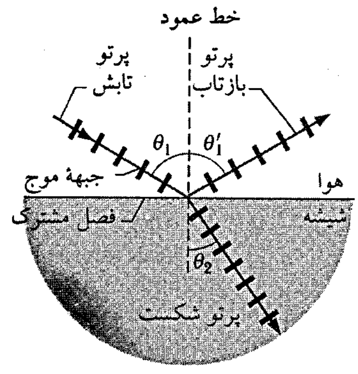
قانون بازتاب: پرتو بازتاب در صفحهٔ تابش واقع است و زاویهٔ بازتابی برابر با زاویهٔ تابش دارد. یعنی، با توجه به شکل ۳۴-۱۷ ب، داریم

$$\theta'_1=\theta_1 \qquad \text{(بازتاب)} \qquad (۳۴-۴۳)$$ ■

(در زاویهٔ بازتاب نشانهٔ پریم را معمولاً حذف می‌کنند).



(الف)



(ب)

شکل ۳۴-۱۷ (الف) تصویر سیاه و سفید نشان دهندهٔ پدیده‌های بازتاب و شکست باریکهٔ نور فرودی در سطح افقی و تخت شیشه است. (بخشی از باریکهٔ شکست در درون شیشه به خوبی تصویربرداری نشده است). در سطح پایینی، که به صورت خمیده است، باریکهٔ نور عمود بر سطح است و در نتیجه بدون شکست از شیشه خارج می‌شود. (ب) نمودار قسمت (الف) با نمایش دادن پرتوهای نور. در شکل زاویه‌های تابش، (θ'_1) و شکست (θ_2) نشان داده شده‌اند.

قانون شکست: پرتو شکست در صفحهٔ تابش واقع است و دارای زاویهٔ شکست θ_2 است که رابطهٔ آن با زاویهٔ تابش θ_1 چنین است:

$$n_2\sin\theta_2=n_1\sin\theta_1 \qquad \text{(شکست)} \qquad (۴۴\text{-}۳۴)$$ ■

در اینجا نمادهای n_1 و n_2 که ثابت و بدون ابعاد هستند، **ضریب شکست** نام دارند و به محیط مربوط به شکست وابسته‌اند. این معادله راکه بیان کنندهٔ **قانون اسنل**[1] است، در فصل ۳۶ به دست خواهیم آورد. چنانکه در آنجا خواهیم دید، ضریب شکست یک محیط برابر است با c/v، که در آن v تندی نور در محیط و c تندی نور در خلاء است.

در جدول ۳۴-۱ ضریب شکست خلاء و ضریب شکست برخی مواد متداول درج شده است. n، در خلاء دقیقاً برابر با ۱ و در هوا خیلی نزدیک به ۱٫۰ (مقداری تقریبی که اغلب به کار برده می‌شود) است. ضریب شکست هیچ ماده‌ای کمتر از ۱ نیست.

برای مقایسهٔ زاویهٔ شکست θ_2 با زاویهٔ تابش θ_1، معادلهٔ ۳۴-۴۴ را می‌توان دوباره چنین نوشت:

$$\sin\theta_2=\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1 \qquad (۴۵\text{-}۳۴)$$

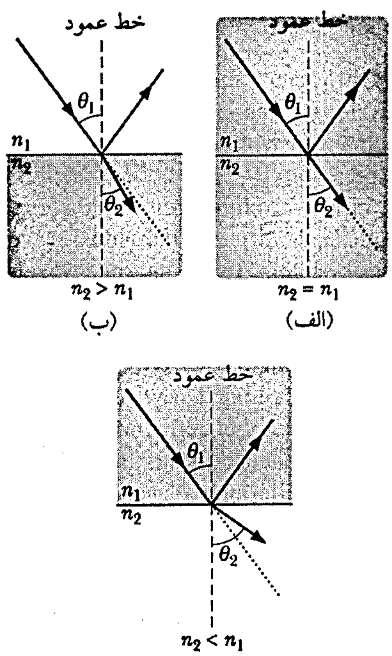
در این صورت می‌توان دید که مقدار نسبی θ_2 به مقادیر نسبی n_2 و n_1 بستگی دارد و در واقع، سه نتیجهٔ اساسی زیر به دست می‌آید:

۱. هرگاه n_2 با n_1 برابر باشد، θ_2 با θ_1 برابر است. در این حالت، باریکهٔ نور در اثر شکست خم نمی‌شود و مطابق شکل ۳۴-۱۸ الف، در راستای بدون انحراف به پیشروی ادامه می‌دهد.

۲. هرگاه n_2 بزرگتر از n_1 باشد، θ_2 از θ_1 کوچکتر است. در این حالت، باریکهٔ نور، مطابق شکل ۳۴-۱۸ ب، در اثر شکست نسبت به راستای بدون انحراف به سوی خط عمود خم می‌شود.

۳. هرگاه n_2 کوچکتر از n_1 باشد، θ_2 از θ_1 بزرگتر است. در این حالت، باریکهٔ نور، مطابق شکل ۳۴-۱۸ پ، در اثر شکست نسبت به راستای بدون انحراف در برون سوی خط عمود خم می‌شود.

پدیدهٔ شکست نمی‌تواند یک باریکهٔ نور را چنان خم کند که پرتو شکست و پرتو تابش در یک طرف خط عمود قرار گیرند.



شکل ۳۴-۱۸ نمودار باریکهٔ نور در حال شکست از محیطی با ضریب شکست n_1 به محیطی با ضریب شکست n_2. (الف) به ازای $n_2=n_1$، باریکهٔ نور خم نمی‌شود؛ در این صورت، باریکهٔ نور در راستای بدون انحراف (خط نقطه‌چین)، که همان راستای باریکهٔ نور فرودی است، پیش می‌رود. باریکهٔ نور شکست، (ب) به ازای $n_2>n_1$ به سوی خط عمود، و (پ) به ازای $n_2<n_1$ در برون سوی خط عمود، خم می‌شود.

جدول ۳۴-۱ ضریب شکست برخی مواد*

محیط	ضریب شکست	محیط	ضریب شکست
خلاء	دقیقاً ۱	شیشهٔ کراون	۱٫۵۲
هوا (STP)**	۱٫۰۰۰۲۹	کلرید سدیم	۱٫۵۴
آب (۲۰°C)	۱٫۳۳	پلی استایرن	۱٫۵۵
استون	۱٫۳۶	سولفید کربن	۱٫۶۳
الکل اتیلیک	۱٫۳۶	شیشهٔ فلینت	۱٫۶۵
محلول قند (۳۰ درصد)	۱٫۳۸	یاقوت کبود	۱٫۷۷
کوارتز شیشه‌ای	۱٫۴۶	شیشهٔ فلینت سنگین	۱٫۸۹
محلول قند (۸۰ درصد)	۱٫۴۹	الماس	۲٫۴۲

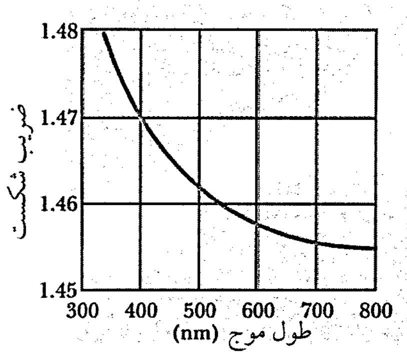
* برای نور زرد سدیم با طول موج ۵۸۹nm.

** STP سَر نام اصطلاح standard temperature(۰°C) and pressure (۱atm)، به معنای دما ـ فشار استاندارد است.

1. Snell

پاشندگی رنگی

ضریب شکست نور در یک محیط، n، به جز در مورد خلاء به طول موج نور بستگی دارد. بستگی n به طول موج حاکی از این است که هرگاه باریکهٔ نوری شامل پرتوهای با طول موجهای مختلف باشد، این پرتوها در فصل مشترک دو محیط با زاویه‌های متفاوت می‌شکنند؛ یعنی، باریکهٔ نور بر اثر شکست گسترده می‌شود. این گسترده شدن باریکهٔ نور را **پاشندگی رنگی** می‌نامند، که در آن اصطلاح «رنگی» به رنگ‌های وابسته به طول موجهای منفرد و «پاشندگی» به گسترده شدن نور با توجه به طول موجها یا رنگ‌های آن، اشاره دارد. در شکل‌های ۳۴ـ۱۷ و ۳۴ـ۱۸، شکست نور پدیدهٔ پاشندگی رنگی را نشان نمی‌دهد، زیرا در این شکل‌ها باریکه‌های نور **تکفام** (یعنی، تک طول موج یا تکرنگ) هستند.



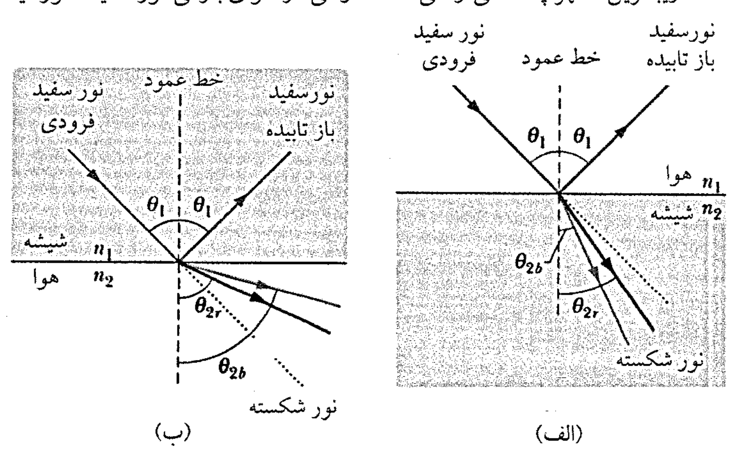
شکل ۳۴ـ۱۹ نمودار تغییرات ضریب شکست کوارتز شیشه‌ای برحسب طول موج. این نمودار نشان می‌دهد که باریکهٔ نور با طول موج کوتاه، و ضریب شکست بالاتر، در موقع وارد شدن به کوارتز یا خارج شدن از آن، بیشتر از باریکهٔ نور با طول موج بلند خم می‌شود.

به طور کلی، ضریب شکست یک محیط معین برای نور با طول موج کوتاه‌تر (مثلاً، نور آبی) نسبت به نور با طول موج بلندتر (مثلاً، نور قرمز) **بزرگتر** است. به عنوان مثال، شکل ۳۴ـ۱۹ نمودار چگونگی تغییرات ضریب شکست کوارتز شیشه‌ای را برحسب طول موج نور نمایش می‌دهد. این نمودار نشان می‌دهد که هرگاه باریکهٔ نوری شامل دو نور آبی و قرمز در فصل مشترک دو محیط شکسته شود، مثلاً، نور از هوا به کوارتز، یا از کوارتز به هوا، وارد شود، **مؤلفهٔ آبی** (پرتو متناظر با موج نور آبی) بیشتر از **مؤلفهٔ قرمز** خم می‌شود.

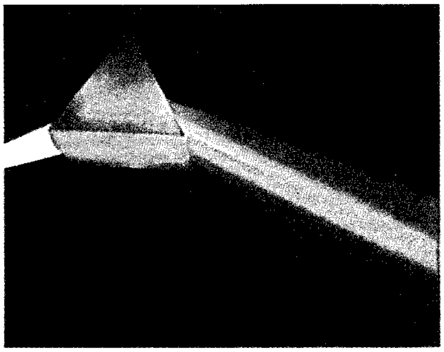
باریکهٔ **نور سفید** شامل تمام (تقریباً تمام) رنگ‌های مربوط به طیف نور مرئی با شدت‌های تقریباً یکنواخت است. وقتی چنین نوری را می‌بینید آن را بیشتر به رنگ سفید احساس می‌کنید، تا با رنگ‌های جداگانه و منفرد. در شکل ۳۴ـ۲۰ الف، باریکهٔ نور سفیدی از هوا به سطح شیشه می‌تابد. (چون صفحه‌های کتاب سفیدند، باریکهٔ نور سفید با یک پرتو خاکستری رنگ معرفی و در ضمن، باریکهٔ نور تکفام، معمولاً، با یک پرتو سیاه رنگ نشان داده می‌شود). از باریکهٔ نور شکسته در شکل ۳۴ـ۲۰ الف، فقط مؤلفه‌های قرمز و آبی نشان داده شده‌اند. چون مولفهٔ آبی بیشتر از مؤلفهٔ قرمز خم می‌شود، زاویهٔ شکست مربوط به مؤلفهٔ آبی θ_{2b}، **کوچکتر** از زاویهٔ شکست مربوط به مؤلفهٔ قرمز θ_{2r}، است. (یادآوری می‌شود، زاویه‌ها نسبت به خط عمود اندازه‌گیری می‌شوند). در شکل ۳۴ـ۲۰ ب، یک پرتو نور سفید در شیشه به فصل مشترک شیشه ـ هوا می‌تابد. در این حالت نیز مؤلفهٔ آبی بیشتر از مؤلفهٔ قرمز خم می‌شود و θ_{2b} بزرگتر از θ_{2r} است.

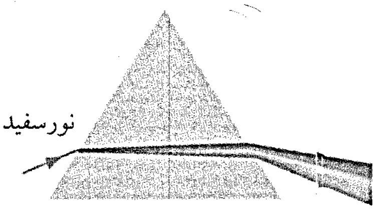
برای آنکه گستردگی رنگی افزایش پیدا کند، می‌توان از یک منشور شیشه‌ای با مقطع مثلثی، مطابق شکل ۳۴ـ۲۱ الف، استفاده کرد. باکاربرد منشور پاشندگی حاصل از سطح اول (سطح سمت چپ شکل ۳۴ـ۲۱ الف، ب) بیش از پیش خود را در سطح دوم نشان می‌دهد.

رنگین کمان زیباترین مظهر پاشندگی رنگی است. وقتی در هوای بارانی نور سفید خورشید به یک قطرهٔ



شکل ۳۴ـ۲۰ نمودار پاشندگی رنگی نور سفید. در شکست نور مؤلفهٔ آبی بیشتر از مؤلفهٔ قرمز خم می‌شود. (الف) در موقع گذر نور از هوا به شیشه، مؤلفهٔ آبی با زاویهٔ شکست کوچکتری عبور می‌کند. (ب) در موقع گذر نور از شیشه به هوا، مؤلفهٔ آبی با زاویهٔ شکست بزرگتری عبور می‌کند.





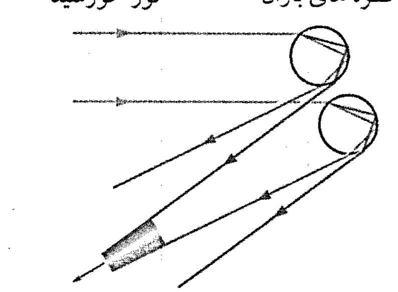
(ب) (الف)

شکل ۳۴ـ۲۱ (الف) منشور شیشه‌ای با مقطع مثلثی نور سفید را به رنگ‌های مؤلفه‌ها گسترده می‌کند. (ب) پاشندگی رنگی حاصل از سطح اول بیش از پیش خود را در سطح دوم نشان می‌دهد.

باران در حال سقوط برخورد می‌کند، بخشی از نور به درون قطره می‌شکند، از روی سطح درونی قطره بازمی‌تابد و سپس به بیرون قطره می‌شکند (شکل ۳۴ـ۲۲). همان‌طور که در مورد منشور گفته شد، شکست نور در سطح اول رنگ‌های مؤلفه‌های نور خورشید را از هم جدا می‌کند و شکست نور در سطح دوم این جداشدگی را افزایش می‌دهد.

رنگین کمانی که مشاهده می‌کنیم از شکست نور به وسیلهٔ تعداد بی‌شماری از قطره‌های باران تشکیل می‌شود؛ در آسمان، نور قرمز مربوط به قطره‌های اندکی بالاتر و نور آبی مربوط به قطره‌های اندکی پایین‌تر



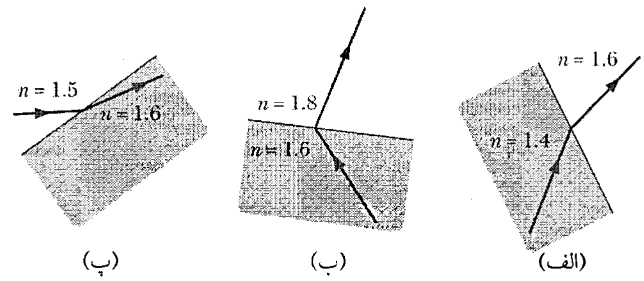


(ب) (الف)

شکل ۳۴ـ۲۲ (الف) رنگین کمان همیشه به صورت کمانی از دایره است که مرکزش روی خط دید ناظر قرار دارد، در حالی که ناظر مستقیماً در برون سوی خورشید نگاه می‌کند. در شرایط عادی باید شانس داشته باشید که بتوانید یک رنگین کمان بزرگ را مشاهده کنید، اما اگر در مکان‌های مرتفع قرار بگیرید ممکن است آن را به صورت یک دایرهٔ کامل ببینید. (ب) در موقع شکست نور خورشید در درون و بیرون قطره‌های باران در حال سقوط، جدا شدن رنگ‌ها از هم منجر به ظاهر شدن رنگین کمان می‌شود. این شکل وضعیت تشکیل شدن رنگین کمان را در حال قرار گرفتن خورشید در افق (یعنی، وقتی که پرتوهای نور خورشید به طور افقی می‌تابند) نشان می‌دهد. در شکل مسیرهای پرتوهای نور قرمز و آبی مربوط به دو قطرهٔ باران نشان داده شده‌اند. بسیاری قطره‌های دیگر، هم در پرتوهای قرمز و آبی و هم در رنگ‌های میانی طیف نور مرئی سهیم‌اند.

است و رنگ‌های میانی به قطره‌های واقع در زاویه‌های میانی مربوط‌اند. تمام قطره‌هایی که رنگ‌های جدا شده را به سمت ناظر می‌فرستند، تحت زاویه‌ای در حدود ۴۲ درجه از نقطه‌ای دیده می‌شوند که در خط دید ناظر به‌طور مستقیم در نقطهٔ مقابل خورشید واقع است. اگر بارش شدید و شفاف باشد، رنگین کمان به صورت یک کمان دایره‌ای رنگی که در آن رنگ قرمز در بالا و رنگ آبی در پایین قرار دارد، دیده می‌شود. رنگین کمانی که هر کسی مشاهده می‌کند مختص خود اوست، چون ناظران دیگر نورهای مربوط به قطره‌های دیگر را دریافت می‌کنند.

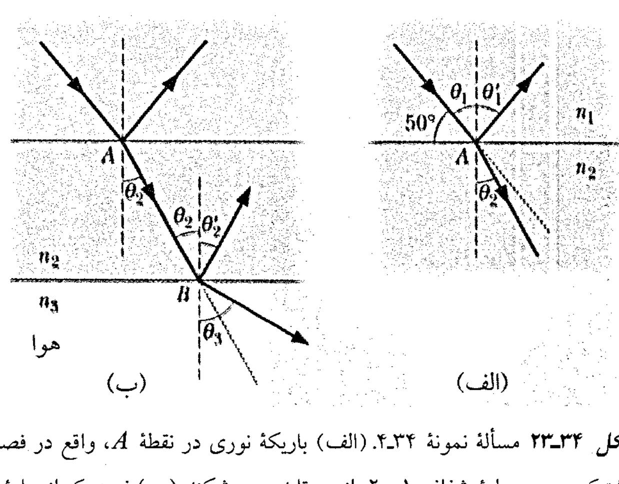
خودآزمایی ۵: در کدام یک از شکل‌های زیر، از نظر فیزیکی، شکست نور امکان‌پذیر است؟



مسألهٔ نمونهٔ ۳۴ـ۴

(الف) در شکل ۳۴ـ۲۳ الف، باریکهٔ نور تکفامی در نقطهٔ A، واقع در فصل مشترک بین دو مادهٔ شفاف، باز می‌تابد و می‌شکند. ضریب شکست مادهٔ ۱ برابر با $n_۱=۱٫۳۳$ و ضریب شکست مادهٔ ۲ برابر با $n_۲=۱٫۷۷$ است. باریکهٔ فرودی با صفحهٔ فصل مشترک زاویهٔ ۵۰ درجه می‌سازد. زاویهٔ بازتاب در نقطهٔ A چیست؟ در این نقطه زاویهٔ شکست چقدر است؟

حل: **نکتهٔ کلیدی** مربوط به بازتاب نور این است که زاویهٔ بازتاب برابر با زاویهٔ تابش است. علاوه بر این، هر دو زاویه بین پرتو نور متناظر و خط عمود بر فصل مشترک در نقطهٔ بازتاب، اندازه‌گیری می‌شوند. در شکل ۳۴ـ۲۳ الف، خط عمود در نقطهٔ A به صورت خط‌چین گذرنده از آن نقطه رسم شده است. توجه کنید که زاویهٔ تابش $\theta_۱$ برابر با ۵۰ درجه نیست، بلکه برابر با



شکل ۳۴ـ۲۳ مسألهٔ نمونهٔ ۳۴ـ۴. (الف) باریکهٔ نوری در نقطهٔ A، واقع در فصل مشترک بین دو مادهٔ شفاف ۱ و ۲ باز می‌تابد و می‌شکند. (ب) نوری که از مادهٔ ۲ می‌گذرد در نقطهٔ B، واقع در فصل مشترک بین دو مادهٔ ۲ و ۳ (هوا) باز می‌تابد و می‌شکند.

$۹۰°-۵۰°=۴۰°$ است. بنابراین، زاویهٔ بازتاب برابر است با:

$$\theta'_۱ = \theta_۱ = ۴۰°$$ **(پاسخ)**

نوری که از مادهٔ ۱ به مادهٔ ۲ وارد می‌شود در نقطهٔ A، واقع در فصل مشترک بین دو ماده، شکست پیدا می‌کند. **نکتهٔ کلیدی** مربوط به شکست نور این است که زاویهٔ تابش، زاویهٔ شکست و ضریب‌های شکست دو ماده را می‌توان از طریق معادلهٔ ۳۴ـ۴۴ به هم ربط داد:

$$n_۲\sin\theta_۲ = n_۱\sin\theta_۱ \qquad (۳۴\text{ـ}۴۶)$$

در اینجا نیز زاویه‌های پرتوهای نور نسبت به خط عمود در نقطهٔ شکست اندازه‌گیری می‌شوند. بنابراین، در شکل ۳۴ـ۲۳ الف، $\theta_۲$ زاویهٔ شکست است. پس از حل کردن معادلهٔ ۳۴ـ۴۶ نسبت به $\theta_۲$، داریم

$$\theta_۲ = \sin^{-۱}\left(\frac{n_۱}{n_۲}\sin\theta_۱\right) = \sin^{-۱}\left(\frac{۱٫۳۳}{۱٫۷۷}\sin ۴۰°\right) \Rightarrow$$

$$\theta_۲ = ۲۸٫۸۸° \approx ۲۹°$$ **(پاسخ)**

این نتیجه نشان می‌دهد که پرتو شکست به سوی خط عمود متمایل می‌شود (چون زاویهٔ تابش نسبت به خط عمود ۴۰ درجه بود، در حالی که اکنون زاویهٔ شکست ۲۹ درجه شده است). دلیل این امر آن است که نور پس از عبور از فصل مشترک به مادهٔ شفافی با ضریب شکست بزرگتر وارد می‌شود.

(ب) باریکهٔ نور پس از ورود به مادهٔ ۲ در نقطهٔ A، مطابق شکل ۳۴ـ۲۳ ب، به نقطهٔ B، واقع در فصل مشترک بین مادهٔ ۲ و مادهٔ ۳، که هواست، می‌رسد. فصل مشترک مربوط به نقطهٔ B با فصل مشترک مربوط به نقطهٔ A موازی است. در نقطهٔ B بخشی از نور باز می‌تابد و بقیه به هوا وارد می‌شود. زاویهٔ بازتاب چقدر است؟ زاویهٔ شکست در هوا چقدر است؟

حل: در آغاز به رابطهٔ میان زاویه‌های مربوط به نقطهٔ B و زاویهٔ معلوم در نقطهٔ A نیاز داریم. چون فصل مشترک مربوط به نقطهٔ B با فصل مشترک

مربوط به‌نقطهٔ A موازی است، زاویهٔ تابش در نقطهٔ B، مطابق شکل ۳۴ـ۲۳ ب، باید برابر با زاویهٔ شکست θ_2 باشد. دربارهٔ بازتاب، از همان **نکتهٔ کلیدی** مربوط به قسمت (الف)، یعنی، قانون بازتاب استفاده می‌کنیم. بنابراین، زاویهٔ بازتاب در نقطهٔ B برابر است با:

$$\theta'_2 = \theta_2 = ۲۸{,}۸۸° \approx ۲۹° \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

اکنون، نور پس از وارد شدن به هوا از مادهٔ ۲ در نقطهٔ B، با زاویهٔ شکست θ_3 شکست پیدا می‌کند. در اینجا نیز **نکتهٔ کلیدی** کاربرد قانون شکست، اما این بار با استفاده از معادلهٔ ۳۴ـ۴۶، است:

$$n_3 \sin\theta_3 = n_2 \sin\theta_2$$

پس از حل کردن معادلهٔ بالا نسبت به θ_3، داریم

$$\theta_3 = \sin^{-1}\left(\frac{n_2}{n_3}\sin\theta_2\right) = \sin^{-1}\left(\frac{۱{,}۷۷}{۱{,}۰۰}\sin ۲۸{,}۸۸°\right) \Rightarrow$$

$$\theta_3 = ۵۸{,}۷۵° \approx ۵۹° \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

این نتیجه نشان می‌دهد که پرتو شکست متمایل به برون سوی خط عمود است (یعنی، زاویهٔ ۲۹ درجه نسبت به خط عمود اکنون ۵۰ درجه است). دلیل این امر آن است که نور پس از عبور از فصل مشترک به مادهٔ شفافی با ضریب شکست پایین‌تر (هوا) وارد می‌شود.

۳۴ـ۸ بازتاب داخلی کلی

شکل ۳۴ـ۲۴، پرتوهای نور تکفامی را نشان می‌دهد که از چشمهٔ نور نقطه‌ای S، واقع در شیشه، به فصل مشترک بین شیشه و هوا تابیده‌اند. بخشی از پرتو a، که بر فصل مشترک عمود است، از صفحهٔ فصل مشترک باز می‌تابد و بقیه بدون تغییر راستا از این صفحه عبور می‌کند.

پرتوهای b تا e، که زاویه‌های تابش مربوط به آنها به تدریج افزایش می‌یابند، در فصل مشترک، هم باز می‌تابند و هم شکست پیدا می‌کنند. با افزایش یافتن زاویهٔ تابش زاویهٔ شکست زیاد می‌شود. برای پرتو e زاویهٔ شکست ۹۰ درجه است، که به معنای منطبق شدن پرتو شکست بر فصل مشترک است. زاویهٔ تابشی که به ازای آن چنین شرایطی به وجود می‌آید، **زاویهٔ بحرانی (زاویهٔ حد)**، θ_c، نامیده می‌شود. پرتوهای با زاویه‌های تابش بزرگتر از θ_c، مانند پرتوهای f و g، شکست پیدا نمی‌کنند و همهٔ آنها از فصل مشترک باز می‌تابند. این پدیده را **بازتاب داخلی کلی (بازتاب کلی)** می‌نامند.

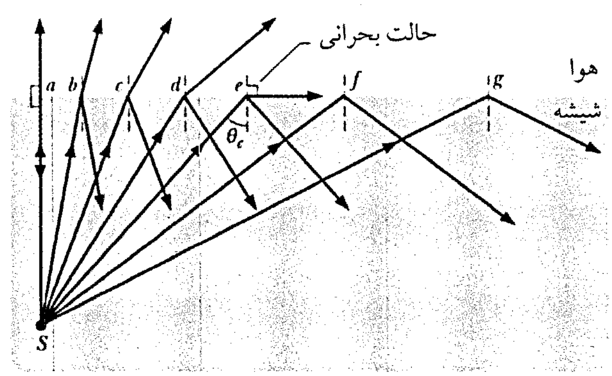
برای تعیین θ_c از معادلهٔ ۳۴ـ۴۴ استفاده می‌کنیم. اگر شیشه را با شاخص پایین ۱ و هوا را با شاخص پایین ۲ مشخص کنیم، با جانشانی θ_1 با θ_c و θ_2 با ۹۰ درجه، داریم

$$n_1 \sin\theta_c = n_2 \sin ۹۰°$$

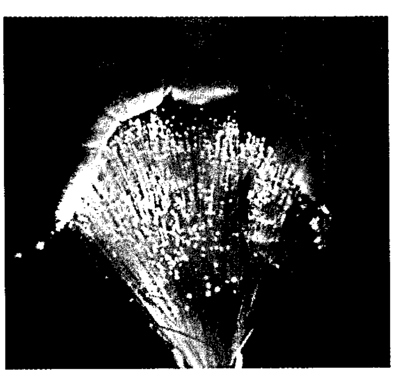
و از آنجا، خواهیم داشت

$$\theta_c = \sin^{-1}\frac{n_2}{n_1} \qquad \text{(زاویهٔ بحرانی)} \qquad (۳۴\text{ـ}۴۷)$$ ■

چون سینوس یک زاویه نمی‌تواند از ۱ تجاوز کند، در این معادله n_2 نمی‌تواند از n_1 بیشتر شود. بر پایهٔ این محدودیت وقتی پرتو نور تابش، در محیط با ضریب شکست پایین‌تر است، بازتاب داخلی کلی نمی‌تواند رخ



شکل ۳۴ـ۲۴ نمایش بازتاب داخلی کلی حاصل از چشمهٔ نقطه‌ای S در شیشه، که برای تمام زاویه‌های تابش بزرگتر از زاویهٔ بحرانی (زاویهٔ حد) θ_c رخ داده است. به ازای زاویهٔ بحرانی، پرتو شکست بر فصل مشترک هوا ـ شیشه منطبق می‌شود.



شکل ۳۴ـ۲۵ نور فرستاده شده از یک سر تارهای نوری نشان داده شده در این شکل، با اندکی اتلاف در کناره‌های تارها، به سر دیگر گسیل می‌شود.

بدهد. هرگاه چشمهٔ نور S در شکل ۳۴ـ۲۴، در هوا قرار داشته باشد همهٔ پرتوهایی که به فصل مشترک هوا ـ شیشه می‌تابند (از جمله پرتوهای f و g) هم باز می‌تابند و هم شکست پیدا می‌کنند.

پدیدهٔ بازتاب داخلی کلی در فناوری پزشکی کاربردهای فراوان دارد. به عنوان مثال، یک پزشک با فرستادن دو دستهٔ نازک تارهای نوری (شکل ۳۴ـ۲۵) از طریق حلق به درون معدهٔ یک مریض، می‌تواند زخم معدهٔ مریض را معاینه کند. نور فرستاده شده از سر بیرونی یکی از دو دسته تار نوری (فیبرنوری) در درون تارها بارها بازتاب داخلی کلی پیدا می‌کند. در این حالت، حتی اگر دستهٔ تار نوری هم خم شود بخش بزرگی از نور از سر دیگر تارها خارج می‌شود و داخل معدهٔ مریض را روشن می‌کند. بخشی از نور از معده باز می‌تابد و از طریق دستهٔ دوم تارهای نوری به همان روش بازتاب داخلی کلی بر می‌گردد. این نور پس از آشکار شدن، در روی صفحهٔ نمایشگر به تصویری تبدیل می‌شود که مورد مطالعهٔ پزشک قرار می‌گیرد.

مسألهٔ نمونهٔ ۳۴ـ۵

شکل ۳۴ـ۲۶، یک منشور شیشه‌ای با مقطع مثلث راستگوشه را که در هوا قرار دارد نشان می‌دهد. پرتو نوری به طور عمود به یکی از وجه‌های منشور می‌تابد و مطابق شکل، در فصل مشترک شیشه ـ هوا بازتاب کلی پیدا می‌کند. اگر زاویهٔ θ_1 برابر با ۴۵ درجه باشد، دربارهٔ n، ضریب شکست شیشه چه می‌توان گفت؟

حل: در اینجا یک **نکتهٔ کلیدی** این است که چون پرتو نور در فصل مشترک دو محیط بازتاب کلی پیدا می‌کند، در این حالت زاویهٔ بحرانی θ_c باید کوچکتر از زاویهٔ تابش ۴۵ درجه باشد. **نکتهٔ کلیدی** دیگر این است که ضریب شکست شیشه n، را می‌توان از طریق قانون شکست، طبق معادلهٔ ۳۴ـ۴۷، به θ_c ربط داد. با جانشانی $n_2=1$ (برای هوا) و $n_1=n$ (برای شیشه) در آن معادله، داریم

$$\theta_c = \sin^{-1}\frac{n_2}{n_1} = \sin^{-1}\frac{1}{n}$$

چون θ_c باید کوچکتر از زاویهٔ تابش ۴۵ درجه باشد، می‌توان نوشت

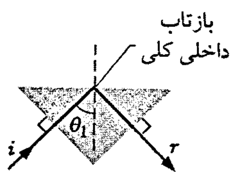
$$\sin^{-1}\frac{1}{n} < 45°$$

در نتیجه، داریم

$$\frac{1}{n} < \sin 45° \quad \Rightarrow$$

$$n > \frac{1}{\sin 45°} = 1{,}4 \qquad \text{(پاسخ)}$$

پس، ضریب شکست شیشه باید بزرگتر از ۱٫۴ باشد؛ به عبارت دیگر، در مورد پرتو تابش نشان داده شده در شکل، بازتاب داخلی کلی صورت نمی‌گیرد.



شکل ۳۴ـ۲۶ مسألهٔ نمونهٔ ۳۴ـ۵. پرتو تابش i در فصل مشترک شیشه ـ هوا بازتاب داخلی کلی پیدا می‌کند و پرتو r بازتابیده می‌شود.

> **خودآزمایی ۶:** فرض کنید ضریب شکست منشور مربوط به این مسألهٔ نمونه برابر است با $n=1{,}4$. اگر پرتو تابش را افقی نگه داریم، اما منشور را به اندازهٔ (الف) ۱۰ درجه به طور ساعتگرد و (ب) ۱۰ درجه به‌طور پادساعتگرد، بچرخانیم، آیا باز هم بازتاب داخلی کلی صورت می‌گیرد؟

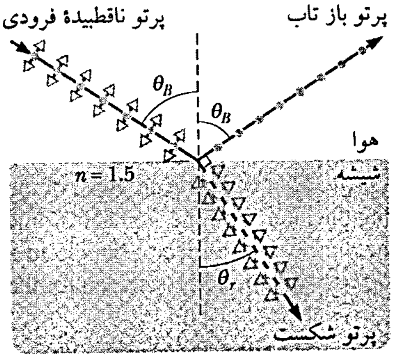
۳۴ـ۹ قطبش نور در اثر بازتاب

شدت درخشش نوری که از بازتاب نور خورشید، مثلاً از سطح آب، به چشم شما می‌رسد، با نگاه کردن از طریق یک ورقهٔ قطبنده (نظیر عدسی عینک قطبنده) و چرخاندن محور قطبندهٔ ورقه حول خط دید، می‌تواند تغییر کند. این کار بدین جهت می‌تواند انجام شود که نور بازتابیده از سطح آب به طور کامل، یا به طور نسبی، قطبیده است.

شکل ۳۴ـ۲۷، پرتو نور ناقطبیده‌ای را نشان می‌دهد که به سطح شیشه تابیده است. بردارهای میدان الکتریکی نور را به دو مؤلفه تجزیه می‌کنیم. **مؤلفه‌های عمودی**، بر صفحهٔ تابش و نیز بر صفحهٔ شکل ۳۴ـ۲۷، عمودند؛ این مؤلفه‌ها با خال سفید (به نشانهٔ نوک پیکان بردارها) نمایش داده شده‌اند. **مؤلفه‌های موازی**، با صفحهٔ تابش و با صفحهٔ شکل موازی‌اند؛ این مؤلفه‌ها را پیکان‌های دو سر نمایش می‌دهند. چون نور ناقطبیده است بزرگی‌های این دو مؤلفه با هم برابرند.

به طور کلی، نور بازتابیده هم شامل همین دو مؤلفه، اما با بزرگی‌های نامساوی، است. به این معنا که نور بازتابیده قطبیدهٔ نسبی است و میدان‌های الکتریکی در یک راستا نسبت به راستای دیگر با دامنه‌های بزرگتری نوسان می‌کنند. اما هرگاه نور تحت زاویهٔ خاصی، به نام **زاویهٔ بروستر** θ_B، بتابد نور بازتابیده، مطابق شکل ۳۴-۲۷، فقط شامل مؤلفه‌های عمودی خواهد بود. در این صورت، نور بازتابیده کاملاً قطبیده و عمود بر صفحهٔ تابش است. مؤلفه‌های موازی نور تابشی از میان نمی‌روند، بلکه به درون شیشه (همراه با مؤلفه‌های عمودی) شکست پیدا می‌کنند.

شیشه، آب و مواد دی‌الکتریک مورد بحث در فصل ۲۶-۷، می‌توانند در اثر بازتاب نور را به طور نسبی و کامل قطبیده کنند. وقتی به نور خورشید بازتابیده از سطح این مواد نگاه می‌کنید در محل باز تابیدن نور خال درخشنده‌ای می‌بینید. اگر، مطابق شکل ۳۴-۲۷، سطح افقی باشد نور بازتابیده به طور افقی قطبیدهٔ نسبی یا کامل است. برای حذف کردن این درخشندگی از سطح‌های افقی شیشه‌های عینک قطبنده را طوری سوار می‌کنند که راستای قطبندهٔ آنها به صورت قائم باشد.



شکل ۳۴-۲۷ یک پرتو ناقطبیده تحت زاویهٔ بروستر θ_B، در هوا به سطح شیشه می‌تابد. بردارهای میدان‌های الکتریکی مربوط به این پرتو به مؤلفه‌های عمود بر صفحهٔ شکل (یعنی، صفحهٔ تابش، بازتاب و شکست) و موازی با این صفحه، تجزیه شده‌اند. نور بازتابیده فقط شامل مؤلفه‌های عمود بر صفحهٔ شکل است و در نتیجه، در راستای این مؤلفه‌ها قطبیده است. نور شکسته شامل مؤلفه‌های اصلی موازی با صفحهٔ شکل و مؤلفه‌های ضعیفی به طور عمود بر صفحه است؛ این نور به‌طور نسبی قطبیده است.

قانون بروستر

به طور تجربی معلوم شده است که هرگاه نوری تحت زاویهٔ بروستر θ_B، به سطحی بتابد پرتوهای بازتاب و شکست برهم عمودند. چون، مطابق شکل ۳۴-۲۷، زاویهٔ بازتاب همان زاویهٔ بروستر θ_B، و زاویهٔ شکست برابر با θ_r است، می‌توان نوشت

$$\theta_B + \theta_r = ۹۰^\circ \qquad (۳۴\text{-}۴۸)$$

این دو زاویه را از طریق معادلهٔ ۳۴-۴۴ هم می‌توان به هم ربط داد. در معادلهٔ ۳۴-۴۴، شاخص پایین ۱ را به اختیار می‌توان به محیطی نسبت داد که پرتوهای تابش و بازتاب در آن قرار دارند. در این صورت، داریم

$$n_۱ \sin\theta_B = n_۲ \sin\theta_r$$

نتیجهٔ ترکیب دو معادلهٔ بالا چنین است:

$$n_۱ \sin\theta_B = n_۲ \sin(۹۰^\circ - \theta_B) = n_۲ \cos\theta_B$$

و از آنجا، داریم

$$\theta_B = \tan^{-۱} \frac{n_۲}{n_۱} \qquad \text{(زاویهٔ بروستر)} \qquad (۳۴\text{-}۴۹)$$ ■

(توجه کنید که در معادلهٔ ۳۴-۴۹ شاخص‌های پایین اختیاری نیستند، زیرا این شاخص‌ها با توجه به معنی‌شان نوشته شده‌اند). هرگاه پرتوهای تابش و بازتاب در هوا قرار داشته باشند، می‌توان $n_۱$ را تقریباً برابر با ۱ در نظر گرفت و $n_۲$ را با n نمایش داد. در این صورت، معادلهٔ ۳۴-۳۹ چنین نوشته می‌شود:

$$\theta_B = \tan^{-۱} n \qquad \text{(قانون بروستر)} \qquad (۳۴\text{-}۵۰)$$

شکل سادهٔ شدهٔ معادلهٔ ۳۴-۴۹ بیان کنندهٔ **قانون بروستر** است. این قانون هم مانند زاویهٔ بروستر θ_B، به نام **دیوید بروستر**[1] نامیده شده است، که او هر دو را در سال ۱۸۱۲/۱۱۹۱ به طور تجربی پیدا کرد.

مرور و خلاصهٔ مطالب فصل

موجهای الکترومغناطیسی یک موج الکترومغناطیسی شامل میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی نوسان کننده است. بسامدهای ممکن و گوناگون موجهای الکترومغناطیسی یک طیف تشکیل می‌دهند، که بخش کوچکی از آن مربوط به نور مرئی است. موج الکترومغناطیسی پیشرونده در طول محور x دارای میدان الکتریکی $\vec{E}$ و میدان مغناطیسی $\vec{B}$ است، که بزرگی‌های این میدان‌ها به x و t بستگی دارند:

$$E = E_m \sin(kx - \omega t) \qquad (۳۴\text{-}۱)$$

$$B = B_m \sin(kx - \omega t) \qquad (۳۴\text{-}۲)$$

در این معادله‌ها E_m و B_m دامنه‌های $\vec{E}$ و $\vec{B}$ هستند. میدان الکتریکی میدان مغناطیسی را به وجود می‌آورد و میدان مغناطیسی میدان الکتریکی را ایجاد

1. Sir David Brewster

می‌کند. تندی موج الکترومغناطیسی در خلاء c است، که چنین به دست می‌آید:

$$c = \frac{E}{B} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \qquad (۳-۳۴ \text{ ، } ۵-۳۴)$$

در اینجا E و B مقادیر همزمان میدان‌ها هستند.

شارش انرژی آهنگ انتقال انرژی در یکای سطح از طریق موج الکترومغناطیسی از بردار پوئین تینگ $\vec{S}$، به دست می‌آید:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \qquad (۱۹-۳۴)$$

راستای بردار $\vec{S}$ (و در نتیجه راستای پیشروی و انتقال انرژی موج) بر راستاهای هر دو بردار $\vec{E}$ و $\vec{B}$ عمود است. میانگین زمانی آهنگ انتقال انرژی در یکای سطح با S_{avg} نمایش داده می‌شود که **شدت موج** I، نام دارد و برابر است با:

$$I = \frac{1}{c\mu_0} E_{rms}^2 \qquad (۲۶-۳۴)$$

در این معادله، داریم $E_{rms} = E_m / \sqrt{2}$. چشمهٔ نقطه‌ای موجهای الکترومغناطیسی موجها را به طور همسانگرد، یعنی با شدت یکسان در تمام جهت‌ها، گسیل می‌کند. شدت موجها در فاصلهٔ r از یک چشمهٔ نقطه‌ای با توان P_s برابر است با:

$$I = \frac{P_s}{4\pi r^2} \qquad (۲۷-۳۴)$$

فشار تابشی وقتی موجهای الکترومغناطیسی به سطحی می‌تابند، این سطح تحت اثر نیرو و فشار قرار می‌گیرد. اگر این تابش به طور کامل توسط سطح جذب شود نیروی وارد شده از معادلهٔ زیر به دست می‌آید

$$F = \frac{IA}{c} \qquad \text{(جذب کامل)} \qquad (۳۲-۳۴)$$

که در آن I شدت تابش و A مساحت سطح در حال عمود بر راستای تابش است. هرگاه تابش بر روی مسیر اولی به طور کامل بازتابیده شود نیرو برابر است با:

$$F = \frac{2IA}{c} \qquad \text{(بازتاب کامل بر روی مسیر اولی)} \qquad (۳۳-۳۴)$$

فشار تابشی p_r، برابر با نیرو در یکای سطح است:

$$p_r = \frac{I}{c} \qquad \text{(جذب کامل)} \qquad (۳۴-۳۴)$$

$$p_r = \frac{2I}{c} \qquad \text{(بازتاب کامل بر روی مسیر اولی)} \qquad (۳۵-۳۴)$$

قطبش نور موجهای الکترومغناطیسی وقتی **قطبیده** هستند که بردارهای میدان الکتریکی آنها همه در یک صفحه به نام صفحهٔ نوسان واقع شده باشند. موجهای نور حاصل از چشمه‌های نور عادی قطبیده نیستند، به عبارت دیگر، این موجها **ناقطبیده** یا **قطبیدهٔ کاتوره‌ای** هستند.

ورقه‌های قطبنده هرگاه یک ورقهٔ قطبنده در مسیر نور قرار گیرد، فقط مؤلفه‌های میدان الکتریکی نور که با **راستای قطبندهٔ** ورقه موازی‌اند از ورقه می‌گذرند و مؤلفه‌های عمود بر راستای قطبنده جذب می‌شوند. نوری که از ورقهٔ قطبنده تراگسیل می‌شود به طور موازی با راستای قطبندهٔ ورقه قطبیده است.

اگر نور اصلی در آغاز ناقطبیده باشد، شدت نور تراگسیل شده نصف شدت اصلی I_0 است:

$$I = \frac{1}{2} I_0 \qquad (۴۰-۳۴)$$

هرگاه نور اصلی در آغاز قطبیده باشد، شدت نور تراگسیل شده به θ، زاویهٔ میان راستای قطبندهٔ نور اصلی و راستای قطبندهٔ ورقه بستگی دارد:

$$I = I_0 \cos^2\theta \qquad (۴۲-۳۴)$$

اپتیک هندسی اپتیک هندسی یک برداشت تقریبی از خاصیت نور است که در آن موجهای نوری به صورت پرتوهای راستخط نمایش داده می‌شوند.

بازتاب و شکست نور هرگاه پرتو نوری به مرز مشترک میان دو محیط شفاف برخورد کند، به طور کلی، یک **پرتو بازتاب** و یک **پرتو شکست** ظاهر می‌شود، که هر دو پرتو در صفحهٔ تابش قرار دارند. **زاویهٔ بازتاب** برابر با زاویهٔ تابش است و **زاویهٔ شکست** از طریق معادلهٔ زیر با زاویهٔ تابش رابطه دارد:

$$n_2 \sin\theta_2 = n_1 \sin\theta_1 \qquad \text{(شکست)} \qquad (۴۴-۳۴)$$

در این معادله n_1 و n_2 ضریب‌های شکست مربوط به محیط‌هایی هستند که در آنها پرتوهای تابش و شکست انتشار می‌یابند.

بازتاب داخلی کلی موجی که در عبور از فصل مشترک دو محیط با کاهش ضریب شکست مواجه شود، به شرطی بازتاب داخلی کلی پیدا می‌کند که زاویهٔ تابش از زاویهٔ بحرانی (زاویهٔ حد) θ_c تجاوز کند:

$$\theta_c = \sin^{-1}\frac{n_2}{n_1} \qquad \text{(زاویهٔ بحرانی)} \qquad (۴۷-۳۴)$$

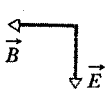
قطبش نور در اثر بازتاب نور بازتابیده از یک سطح وقتی به طور کامل **قطبیده** است و بردارهای میدان الکتریکی $\vec{E}$ بر صفحهٔ تابش عمودند، که تحت **زاویهٔ بروستر** θ_B به سطح برخورد کند:

$$\theta_B = \tan^{-1}\frac{n_2}{n_1} \qquad \text{(زاویهٔ بروستر)} \qquad (۴۹-۳۴)$$

پرسش‌ها

۱. اگر میدان مغناطیسی یک موج نوری در راستای موازی با محور y و با معادلهٔ $y = y_m \sin(kz - \omega t)$ نوسان کند، (الف) این موج در چه جهتی پیش می‌رود، و (ب) میدان الکتریکی مربوط در راستای چه محوری نوسان می‌کند؟

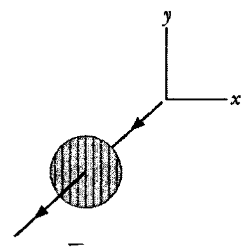
۲. شکل ۳۴-۲۸، بردارهای میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی یک موج



شکل ۳۴-۲۸ پرسش ۲.

الکترومغناطیسی را در لحظهٔ معینی نشان می‌دهد. آیا این موج در درون سوی صفحهٔ شکل پیش می‌رود یا در برون سوی صفحه؟

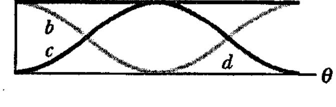
۳. (الف) شکل ۳۴-۲۹، پرتو نوری را نشان می‌دهد که به یک ورقهٔ قطبنده نزدیک می‌شود. راستای قطبندهٔ ورقه موازی با محور y است. ورقه را به اندازهٔ ۴۰ درجه به دور خط سیر نور به طور ساعتگرد می‌چرخانیم. در حین چرخاندن ورقه، آیا شدت نور گذرنده از ورقه نسبت به شدت نور اصلی در حالت‌هایی که نور (الف) در آغاز ناقطبیده باشد، (ب) در آغاز موازی با محور x قطبیده باشد، و (پ) در آغاز موازی با محور y قطبیده باشد، افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد، یا به همان مقدار باقی می‌ماند؟



شکل ۳۴-۲۹ پرسش ۳.

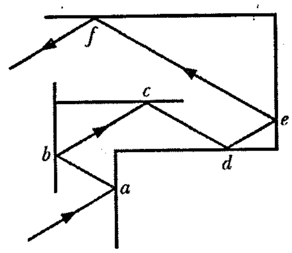
۴. در شکل ۳۴-۱۶ الف، پرتو نوری را که در آغاز موازی با محور x قطبیده است در نظر بگیرید و نسبت شدت نور نهایی I_3، به شدت نور اصلی I_0، را به صورت $I_3/I_0=A\cos^n\theta$ بنویسید. A، n و θ را در شرایطی معین کنید که راستای قطبندهٔ ورقهٔ اول را، (الف) به اندازهٔ ۶۰ درجه به طور پادساعتگرد، و (ب) به اندازهٔ ۹۰ درجه به طور ساعتگرد، نسبت به وضعیت نشان داده شده در شکل، بچرخانیم.

۵. فرض کنید در شکل ۳۴-۱۶ الف، ورقهٔ دوم را می‌چرخانیم. این کار را از موازی کردن راستای قطبندهٔ ورقه با محور y ($\theta=0$) آغاز می‌کنیم و با موازی کردن راستای قطبنده با محور x ($\theta=90^\circ$) به پایان می‌بریم. کدام یک از سه منحنی شکل ۳۴-۳۰، تغییرات شدت نور گذرنده از سیستم سه ورقه‌ای را در حین این چرخش ۹۰ درجه‌ای به خوبی نشان می‌دهند؟



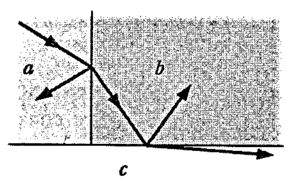
شکل ۳۴-۳۰ پرسش ۵.

۶. شکل ۳۴-۳۱، بازتاب‌های پی در پی پرتو نوری را در یک راهرو شیشه‌ای با دیوارهای موازی، یا عمود برهم، نشان می‌دهد. اگر زاویهٔ تابش در نقطهٔ a برابر با ۳۰ درجه باشد، زاویه‌های بازتاب پرتو نور را در نقطه‌های b، c، d، e و f، معین کنید.



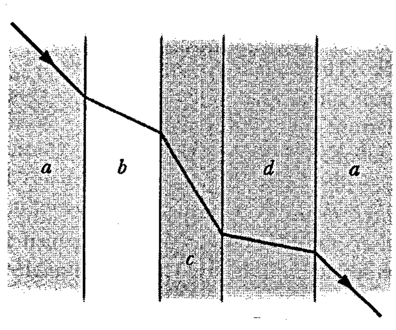
شکل ۳۴-۳۱ پرسش ۶.

۷. شکل ۳۴-۳۲، پرتوهای نور تکفام را در حال عبور از سه مادهٔ a، b و c نشان می‌دهد. این مواد را با توجه به ضریب شکست آنها، از بزرگترین تا کوچکترین مقدار، مرتب کنید.



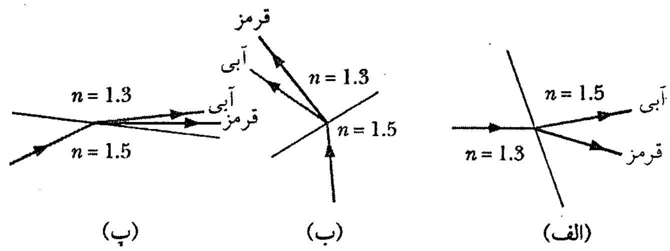
شکل ۳۴-۳۲ پرسش ۷.

۸. در شکل ۳۴-۳۳، پرتو نوری از مادهٔ a می‌آید، از سه لایهٔ با سطح‌های موازی هم از مواد دیگر می‌گذرد و سرانجام به لایهٔ دیگری از مادهٔ a می‌رسد. در شکل، وضعیت شکست‌های نور (و نه بازتاب‌های مربوط) در سطح‌ها نشان داده شده است. این مواد را با توجه به ضریب شکست آنها، از بزرگترین تا کوچکترین مقدار، مرتب کنید.

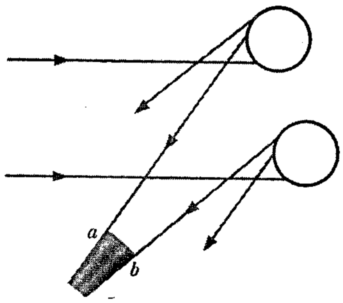


شکل ۳۴-۳۳ پرسش ۸.

۹. هر قسمت از شکل ۳۴-۳۴، نوری را نشان می‌دهد که در فصل مشترک بین دو ماده می‌شکنند. پرتو تابش (پرتو خاکستری در شکل) شامل نورهای قرمز و آبی است. ضریب شکست تقریبی مربوط به نور مرئی در هر یک از مواد روی شکل نوشته شده است. کدام یک از سه قسمت، شکست نور ممکن را به طور فیزیکی نشان می‌دهند؟

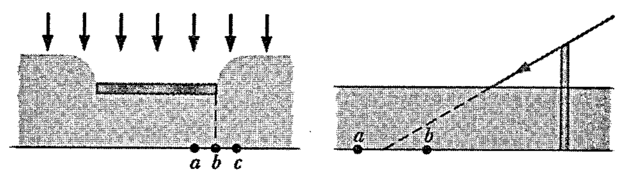


شکل ۳۴-۳۴ پرسش ۹.



شکل ۳۴-۳۶ پرسش ۱۱.

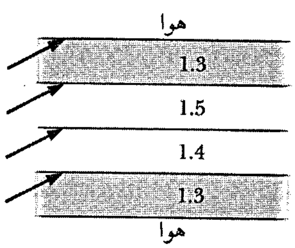
۱۰. (الف) شکل ۳۴-۳۵ الف، پرتوی از نور خورشید را نشان می‌دهد که درست از نوک یک چوب قائم واقع در یک حوض آب گذشته است. آیا این پرتو نور به ناحیهٔ عمومی نقطهٔ a برخورد می‌کند یا نقطهٔ b؟ (ب) کدام یک از مؤلفه‌های قرمز یا آبی نور نزدیک‌تر نسبت به چوب به کف حوض برخورد می‌کنند؟ (پ) شکل ۳۴-۳۵ ب، شیء تختی (مانند یک تیغ نازک دو لبه) را نشان می‌دهد که در روی سطح آب کم‌عمق شناور است و به طور قائم به آن نور می‌تابد. نیروی گرانشی وارد بر شیء و چسبندگی آب سبب می‌شود که سطح آب، مطابق شکل، خمیدگی پیدا کند. در کدام ناحیهٔ عمومی (a، b یا c) لبهٔ سایهٔ شیء قرار دارد؟ (در سمت راست لبهٔ سایه بسیاری از پرتوهای نور خورشید متمرکز می‌شوند و ناحیهٔ روشن خاصی به وجود می‌آورند، که ناحیهٔ سوزان گفته می‌شود).



شکل ۳۴-۳۵ پرسش ۱۰.

۱۱. شکل ۳۴-۲۲، چند پرتو نور خورشید به وجود آورندهٔ رنگین کمان اولی را (که مربوط به یک بار بازتاب در درون هر قطرهٔ باران است) نشان می‌دهد. در بالای رنگین کمان اولی، یک رنگین کمان ثانوی (مربوط به دو بار بازتاب در درون هر قطرهٔ باران) هم که ضعیف‌تر است و به ندرت دیده می‌شود، می‌تواند ظاهر شود. این رنگین کمان به وسیله پرتوهای وارد شده به قطره‌های باران و خارج شده از آنها، مطابق شکل ۳۴-۳۶، تشکیل می‌شود. کدام پرتو، a یا b، متناظر با رنگ قرمز نور است؟

۱۲. شکل ۳۴-۳۷، چهار لایهٔ افقی از مواد مختلف را نشان می‌دهد که در بالا و پایین آنها هوا قرار دارد و ضریب شکست‌های مواد در روی شکل نوشته شده‌اند. پرتوهای نور، مطابق شکل، از انتهای سمت چپ به این لایه‌ها می‌تابند. در کدام لایه (که با ضریب شکست مشخص می‌شود) این امکان وجود دارد که نور کاملاً به دام بیفتد، یعنی، تمام نور پس از چندین بار بازتاب به انتهای سمت راست لایه برسد؟



شکل ۳۴-۳۷ پرسش ۱۲.

تمرین‌ها و مسأله‌ها

بخش ۳۴-۱ رنگین کمان ماکسول

۱ ت. (الف) چه مدت طول می‌کشد تا یک علامت رادیویی فاصلهٔ ۱۵۰ کیلومتری میان آنتن فرستنده تا آنتن گیرنده را بپیماید؟ (ب) ما قرص کامل ماه را در اثر بازتاب نور خورشید می‌بینیم. این نور پیش از رسیدن به چشم ما از خورشید گسیل شده است؟ فاصلهٔ زمین ـ ماه km ۱۰^۵×۳٫۸ و فاصلهٔ زمین ـ خورشید km ۱۰^۸×۱٫۵ است. (پ) زمان رفت و برگشت نور بین زمین و یک سفینهٔ فضایی در حال گردش به دور سیارهٔ زحل چقدر است؟ فاصلهٔ زمین ـ زحل km ۱۰^۹×۱٫۳ است. (ت) گمان بر این است که ابر خرچنگی[1]، در فاصلهٔ ۶۵۰۰ سال نوری از زمین، در اثر انفجار یک اَبَر نواختر[2] ثبت شده توسط ستاره‌شناسان چینی در سال ۱۰۵۴ میلادی به وجود آمده باشد. این انفجار تقریباً در چه سالی رخ داده است؟

۲ ت. یکی از طرح‌های دریانوردی، برنامهٔ جاه طلبانه‌ای برای ساختن آنتن عظیمی در زیر زمین و در پایگاهی به مساحت تقریبی km^2 ۱۰۰۰۰ است. هدف اجرای این طرح فرستادن علامت‌ها به زیردریایی‌هایی است که در عمق زیاد واقع‌اند. اگر طول موج مؤثر علامت ها ۱۰^۴×۱٫۰ برابر شعاع

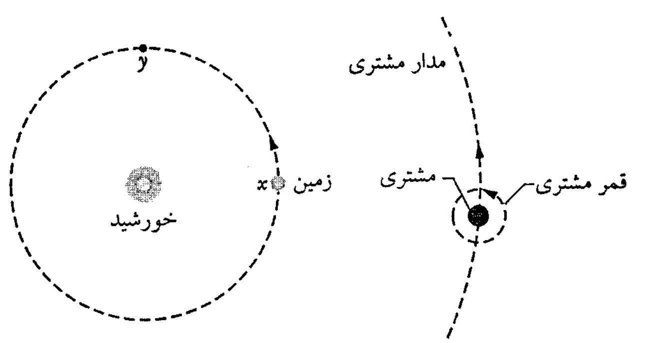
1. Crabnebula 2. supernova

زمین باشد، مطلوب است تعیین (الف) بسامد، و (ب) دورهٔ تناوب تابش‌های گسیل شده. معمولاً، تابش‌های الکترومغناطیسی در مواد رسانایی مانند آب دریا، خیلی نفوذ نمی‌کنند.

۳ ت. (الف) در چه طول موجهایی حساسیت یک چشم سالم نصف حساسیت بیشینه است؟ (ب) طول موج، بسامد و دورهٔ تناوب نوری که چشم به آن بیشترین حساسیت را دارد، چیست؟

۴ ت. یک لیزر هلیوم ـ نئون نور قرمز را در نوار باریکی از طول موجها به مرکز طول موج ۶۳۲ر۸ nm و با «پهنای طول موج» ۰ر۰۱۰ nm (طبق مقیاس شکل ۳۴ـ۱) گسیل می‌کند. «پهنای بسامد» متناظر با این گسیل چقدر است؟

۵ م. یکی از روش‌های اندازه‌گیری تندی نور، مبتنی بر مشاهده‌های **رومر**[1] در سال ۱۶۷۶/۱۰۵۵ است. این روش شامل مشاهدهٔ زمان‌های ظاهری دوران یکی از قمرهای سیارهٔ مشتری بود. دورهٔ تناوب واقعی دوران این قمر ۴۲ر۵ ساعت است. (الف) با در نظر گرفتن تندی متناهی نور، اگر در شکل ۳۴ـ۳۸، زمین در روی مدار حرکتش از نقطهٔ x به نقطهٔ y برود، انتظار دارید زمان ظاهری یک دوران چگونه تغییر کند؟ (ب) برای محاسبهٔ تندی نور چه مشاهده‌هایی لازم است؟ از حرکت سیارهٔ مشتری در روی مدارش چشم‌پوشی کنید. شکل ۳۴ـ۳۸ به مقیاس رسم نشده است.



شکل ۳۴ـ۳۸ مسألهٔ ۵.

بخش ۳۴ـ۲ موج الکترومغناطیسی پیشرونده، مطالعهٔ کیفی

۶ ت. طول موج، موج الکترومغناطیسی گسیل شده توسط سیستم نوسانگر ـ آنتن شکل ۳۴ـ۳، به ازای $L=0.253\,\mu H$ و $C=25.0\,pF$، چقدر است؟

۷ ت. برای ساختن یک نوسانگر مولد موجهای الکترومغناطیسی با طول موج ۵۵۰ nm (طول موج نور مرئی) چه القاگری باید به یک خازن ۱۷ پیکوفارادی وصل شود؟

بخش ۳۴ـ۳ موج الکترومغناطیسی پیشرونده، مطالعهٔ کمّی

۸ ت. مقدار بیشینهٔ میدان الکتریکی یک موج الکترومغناطیسی تخت 3.20×10^{-4} V/m است. مقدار بیشینهٔ میدان مغناطیسی را پیدا کنید.

۹ ت. مؤلفه‌های میدان الکتریکی یک موج الکترومغناطیسی تخت عبارت‌اند از: $E_x=0$، $E_y=0$ و $E_z=2.0\cos[\pi\times10^{15}(t-x/c)]$، که در آن $c=3.0\times10^8$ m/s. تمام کمیت‌ها دارای یکاهای SI هستند. این موج در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند. رابطه‌های مربوط به مؤلفه‌های میدان مغناطیسی این موج را بنویسید.

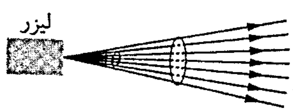
بخش ۳۴ـ۴ انتقال انرژی و بردار پوئین تینگ

۱۰ ت. با تعیین جهت بردار پوئین تینگ $\vec{S}$، نشان دهید که جهت‌های میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی در تمام نقطه‌ها در شکل‌های ۳۴ـ۴ تا ۳۴ـ۷ و در تمام زمان‌ها با جهت‌های انتشار فرض شده سازگارند.

۱۱ ت. برخی لیزرهای نئودیمیوم ـ شیشه می‌توانند توانی به اندازهٔ ۱۰۰ TW به صورت تپ‌های ۱ر۰ ns و در طول موج ۰ر۲۶ μm تولید کنند. انرژی موجود در یک تپ چقدر است؟

۱۲ ت. فاصلهٔ نزدیکترین ستاره (پروکزیما قنطوروس)[2] از زمین ۴ر۳ سال نوری است. گمان می‌رود که برنامه‌های تلویزیونی از سیارهٔ زمین به این ستاره رسیده و شاید هم به وسیلهٔ ساکنان فرضی یک سیارهٔ فرضی در حال دوران به دور این ستاره، مشاهده شده باشند. فرض کنید توان یک ایستگاه تلویزیونی در روی زمین ۱ر۰ MW است. شدت علامت تلویزیونی در این ستاره چقدر است؟

۱۳ ت. تابش گسیل شده توسط یک لیزر به شکل مخروط باریکی با مقطع دایره‌ای گسترده می‌شود. زاویهٔ مخروط θ (شکل ۳۴ـ۳۹) را تمام ـ زاویهٔ واگرایی باریکهٔ نور می‌نامند. در یک آزمایش مسافت‌یابی، لیزر آرگون که در طول موج ۵۱۴ر۵ nm تابش می‌کند، به طرف ماه نشانه‌گیری شده است. اگر تمام ـ زاویهٔ واگرایی باریکه ۰ر۸۸۰ μrad باشد، چه سطحی از ماه به وسیلهٔ این لیزر روشن می‌شود؟



شکل ۳۴ـ۳۹ تمرین ۱۳.

۱۴ ت. شدت یک موج الکترومغناطیسی پیشروندهٔ تخت به ازای $B_m=1.0\times10^{-4}$ T چقدر است؟

۱۵ ت. در یک موج رادیویی تخت مقدار بیشینهٔ مؤلفهٔ میدان الکتریکی ۵ر۰۰ V/m است. مطلوب است محاسبهٔ (الف) مقدار بیشینهٔ مؤلفهٔ میدان مغناطیسی و (ب) شدت موج.

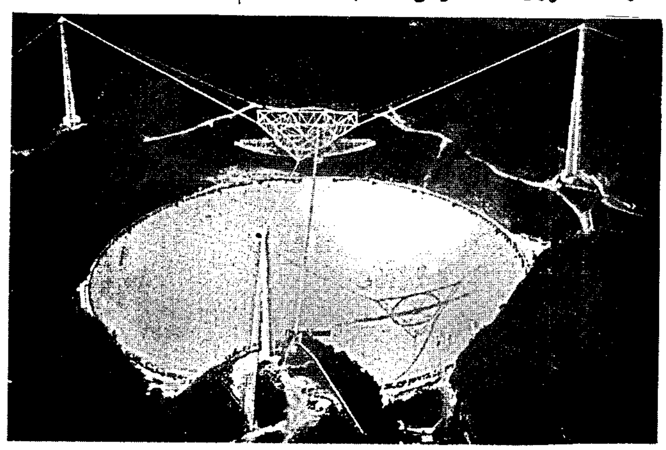
۱۶ م. نور خورشید درست در خارج جوّ زمین دارای شدت ۱ر۴ kW/m² است. با فرض تخت بودن موج، E_m و B_m مربوط به خورشید را در آنجا حساب کنید.

---

1. Roemer 2. Proxima Centauri

۱۷ م. بیشینهٔ میدان الکتریکی مربوط به یک چشمهٔ نور نقطه‌ای همسانگرد در فاصلهٔ ۱۰ متری برابر با ۲ر۰V/m است. (الف) مقدار بیشینهٔ میدان مغناطیسی و (ب) شدت متوسط نور، در این فاصله چیست؟ (پ) توان چشمه چقدر است؟

۱۸ م. فرانک دریک[1]، از پژوهشگران برنامهٔ کاوش‌های خبرگیری فرازمینی[2]، گفته است، که تلسکوپ رادیویی بزرگ واقع در آرچیبو[3] پورتوریکو[4]، «می‌تواند علامتی را که فقط با توان یک پیکووات به سطح کل زمین می‌رسد، آشکار کند.» شکل ۳۴-۴۰ را ببینید. (الف) توانی که آنتن آرچیبو با چنین علامتی دریافت می‌کند چقدر است؟ قطر آنتن ۳۰۰m است. (ب) توان خروجی چشمه‌ای واقع در مرکز کهکشان ما چقدر باید باشد تا چنین علامتی تأمین شود؟ فاصلهٔ مرکز کهکشان از زمین ۲ر۲ سال نوری است. فرض کنید چشمه در تمام جهت‌ها تابش می‌کند.



شکل ۳۴-۴۰ مسألهٔ ۱۸. تصویری از تلسکوپ رادیویی در آرچیبو.

۱۹ م. هواپیمایی در حال پرواز در فاصلهٔ ۱۰ کیلومتری یک فرستندهٔ رادیویی علامتی با شدت $10\mu W/m^2$ دریافت می‌کند. مطلوب است محاسبهٔ (الف) دامنهٔ میدان الکتریکی ناشی از این علامت در محل هواپیما، (ب) دامنهٔ میدان مغناطیسی در این محل، (پ) توان گسیل شده از فرستنده، با این فرض که فرستنده در تمام جهت‌ها به طور یکنواخت تابش می‌کند.

بخش ۳۴-۵ فشار تابشی

۲۰ ت. نور درخشش یک دوربین عکاسی با شدت $10 W/m^2$ به یک قطعه مقوای سیاه جذب کنندهٔ کامل با مساحت ۲ر۰cm^2 برخورد می‌کند. فشار تابشی حاصل از نور بر روی قطعهٔ مقوا چقدر است؟

۲۱ ت. فشار تابشی حاصل از لیزرهای پرتوان را برای متراکم کردن پلاسما (گاز شامل ذرات باردار) به کار می‌برند. لیزری که تپ‌های تابشی با قلهٔ توان ۱ر۵×۱۰³MW تولید می‌کند، بر روی سطحی به مساحت ۱ر۰mm^2 از پلاسمای با چگالی الکترونی بالا متمرکز می‌شود. فشار تابشی وارد بر پلاسما را به شرطی پیدا کنید که باریکهٔ نور تابیده شده به آن به طور کامل بر روی مسیر اولی بازتابیده شود.

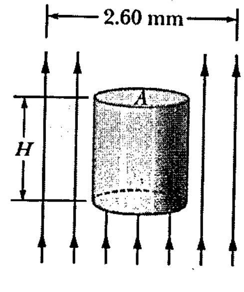
۲۲ ت. تابشی که از خورشید به زمین (درست در خارج جوّ) می‌رسد دارای شدت ۱ر۴kW/m^2 است. (الف) با این فرض که زمین (و جوّ آن) مانند یک قرص تخت عمود بر پرتوهای نور خورشید رفتار می‌کند و تمام انرژی تابشی جذب می‌شود، نیروی ناشی از فشار تابشی وارد بر زمین را حساب کنید. (ب) این نیرو را با نیروی جاذبهٔ گرانشی خورشید روی زمین مقایسه کنید.

۲۳ ت. فشار تابشی در فاصلهٔ ۱ر۵ متری یک لامپ روشنایی ۵۰۰ واتی چقدر است؟ فرض کنید سطحی که فشار به آن وارد می‌شود جذب کنندهٔ کامل و به طرف لامپ است و لامپ در تمام جهت‌ها به طور یکنواخت تابش می‌کند.

۲۴ م. یک لیزر هلیوم ـ نئون، از نوعی که اغلب در آزمایشگاه‌های فیزیک به‌کار می‌رود، دارای باریکهٔ نوری با توان ۵ر۰۰mW در طول موج ۶۳۳nm است. این باریکه به وسیلهٔ یک عدسی به صورت لکه‌ای دایره‌ای با قطر مؤثر ۲ر۰۰ برابر طول موج نور کانونی می‌شود. مطلوب است محاسبهٔ (الف) شدت باریکهٔ نور کانونی شده، (ب) فشار تابشی وارد شده به کرهٔ کوچکی با قطری برابر با قطر لکهٔ کانونی شده، که جذب کنندهٔ کامل است، (پ) نیروی وارد شده به این کره، و (ت) بزرگی شتاب داده شده به کره. چگالی کره را ۵ر۰۰×۱۰³kg/m^3 فرض کنید.

۲۵ م. یک موج الکترومغناطیسی تخت با طول موج ۳ر۰m در جهت مثبت محور x در خلاء پیش می‌رود. بردار میدان الکتریکی این موج $\vec{E}$، که با محور y همسو است، دارای دامنهٔ ۳۰۰V/m است. (الف) بسامد این موج f، چقدر است؟ (ب) دامنه و جهت میدان مغناطیسی وابسته به این موج چیست؟ (پ) در معادلهٔ میدان الکتریکی $E=E_m\sin(kx-\omega t)$، مقادیر k و ω را پیدا کنید. (ت) میانگین زمانی آهنگ شارش انرژی وابسته به این موج برحسب وات بر مترمربع چقدر است؟ (ث) این موج به ورقه‌ای به مساحت ۲ر۰m^2، که جذب کنندهٔ کامل است، می‌تابد. آهنگ انتقال تکانه به ورقه و فشار تابشی وارد بر آن چقدر است؟

۲۶ م. در شکل ۳۴-۴۱، باریکهٔ لیزری با توان ۴ر۶۰W و قطر ۲ر۶۰mm در حال انتشار به سمت بالا به سطح قاعدهٔ استوانه‌ای (به قطر



شکل ۳۴-۴۱ مسألهٔ ۲۶.

1. Frank D.Drake
2. Search for Extra−Terrestrial Intelligence (SETI)
3. Arecibo
4. Puerto Rico

$d>$ ۲٫۶۰mm) که بازتابندهٔ کامل است می‌تابد و تحت اثر فشار تابشی استوانه را در هوا «معلق» نگه می‌دارد. چگالی استوانه ۱٫۲۰g/cm^3 است. ارتفاع استوانه H، چقدر است؟

۲۷ م. ثابت کنید که در تابش عمودی یک موج الکترومغناطیسی تخت به یک سطح تخت، فشار تابشی وارد بر سطح برابر با چگالی انرژی مربوط به باریکهٔ فرودی تابش است. (این رابطهٔ میان فشار تابشی و چگالی انرژی بدون توجه به اینکه چه کسری از انرژی فرودی بازتابیده می‌شود، صادق است).

۲۸ م. ثابت کنید که فشار متوسط حاصل از جریانی از گلوله‌هایی که به طور عمود به یک سطح تخت برخورد می‌کنند دو برابر چگالی انرژی جنبشی جریان گلوله‌ها در بیرون سطح است. فرض کنید گلوله‌ها به طور کامل به وسیلهٔ سطح جذب می‌شوند. این موضوع را با موضوع مسألهٔ ۲۷ دربارهٔ نور، مقایسه کنید.

۲۹ م. سفینهٔ فضایی کوچکی به جرم $\text{۱٫۵}\times\text{۱۰}^3\text{kg}$ (شامل یک فضانورد) در فضای خارج، که در آن نیروی گرانشی وارد بر سفینه قابل چشم‌پوشی است، در حرکت است. اگر فضانورد یک مولد باریکهٔ لیزر با توان ۱۰kW را روشن کند، سفینه بر اثر واکنش وابسته به تکانهٔ این باریکه در مدت یک روز به چه تندی‌ای می‌رسد؟

۳۰ م. گفته شده است که یک سفینهٔ فضایی را می‌توان با استفاده از یک بادبان بزرگ و به وسیلهٔ فشار تابشی، در منظومهٔ شمسی به پیش راند. مساحت این بادبان چقدر باید باشد تا نیروی تابشی برابر با نیروی جاذبهٔ گرانشی خورشید (روی سفینه) شود؟ فرض کنید که جرم سفینه + بادبان، برابر با ۱۵۰۰kg است، بادبان نور را به طور کامل باز می‌تابد، و بر پرتوهای نور خورشید عمود است. برای داده‌های مورد نیاز پیوست پ کتاب را ببینید. (با یک بادبان وسیع‌تر سفینه پیوسته از خورشید دور می‌شود).

۳۱ م. ذره‌ای در منظومهٔ شمسی تحت اثر ترکیب دو نیروی جاذبهٔ گرانشی خورشید و نیروی ناشی از پرتوهای نور خورشید قرار دارد. فرض کنید این ذره کره‌ای به چگالی $\text{۱٫۰}\times\text{۱۰}^3\text{kg/m}^3$ است و تمام نور فرودی خورشید را جذب می‌کند. (الف) نشان دهید که اگر ذره دارای شعاعی کمتر از مقدار بحرانی R باشد به برون سوی منظومهٔ شمسی رانده می‌شود. (ب) این شعاع بحرانی را حساب کنید.

بخش ۳۴ـ۶ قطبش نور

۳۲ ت. معادله‌های مربوط به میدان مغناطیسی یک موج الکترومغناطیسی در خلاء عبارت‌اند از:

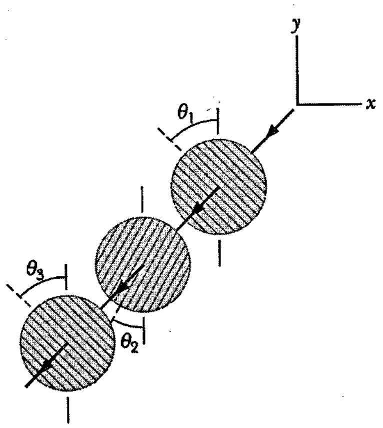
$$B_y = B_z = ۰ \quad \text{و} \quad B_x = B\sin(ky+\omega t)$$

(الف) راستای انتشار موج چیست؟ (ب) معادله‌های مربوط به میدان الکتریکی را بنویسید. (پ) آیا موج قطبیده است؟ اگر قطبیده است، در چه راستایی؟

۳۳ ت. باریکهٔ نور ناقطبیده‌ای به شدت ۱۰mW/m^2، از ورقهٔ قطبنده‌ای، مطابق شکل ۳۴ـ۱۲، عبور می‌کند. (الف) مقدار بیشینهٔ میدان الکتریکی باریکهٔ نور تراگسیل شده را پیدا کنید. (ب) چه فشار تابشی‌ای به ورقهٔ قطبنده وارد می‌شود؟

۳۴ ت. در شکل ۳۴ـ۴۲، باریکهٔ نور از پیش ناقطبیده‌ای به سمت سه ورقهٔ قطبنده فرستاده می‌شود. راستاهای قطبندهٔ این ورقه‌ها با محور y زاویه‌های $\theta_1=\theta_2=\theta_3=۵۰°$ می‌سازند. چند درصد از شدت نور اولی توسط این سیستم سه ورقه‌ای تراگسیل می‌شود؟ (راهنمایی: به سمتگیری زاویه‌ها توجه کنید).

۳۵ ت. در شکل ۳۴ـ۴۲، باریکهٔ نور از پیش ناقطبیده‌ای به سمت سه ورقهٔ قطبنده فرستاده می‌شود. راستاهای قطبندهٔ این ورقه‌ها با محور y زاویه‌های $\theta_1=۴۰°$، $\theta_2=۲۰°$ و $\theta_3=۴۰°$ می‌سازند. چند درصد از شدت نور اولی توسط این سیستم تراگسیل می‌شود؟ (راهنمایی: به سمتگیری زاویه‌ها توجه کنید).



شکل ۳۴ـ۴۲ تمرین‌های ۳۴ و ۳۵.

۳۶ م. باریکهٔ نور قطبیده‌ای به سمت یک سیستم شامل دو ورقهٔ قطبنده فرستاده می‌شود. نسبت به راستای قطبش نور فرودی، زاویهٔ راستای قطبندهٔ ورقهٔ اول θ و زاویهٔ راستای قطبندهٔ ورقهٔ دوم ۹۰ درجه است. اگر ۰٫۱۰ شدت نور فرودی توسط این دو ورقه تراگسیل شود مقدار θ چقدر است؟

۳۷ م. یک باریکهٔ افقی نور قطبیدهٔ قائم، با شدت ۴۳W/m^2 به سمت دو ورقهٔ قطبنده فرستاده می‌شود. زاویهٔ راستای قطبندهٔ ورقهٔ اول نسبت به راستای قائم ۷۰ درجه و راستای قطبندهٔ ورقهٔ دوم افقی است. شدت نور تراگسیل شده توسط دو ورقه چقدر است؟

۳۸ م. فرض کنید باریکهٔ نور مربوط به مسألهٔ ۳۷ در آغاز ناقطبیده است. در این صورت، شدت نور تراگسیل شده چقدر است؟

۳۹ م. باریکهٔ نور با قطبش نسبی را می‌توان آمیزه‌ای از نورهای قطبیده و ناقطبیده در نظر گرفت. فرض کنید این باریکهٔ نور را از یک پالایهٔ قطبنده

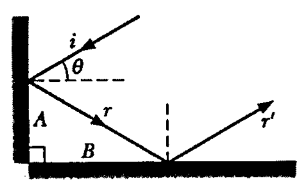
عبور می‌دهیم و سپس در حالی که پالایه بر راستای باریکهٔ نور عمود است آن را به اندازهٔ ۳۶۰ درجه می‌چرخانیم. اگر در حین چرخش پالایه شدت نور تراگسیل شده به نسبت یک به ۵٫۰ تغییر کند، چه کسری از شدت نور اصلی مربوط به نور قطبیده است؟

۴۰ م. در ساحل دریا، معمولاً، نور در اثر بازتاب‌های از روی سطح آب به‌طور نسبی قطبیده است. در ساحل خاص و در یک روز خاص، نزدیک غروب آفتاب مؤلفهٔ افقی بردار میدان الکتریکی ۲٫۳ برابر مؤلفهٔ قائم است. شخصی که در حال ایستاده آفتاب می‌گیرد، عینک قطبندهٔ خود را به چشم می‌زند. این عینک مؤلفهٔ افقی میدان را حذف می‌کند. (الف) چه کسری از شدت نور پیش از عینک زدن، اکنون به چشم‌های شخص می‌رسد؟ (ب) شخص در حالی که عینک به چشم دارد، به پهلو دراز می‌کشد. در این حالت، چه کسری از شدت نور پیش از عینک زدن به چشم‌های شخص می‌رسد؟

۴۱ م. می‌خواهیم راستای قطبش یک باریکهٔ نور قطبیده را با گذراندن آن از یک یا چند ورقهٔ قطبنده، به اندازهٔ ۹۰ درجه بچرخانیم. (الف) کمترین تعداد ورقه‌های مورد نیاز چند است؟ (ب) کمترین تعداد ورقه‌های مورد نیاز، در صورتی که شدت نور تراگسیل شده بالاتر از ۶۰ درصد شدت نور اصلی باشد، چقدر است؟

بخش ۳۴-۷ بازتاب و شکست نور

۴۲ ت. شکل ۳۴-۴۳، بازتاب نور را از دو سطح عمود برهم A و B نشان می‌دهد. زاویهٔ میان پرتوهای ورودی i و خروجی r' را معین کنید.



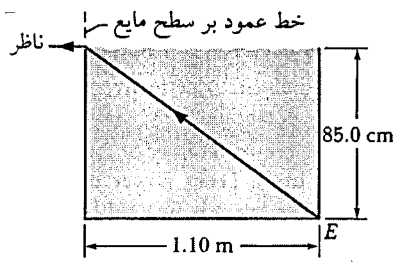
شکل ۳۴-۴۳ تمرین ۴۲.

۴۳ ت. پرتو نوری در خلاء به روی سطح بُره‌ای از شیشه می‌تابد. این پرتو نور با خط عمود بر سطح، در خلاء زاویهٔ ۳۲٫۰ درجه و در شیشه زاویهٔ ۲۱٫۰ درجه می‌سازد. ضریب شکست شیشه چقدر است؟

۴۴ ت. در حدود ۱۵۰ سال پیش از میلاد، **کلودیوس بطلمیوس**[1] مقادیر مندرج در جدول زیر را در اندازه‌گیری زاویهٔ تابش θ_1، و زاویهٔ شکست θ_2، برای گذر باریکهٔ نور از هوا به آب به دست آورد. (الف) آیا این داده‌ها با قانون شکست سازگارند؟ (ب) اگر سازگارند، چه ضریب شکستی برای آب به دست می‌دهند؟ این داده‌ها از این جهت که شاید قدیمی‌ترین مقادیر ثبت شده در اندازه‌گیری‌های فیزیکی باشند، جالب توجه‌اند.

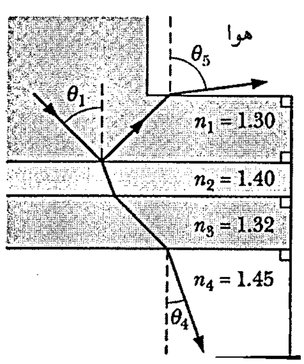
θ_1 (درجه)	θ_2 (درجه)	θ_1 (درجه)	θ_2 (درجه)
۱۰	۸	۵۰	۳۵
۲۰	۱۵٫۵	۶۰	۴۰٫۵
۳۰	۲۲٫۵	۷۰	۴۵٫۵
۴۰	۲۹	۸۰	۵۰

۴۵ ت. هرگاه مخزن فلزی مکعب مستطیل شکلی را، مطابق شکل ۳۴-۴۴، لب به لب از مایعی نامعلوم پر کنیم، چشم هم تراز با لبهٔ مخزن یک ناظر، می‌تواند درست گوشهٔ E مخزن را ببیند. پرتو نوری که از این گوشه به سطح مایع می‌آید و پس از شکست به چشم ناظر می‌رسد، نشان داده شده است. ضریب شکست مایع را پیدا کنید.



شکل ۳۴-۴۴ تمرین ۴۵.

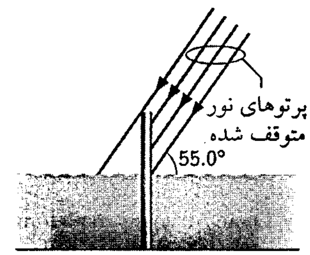
۴۶ م. در شکل ۳۴-۴۵، نوری تحت زاویهٔ $\theta_1 = 40.1^\circ$ به مرز مشترک میان دو مادهٔ شفاف می‌تابد. بخشی از این نور پایین می‌رود و از سه لایهٔ مادهٔ شفاف می‌گذرد، در حالی که بخشی دیگر به سمت بالا باز می‌تابد و به هوا وارد می‌شود. مطلوب است تعیین مقادیر زاویه‌های (الف) θ_5 و (ب) θ_4.



شکل ۳۴-۴۵ مسألهٔ ۴۶.

۴۷ م. در شکل ۳۴-۴۶، یک تیر قائم ۲ متری از کف یک استخر شنا تا ۵۰٫۰ cm بالاتر از سطح آب امتداد دارد. پرتوهای نور خورشید تحت زاویهٔ ۵۵٫۰ درجه نسبت به سطح افقی آب به تیر می‌تابند. طول سایهٔ تیر در کف استخر چقدر است؟

1. Claudius Ptolemy



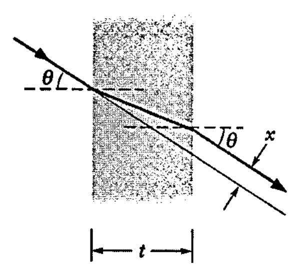
شکل ۳۴-۴۶ مسألهٔ ۴۷.

۴۸ م. پرتو نور سفیدی تحت زاویهٔ تابش ۳۵ درجه به یک وجه یک منشور شیشه‌ای می‌تابد. مقطع منشور مثلث متساوی‌الساقین است. چگونگی گذر نور از منشور را با نمایش دادن مسیر پرتوهای (الف) نور آبی، (ب) نور زرد ـ سبز، و نور قرمز، رسم کنید.

۴۹ م. ثابت کنید پرتو نوری که به سطح یک تیغهٔ شیشه‌ای به ضخامت t می‌تابد، از وجه مقابل، مطابق شکل ۳۴-۴۷، به طور موازی با راستای اولی، اما با جابه‌جایی جانبی، خارج می‌شود. نشان دهید که به ازای زاویه‌های تابش کوچک θ، این جابه‌جایی برابر است با:

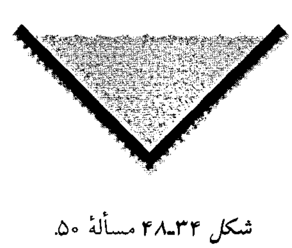
$$x = t\theta\frac{n-1}{n}$$

که در آن n، ضریب شکست شیشه و θ برحسب رادیان است.



شکل ۳۴-۴۷ مسألهٔ ۴۹.

۵۰ م. در شکل ۳۴-۴۸، دو آینهٔ عمود برهم جدارهای ظرف پر از آبی را تشکیل داده‌اند. (الف) پرتو نوری از بالا به طور عمود به سطح آب می‌تابد. نشان دهید که پرتو نور خارج شده از آب با پرتو فرودی موازی است. فرض کنید در سطح‌های آینه‌ای دو بازتاب وجود دارد. (ب) مسأله را برای حالتی که پرتو تابش در صفحهٔ شکل به طور مایل به سطح آب می‌تابد، تکرار کنید.

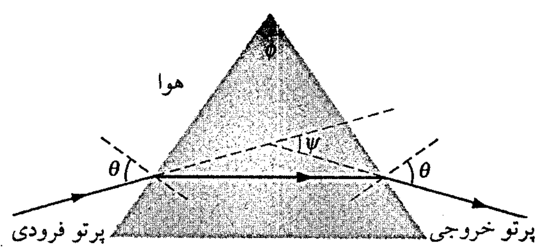


شکل ۳۴-۴۸ مسألهٔ ۵۰.

۵۱ م. در شکل ۳۴-۴۹، پرتو نوری در هوا به یک وجه منشور شیشه‌ای می‌تابد. زاویهٔ پرتو نور فرودی θ، طوری انتخاب می‌شود که زاویهٔ پرتو خروجی نسبت به خط عمود بر وجه دیگر نیز همان θ باشد. نشان دهید که ضریب شکست منشور n، از معادلهٔ زیر به دست می‌آید

$$n = \frac{\sin\frac{1}{2}(\psi+\phi)}{\sin\frac{1}{2}\phi}$$

که در آن ϕ زاویهٔ رأس منشور و ψ زاویهٔ انحراف، یعنی کل زاویهٔ چرخش پرتو نور فرودی در حین عبور از منشور، است. (در این شرایط، زاویهٔ انحراف ψ، کوچکترین مقدار ممکن را دارد و زاویهٔ انحراف کمینه نامید

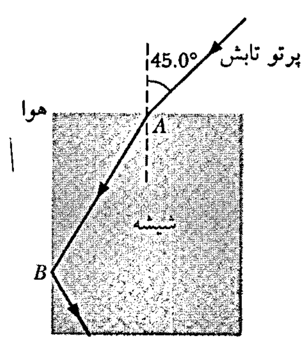


شکل ۳۴-۴۹ مسأله‌های ۵۱ و ۵۸.

بخش ۳۴-۸ بازتاب داخلی کلی

۵۲ ت. ضریب شکست بنزن ۱٫۸ است. زاویهٔ بحرانی پرتو نوری که از درون بنزن به فصل مشترک بنزن ـ هوا می‌تابد چقدر است؟

۵۳ ت. در شکل ۳۴-۵۰، پرتو نوری در نقطهٔ A به سطح یک بُرهٔ شیشه‌ای می‌تابد و پس از ورود به شیشه در نقطهٔ B بازتاب داخلی کلی پیدا می‌کند. با توجه به این اطلاعات کمینهٔ مقدار ضریب شکست شیشه چه می‌تواند باشد؟



شکل ۳۴-۵۰ تمرین ۵۳.

۵۴ ت. چشمهٔ نوری به اندازهٔ ۸۰٫۰ cm زیر سطح آب قرار دارد. قطر دایره‌ای را که تحت آن نور از سطح آب خارج می‌شود پیدا کنید.

۵۵ ت. در شکل ۳۴-۵۱، پرتو نوری به طور عمود به وجه ab یک منشور شیشه‌ای ($n=1{,}52$) می‌تابد. بیشترین مقدار زاویهٔ ϕ را طوری پیدا کنید که پرتو نور در وجه ac منشور بازتاب داخلی کلی پیدا کند، در صورتی که منشور (الف) در هوا، و (ب) در آب، باشد.



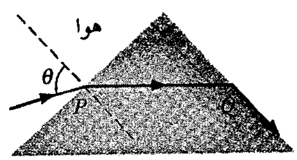
شکل ۳۴ـ۵۱ تمرین ۵۵.

۵۶ م. پرتو نور سفیدی در کوارتز شیشه‌ای واقع در هوا، منتشر می‌شود. اگر تمام مولفه‌های رنگی نور در سطح بازتاب داخلی کلی پیدا کنند نور بازتابیده به صورت یک پرتو نور سفید است. اما اگر مؤلفهٔ رنگی مربوط به یک سر طیف نور مرئی (نور آبی یا نور قرمز) به طور جزئی به درون هوا شکست پیدا کند بخش کمتری از این مؤلفه در نور بازتابیده وجود خواهد داشت. در این صورت، نور بازتابیده سفید نیست و دارای ته رنگی از سر دیگر طیف نور مرئی است. (اگر مؤلفهٔ آبی به طور جزئی شکست پیدا کند نور بازتابیده مایل به قرمز است، و برعکس). آیا ممکن است نور بازتابیده (الف) مایل به آبی یا (ب) مایل به قرمز باشد؟ (پ) اگر چنین است، زاویهٔ تابش نور سفید اصلی در سطح کوارتز چقدر باید باشد؟ (شکل ۳۴ـ۱۹ را ببینید).

۵۷ م. مکعبی شیشه‌ای به ضلع ۱۰mm و ضریب شکست ۱٫۵ دارای لکه‌ای در مرکزش است. (الف) چه بخش‌هایی از هر وجه مکعب را باید پوشاند تا در هر راستایی که نگاه کنیم از دیده شدن لکه جلوگیری شود؟ (از نوری که به درون مکعب باز می‌تابد و سپس در اثر شکست وارد هوا می‌شود، چشم‌پوشی کنید). (ب) چه کسری از سطح مکعب باید بدین گونه پوشیده شود؟

۵۸ م. فرض کنید منشور شکل ۳۴ـ۴۹، دارای زاویهٔ رأس $\phi=60{,}0^\circ$ و ضریب شکست ۱٫۶۰ $=n$ است. (الف) کوچکترین زاویهٔ تابش θ چقدر باشد تا پرتو نوری بتواند از وجه سمت چپ منشور وارد و از وجه سمت راست خارج شود؟ (ب) زاویهٔ تابش θ چقدر باشد تا پرتو نور با زاویهٔ مشابه θ، مطابق شکل ۳۴ـ۴۹، از منشور خارج شود؟ (مسألهٔ ۵۱ را ببینید).

۵۹ م. در شکل ۳۴ـ۵۲، پرتو نوری در نقطهٔ P، تحت زاویهٔ تابش θ، به یک منشور با مقطع مثلث راستگوشه وارد و سپس در نقطهٔ Q، تحت زاویهٔ شکست ۹۰ درجه، از منشور خارج می‌شود. (الف) ضریب شکست منشور برحسب زاویه θ چیست؟ (ب) مقدار بیشینه‌ای که ضریب شکست می‌تواند داشته باشد، از نظر عددی چقدر است؟ توضیح دهید



شکل ۳۴ـ۵۲ مسألهٔ ۵۹.

اگر زاویهٔ تابش در نقطه Q، (پ) اندکی افزایش و (ت) اندکی کاهش یابد، برای پرتو نور در نقطهٔ Q چه اتفاقی می‌افتد؟

بخش ۳۴ـ۹ قطبش نور در اثر بازتاب

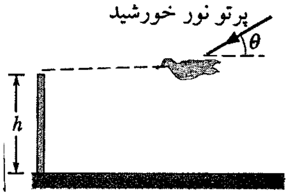
۶۰ ت. (الف) تحت چه زاویهٔ تابشی، نور بازتابیده از سطح آب به طور کامل قطبیده است؟ (ب) آیا این زاویه به طول موج نور بستگی دارد؟

۶۱ ت. پرتو نور در حال انتشار در آب به ضریب شکست ۱٫۳۳، به صفحه‌ای از شیشه به ضریب شکست ۱٫۵۳ می‌تابد. تحت چه زاویهٔ تابشی نور بازتابیده به طور کامل قطبیده است؟

۶۲ ت. حد بالا و حد پایین زاویه‌های بروستر را برای نور سفیدی که به سطح کوارتز شیشه‌ای می‌تابد، حساب کنید. فرض کنید که طول موجهای نور مربوط به این حدود ۴۰۰nm و ۷۰۰nm باشند.

مسأله‌های تکمیلی

۶۳. در شکل ۳۴ـ۵۳، یک مرغ دریایی در بالای سطح زمین و در یک صفحهٔ قائم شامل خورشید با تندی افقی ثابت ۱۵m/s، به نرمی در حال پرواز است. این م ذرغ به سمت دیواری به ارتفاع $h=2{,}0\,m$ پرواز می‌کند و می‌تواند درست از لبهٔ دیوار بگذرد. در این لحظه از روز زاویهٔ پرتوهای خورشید نسبت به زمین $\theta=30^\circ$ است. سایهٔ مرغ با چه تندی‌ای، (الف) بر روی زمین و سپس، (ب) بر روی دیوار، حرکت می‌کند؟ فرض کنید زمانی بعد، به طور تصادفی، یک شاهین در روی همان مسیر پرواز مرغ با تندی ۱۵m/s پرواز می‌کند. دیده می‌شود که وقتی سایهٔ شاهین به دیوار می‌رسد تندی سایه به نحو قابل ملاحظه‌ای افزایش می‌یابد. (پ) آیا در این لحظه، نسبت به زمان پرواز پیشی مرغ دریایی، خورشید در آسمان بالاتر رفته است یا پایین‌تر؟ (ت) اگر تندی سایهٔ شاهین بر روی دیوار ۴۵m/s باشد، زاویهٔ پرتوهای خورشید نسبت به زمین θ، چقدر است؟



شکل ۳۴ـ۵۳ مسألهٔ ۶۳.

۶۴. کاوش‌های مربوط به آرامگاه‌ها. در اکتشافات باستان شناختی با رسوخ دادن موجهای رادار در زمین می‌توان محل گورهای بی‌نشان و آرامگاه‌های زیرزمینی را بدون برهم زدن محوطهٔ آرامگاه، معین کرد. برای این کار، سیستم رادار یک تپ موج به زیرزمین می‌فرستد و آنگاه بخشی از موج در فصل مشترکی از لایه‌های زمین به سمت بالا باز می‌تابد. به عبارت دیگر، موج بازتابیده از مرزی افقی به سمت بالا می‌آید که در گذر

از آن تندی موج تغییر می‌کند. سیستم رادار موج بازتابیده را آشکار و بازهٔ زمانی میان فرستادن موج و آشکار شدن را ثبت می‌کند. با تکرار کردن این نحوهٔ کار در محل‌های مختلف زیرزمین، باستان‌شناسان می‌توانند ترکیب ساختاری زیرزمین را معین کنند.

یک سیستم رسوخ دادن موجهای رادار در زمین، مطابق شکل ۳۴ـ۵۴، در هشت محل و در طول یک خط تراز مستقیم، با شماره‌گذاری از غرب به شرق، مورد استفاده واقع شده است. فاصلهٔ دو محل مجاور در روی این خط m ۲ر۰ است. در زیر این محل‌ها یک گور خالی شامل تخته سنگ‌های افقی و قائم با ضخامت یکسان، که سقف، کف و دیوارهای گور را تشکیل می‌دهند، قرار گرفته است. جدول زیر Δt، بازه‌های زمانی ثبت شده (برحسب نانو ثانیه) را برای تپ‌های مربوط به هشت محل به دست می‌دهد. به عنوان مثال، در محل ۴ از تپ گسیل شدهٔ اصلی به زیرزمین چهار تپ بازتاب حاصل می‌شود، که نخستین آن پس از ns ۶۳ر۰۰ و آخرین آن پس از ns ۸۶ر۵۴، نسبت به زمان فرستادن تپ، برمی‌گردد.

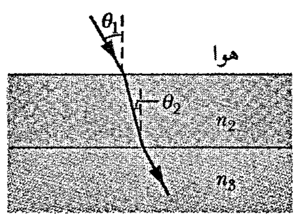
فرض کنید تندی تپ‌های موج در خاک بالا، پایین و کناره‌های گور cm/ns ۱۰ر۰، در تخته سنگ‌ها cm/ns ۱۰ر۶ و در هوای درون گور cm/ns ۳۰ر۰ است. مطلوب است تعیین (الف) عمق سطح بالایی سقف گور، (ب) طول افقی گور در راستای خط غرب ـ شرق، که شامل هشت محل است، و (پ) ابعاد قائم درون گور.



شکل ۳۴ـ۵۴ مسألهٔ ۶۴.

محل	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
Δt	هیچ	۶۳ر۰۰	۶۳ر۰۰	۶۳ر۰۰	۶۳ر۰۰	۶۳ر۰۰	۶۳ر۰۰	هیچ
		۱۱۵ر۸	۶۶ر۷۷	۶۶ر۷۷	۶۶ر۷۷	۶۶ر۷۷	۹۳ر۱۹	
			۸۲ر۷۷	۸۲ر۷۷	۷۴ر۷۷	۷۴ر۷۷		
			۸۶ر۵۴	۸۶ر۵۴	۱۰۱ر۲	۷۸ر۵۴		

۶۵. در شکل ۳۴ـ۵۵، پرتو نوری از هوا به سطح لایه‌ای از مادهٔ ۲ به ضریب شکست $n_2 = 1/5$، تابیده است. پایین مادهٔ ۲ لایه‌ای از مادهٔ ۳ به ضریب شکست n_3 قرار دارد. پرتو نور به فصل مشترک هوا ـ مادهٔ ۲ تحت زاویهٔ بروستر این فصل مشترک می‌تابد. آنگاه، پرتو نور پس از شکست در مادهٔ ۳، به طور تصادفی، به فصل مشترک مادهٔ ۲ ـ مادهٔ ۳، در زاویهٔ بروستر این فصل مشترک تابیده می‌شود. مقدار ضریب شکست n_3 چقدر است؟



شکل ۳۴ـ۵۵ مسألهٔ ۶۵.

۶۶. دو دستتان را چقدر باید از هم دور نگه دارید تا به اندازهٔ ۱ر۰ نانو ثانیهٔ ـ نوری از هم فاصله داشته باشند؟

پیوست‌ها APPENDICES

پیوست الف دستگاه بین المللی یکاها (SI)*

۱. یکاهای اصلی SI

کمیت	نام	نماد	تعریف
طول	متر	m	«... طولی است، که نور در بازهٔ زمانی $\frac{۱}{۲۹۹۷۹۲۴۵۸}$ ثانیه در خلاء می‌پیماید» (۱۹۸۳/۱۳۶۲).
جرم	کیلوگرم	kg	«.. این نمونهٔ اصلی (که استوانهٔ معینی از پلاتین - ایریدیوم است) از این پس به عنوان یکای جرم در نظر گرفته می‌شود» (۱۸۸۹/۱۲۶۸).
زمان	ثانیه	s	«... زمانی معادل ۹۱۹۲۶۳۱۷۷۰ برابر دورهٔ تناوب تابش متناظر با گذار میان دو تراز فوق ریز حالت پایهٔ اتم سزیوم - ۱۳۳ است» (۱۹۶۷/۱۳۴۶).
جریان الکتریکی	آمپر	A	«... جریان ثابتی است که اگر از دو سیم مستقیم موازی با طول بی‌نهایت و سطح مقطع دایره‌ای ناچیز، به فاصلهٔ یک متر از هم در خلاء بگذرد، میان سیم‌ها برای هر متر طول نیرویی برابر با ۲×۱۰^{-۷} نیوتون ایجاد شود» (۱۹۴۶/۱۳۲۵).
دمای ترمودینامیکی	کلوین	K	«... $\frac{۱}{۲۷۳٫۱۶}$ برابر دمای ترمودینامیکی نقطهٔ سه گانه آب است» (۱۹۶۷/۱۳۴۶).
مقدار ماده	مول	mol	«... مقدار مادهٔ دستگاهی است، که تعداد موجودات بنیادی آن با تعداد اتم‌های موجود در ۰٫۰۱۲ کیلوگرم کربن - ۱۲ برابر باشد» (۱۹۷۱/۱۳۵۰).
شدت نور	کاندلا	cd	«... شدت نور با تابش عمودی بر سطحی به مساحت $\frac{۱}{۶۰۰۰۰۰}$ متر مربع از یک جسم سیاه در دمای ذوب پلاتین و در فشار ۱۰۱۳۲۵ نیوتون بر متر مربع است» (۱۹۶۷/۱۳۴۶).

* برگرفته از نشریهٔ ویژهٔ ۳۳۰، ویرایش ۱۹۷۲، ادارهٔ ملی استانداردها، «دستگاه بین المللی یکاها (SI)». تعریف‌های بالا در تاریخ‌های یاد شده از سوی مجمع عمومی وزن‌ها و مقیاس‌ها، که یک مرجع بین المللی است، پذیرفته شده‌اند. در این کتاب از یکای **کاندلا** استفاده نمی‌شود.

۲. برخی یکاهای فرعی SI

کمیت	نام یکا	نماد	
مساحت	متر مربع	m^2	
حجم	متر مکعب	m^3	
بسامد	هرتز	Hz	s^{-1}
چگالی جرمی (چگالی)	کیلوگرم بر متر مکعب	kg/m^3	
تندی، سرعت	متر بر ثانیه	m/s	
سرعت زاویه‌ای	رادیان بر ثانیه	rad/s	
شتاب	متر بر مجذور ثانیه	m/s^2	
شتاب زاویه‌ای	رادیان بر مجذور ثانیه	rad/s^2	
نیرو	نیوتون	N	$kg.m/s^2$
فشار	پاسکال	Pa	N/m^2
کار، انرژی، مقدار گرما	ژول	J	N.m
توان	وات	W	J/s
مقدار بار الکتریکی	کولن	C	A.s
اختلاف پتانسیل، نیروی محرک الکتریکی	ولت	V	W/A
شدت میدان الکتریکی	ولت بر متر (یا نیوتون بر کولن)	V/m	N/C
مقاومت الکتریکی	اهم	Ω	V/A
ظرفیت	فاراد	F	A.s/V
شار مغناطیسی	وِبِر	Wb	V.s
القاییدگی	هانری	H	V.s/A
چگالی شارمغناطیسی	تسلا	T	Wb/m^2
شدت میدان مغناطیسی	آمپر بر متر	A/m	
آنتروپی	ژول بر کلوین	J/K	
گرمای ویژه	ژول بر کیلوگرم کلوین	J/(kg.K)	
رسانندگی گرمایی	وات بر متر کلوین	W/(m.K)	
شدت تابش	وات بر استرادیان	W/sr	

۳. یکاهای تکمیلی SI

کمیت	نام یکا	نماد
زاویهٔ مسطحه	رادیان	rad
زاویهٔ فضایی	استرادیان	sr

پیوست ب برخی ثابت‌های بنیادی فیزیک*

ثابت	نماد	مقدار مورد استفاده در محاسبه	بهترین مقدار (۱۹۹۸) مقدار[1]	عدم قطعیت[2]
تندی نور در خلاء	c	$۳٫۰۰ \times ۱۰^{۸}$ m/s	۲٫۹۹۷۹۲۴۵۸	دقیق
بار بنیادی	e	$۱٫۶۰ \times ۱۰^{-۱۹}$ C	۱٫۶۰۲۱۷۶۴۶۲	۰٫۰۳۹
ثابت گرانش	G	$۶٫۶۷ \times ۱۰^{-۱۱}$ $m^{۳}/s^{۲}.kg$	۶٫۶۷۳	۱۵۰۰
ثابت عمومی گازها	R	۸٫۳۱ J/mol.K	۸٫۳۱۴۴۷۲	۱٫۷
ثابت آووگادرو	N_A	$۶٫۰۲ \times ۱۰^{۲۳}$ $mol^{-۱}$	۶٫۰۲۲۱۴۱۹۹	۰٫۰۷۹
ثابت بولتزمن	k	$۱٫۳۸ \times ۱۰^{-۲۳}$ J/K	۱٫۳۸۰۶۵۰۳	۱٫۷
ثابت استفان ـ بولتزمن	σ	$۵٫۶۷ \times ۱۰^{-۸}$ $W/m^{۲}.K^{۴}$	۵٫۶۷۰۴۰۰	۷٫۰
حجم مولی گاز ایده‌آل در STP[4]	V_m	$۲٫۲۷ \times ۱۰^{-۲}$ $m^{۳}/mol$	۲٫۲۷۱۰۹۸۱	۱٫۷
ثابت گذردهی	ε_0	$۸٫۸۵ \times ۱۰^{-۱۲}$ F/m	۸٫۸۵۴۱۸۷۸۱۷۶۲	دقیق
ثابت تراوایی	μ_0	$۱٫۲۶ \times ۱۰^{-۶}$ H/m	۱٫۲۵۶۶۳۷۰۶۱۴۳	دقیق
ثابت پلانک	h	$۶٫۶۳ \times ۱۰^{-۳۴}$ J.s	۶٫۶۲۶۰۶۸۷۶	۰٫۰۷۸
جرم الکترون[3]	m_e	$۹٫۱۱ \times ۱۰^{-۳۱}$ kg	۹٫۱۰۹۳۸۱۸۸	۰٫۰۷۹
		$۵٫۴۹ \times ۱۰^{-۴}$ u	۵٫۴۸۵۷۹۹۱۱۰	۰٫۰۰۲۱
جرم پروتون[3]	m_p	$۱٫۶۷ \times ۱۰^{-۲۷}$ kg	۱٫۶۷۲۶۲۱۵۸	۰٫۰۷۹
		۶٫۰۰۷۳u	۱٫۰۰۷۲۷۶۴۶۶۸۸	$۱٫۳ \times ۱۰^{-۴}$
نسبت جرم پروتون به جرم الکترون	m_p/m_e	۱۸۴۰	۱۸۳۶٫۱۵۲۶۶۷۵	۰٫۰۰۲۱
نسبت بار به جرم الکترون	e/m_e	$۱٫۷۶ \times ۱۰^{۱۱}$ C/kg	۱٫۷۵۸۸۲۰۱۷۴	۰٫۰۴۰
جرم نوترون[3]	m_n	$۱٫۶۸ \times ۱۰^{-۲۷}$ kg	۱٫۶۷۴۹۲۷۱۶	۰٫۰۷۹
		۱٫۰۰۸۷u	۱٫۰۰۸۶۶۴۹۱۵۷۸	$۵٫۴ \times ۱۰^{-۴}$
جرم اتمی هیدروژن[3]	$m_{۱H}$	۱٫۰۰۷۸u	۱٫۰۰۷۸۲۵۰۳۱۶	۰٫۰۰۰۵
جرم اتمی دوتریوم[3]	$m_{۲H}$	۲٫۰۱۴۱u	۲٫۰۱۴۱۰۱۷۷۷۹	۰٫۰۰۰۵
جرم اتمی هلیوم[3]	$m_{۴He}$	۴٫۰۰۲۶u	۴٫۰۰۲۶۰۳۲	۰٫۰۶۷
جرم میوئون	m_μ	$۱٫۸۸ \times ۱۰^{-۲۸}$ kg	۱٫۸۸۳۵۳۱۰۹	۰٫۰۸۴
گشتاور مغناطیسی الکترون	μ_e	$۹٫۲۸ \times ۱۰^{-۲۴}$ J/T	۹٫۲۸۴۷۶۳۶۲	۰٫۰۴۰
گشتاور مغناطیسی پروتون	μ_p	$۱٫۴۱ \times ۱۰^{-۲۶}$ J/T	۱٫۴۱۰۶۰۶۶۶۳	۰٫۰۴۱
مگنتون بور	μ_B	$۹٫۲۷ \times ۱۰^{-۲۴}$ J/T	۹٫۲۷۴۰۰۸۹۹	۰٫۰۴۰
مگنتون هسته‌ای	μ_N	$۵٫۰۵ \times ۱۰^{-۲۷}$ J/T	۵٫۰۵۰۷۸۳۱۷	۰٫۰۴۰
شعاع بور	r_B	$۵٫۲۹ \times ۱۰^{-۱۱}$ m	۵٫۲۹۱۷۷۲۰۸۳	۰٫۰۰۳۷
ثابت ریدبرگ	R	$۱٫۱۰ \times ۱۰^{۷}$ $m^{-۱}$	۱٫۰۹۷۳۷۳۱۵۶۸۵۴۸	$۷٫۶ \times ۱۰^{-۶}$
طول موج کامپیتون الکترون	λ_C	$۲٫۴۳ \times ۱۰^{-۱۲}$ m	۲٫۴۲۶۳۱۰۲۱۵	۰٫۰۰۷۳

۱. مقادیر داده شده در این ستون باید همان یکا و توان ۱۰ مربوط به مقادیر مورد استفاده در محاسبه را داشته باشند.

۲. برحسب قسمت در میلیون.

۳. جرم‌ها برحسب یکاهای جرم اتمی یکی شدهٔ u، داده شده‌اند، که در آن $1u = ۱٫۶۶۰۵۳۸۷۳ \times ۱۰^{-۲۷}$kg.

۴. STP (standard temperature and pressure) به‌معنای دما و فشار متعارفی است، که عبارت‌اند از دمای صفر درجه سلسیوس و فشار یک اتمسفر (مساوی با ۰٫۱MPa).

* مقادیر داده شده در این جدول از مقادیر پیشنهادی 1998 CODATA (www.physics.nist.gov) انتخاب شده‌اند.

پیوست پ برخی اطلاعات اختر شناختی

برخی فاصله‌ها نسبت به زمین

فاصلهٔ ماه*	$۳٫۸۲ \times ۱۰^{۸}$m	فاصلهٔ مرکز کهکشان ما	$۲٫۲ \times ۱۰^{۲۰}$m
فاصلهٔ خورشید*	$۱٫۵۰ \times ۱۰^{۱۱}$m	فاصلهٔ کهکشان آندرومدا (امرأةالمسلسله)	$۲٫۱ \times ۱۰^{۲۲}$m
فاصلهٔ نزدیک‌ترین ستاره (پروکزیما قنطوروس)	$۴٫۰۴ \times ۱۰^{۱۶}$m	فاصلهٔ کرانهٔ جهان مشاهده‌پذیر	$\sim ۱۰^{۲۶}$m

اطلاعات مربوط به خورشید، زمین، و ماه

کمیت	یکا	خورشید	زمین	ماه
جرم	kg	$۱٫۹۹ \times ۱۰^{۳۰}$	$۵٫۹۸ \times ۱۰^{۲۴}$	$۷٫۳۶ \times ۱۰^{۲۲}$
شعاع متوسط	m	$۶٫۹۶ \times ۱۰^{۸}$	$۶٫۳۷ \times ۱۰^{۶}$	$۱٫۷۴ \times ۱۰^{۶}$
چگالی متوسط	kg/m^3	۱۴۱۰	۵۵۲۰	۳۳۴۰
شتاب سقوط آزاد در سطح	m/s^2	۲۷۴	۹٫۸۱	۱٫۶۷
سرعت فرار	km/s	۶۱۸	۱۱٫۲	۲٫۳۸
دورهٔ تناوب دوران[1]	-	۳۷d، در قطب‌ها[2]؛ ۲۶d، در استوا[2]	۲۳h۵۶min	۲۷٫۳d
توان تابشی[3]	W	$۳٫۹۰ \times ۱۰^{۲۶}$		

۱. نسبت به ستاره‌های دور اندازه‌گیری شده است.

۲. خورشید توده‌ای از گاز است و مانند جسم صُلب نمی‌چرخد.

۳. انرژی خورشیدی دریافت شده درست در خارج جوّ زمین، با فرض کردن تابش عمودی با آهنگ $۱۳۴۰ W/m^2$.

برخی مشخصات سیاره‌ها

کمیت	عطارد	زهره	زمین	مریخ	مشتری	زحل	اورانوس	نپتون	پلوتو
فاصلهٔ متوسط از خورشید (برحسب $۱۰^{۶}$Km)	۵۷٫۹	۱۰۸	۱۵۰	۲۲۸	۷۷۸	۱۴۳۰	۲۸۷۰	۴۵۰۰	۵۹۰۰
دورهٔ تناوب گردش (برحسب سال)	۰٫۲۴۱	۰٫۶۱۵	۱٫۰۰	۱٫۸۸	۱۱٫۹	۲۹٫۵	۸۴٫۰	۱۶۵	۲۴۸
دورهٔ تناوب دوران[1] (برحسب روز)	۵۸٫۷	−۲۴۳[2]	۰٫۹۹۷	۱٫۰۳	۰٫۴۰۹	۰٫۴۲۶	−۰٫۴۵۱[2]	۰٫۶۵۸	۶٫۳۹
تندی مداری (برحسب km/s)	۴۷٫۹	۳۵٫۰	۲۹٫۸	۲۴٫۱	۱۳٫۱	۹٫۶۴	۶٫۸۱	۵٫۴۳	۴٫۷۴
زاویهٔ محور نسبت به مدار	$< ۲۸°$	$\approx ۳°$	۲۳٫۴°	۲۵٫۰°	۳٫۰۸°	۲۶٫۷°	۹۷٫۹°	۲۹٫۶°	۵۷٫۵°
زاویهٔ مدار نسبت به صفحهٔ مدار زمین	۷٫۰۰°	۳٫۳۹°		۱٫۸۵°	۱٫۳۰°	۲٫۴۹°	۰٫۷۷°	۱٫۷۷°	۱۷٫۲°
خروج از مرکز مدار	۰٫۲۰۶	۰٫۰۰۶۸	۰٫۰۱۶۷	۰٫۰۹۳۴	۰٫۰۴۸۵	۰٫۰۵۵۶	۰٫۰۴۷۲	۰٫۰۰۸۶	۰٫۲۵۰
قطر استوایی (برحسب km)	۴۸۸۰	۱۲۱۰۰	۱۲۸۰۰	۶۷۹۰	۱۴۳۰۰۰	۱۲۰۰۰۰	۵۱۸۰۰	۴۹۵۰۰	۲۳۰۰
جرم (نسبت به زمین)	۰٫۰۵۵۸	۰٫۸۱۵	۱٫۰۰۰	۰٫۱۰۷	۳۱۸	۹۵٫۱	۱۴٫۵	۱۷٫۲	۰٫۰۰۲
چگالی (نسبت به آب)	۵٫۶۰	۵٫۲۰	۵٫۵۲	۳٫۹۵	۱٫۳۱	۰٫۷۰۴	۱٫۲۱	۱٫۶۷	۲٫۰۳
مقدار g در سطح[3] (برحسب m/s^2)	۳٫۷۸	۸٫۶۰	۹٫۷۸	۳٫۷۲	۲۲٫۹	۹٫۰۵	۷٫۷۷	۱۱٫۰	۰٫۵
سرعت فرار[3] (برحسب km/s)	۴٫۳	۱۰٫۳	۱۱٫۲	۵٫۰	۵۹٫۵	۳۵٫۶	۲۱٫۲	۲۳٫۶	۱٫۱
قمرهای شناخته شده	۰	۰	۱	۲	حلقه+۱۶	حلقه‌ها+۱۸	حلقه‌ها+۱۷	حلقه‌ها+۸	۱

۱. نسبت به ستاره‌های دور اندازه‌گیری شده است.

۲. زهره و اورانوس برخلاف جهت حرکت مداری خود می‌چرخند.

۳. شتاب گرانشی اندازه‌گیری شده در استوای سیاره.

*. فاصلهٔ متوسط.

پیوست ت — ضریب‌های تبدیل

ضریب‌های تبدیل را می‌توان به طور مستقیم از جدول‌ها خواند. به عنوان مثال، یک درجه برابر با $۲٫۷۷۸ \times ۱۰^{-۳}$ rev است، در نتیجه $۱۶٫۷^\circ = ۱۶٫۷ \times ۲٫۷۷۸ \times ۱۰^{-۳}$ rev. یکاهای SI با حروف سیاه مشخص شده‌اند*.

زاویهٔ مسطحه

		° (درجه)	′ (دقیقه)	″ (ثانیه)	rad (رادیان)	rev (دور)
یک درجه	=	۱	۶۰	۳۶۰۰	$۱٫۷۴۵ \times ۱۰^{-۲}$	$۲٫۷۷۸ \times ۱۰^{-۳}$
یک دقیقه	=	$۱٫۶۶۷ \times ۱۰^{-۲}$	۱	۶۰	$۲٫۹۰۹ \times ۱۰^{-۴}$	$۴٫۶۳۰ \times ۱۰^{-۵}$
یک ثانیه	=	$۲٫۷۷۸ \times ۱۰^{-۴}$	$۱٫۶۶۷ \times ۱۰^{-۲}$	۱	$۴٫۸۴۸ \times ۱۰^{-۶}$	$۷٫۷۱۶ \times ۱۰^{-۷}$
یک رادیان	=	۵۷٫۳۰	۳۴۳۸	$۲٫۰۶۳ \times ۱۰^{۵}$	۱	۰٫۱۵۹۲
یک دور	=	۳۶۰	$۲٫۱۶ \times ۱۰^{۴}$	$۱٫۲۹۶ \times ۱۰^{۶}$	۶٫۲۸۳	۱

زاویهٔ فضایی

یک کره = ۴π استرادیان = ۱۲٫۵۷ استرادیان

طول

		cm	m	km	in	ft	mi
یک سانتی متر	=	۱	$۱۰^{-۲}$	$۱۰^{-۵}$	۰٫۳۹۳۷	$۳٫۲۸۱ \times ۱۰^{-۲}$	$۶٫۲۱۴ \times ۱۰^{-۶}$
یک متر	=	۱۰۰	۱	$۱۰^{-۳}$	۳۹٫۳۷	۳٫۲۸۱	$۶٫۲۱۴ \times ۱۰^{-۴}$
یک کیلومتر	=	$۱۰^{۵}$	۱۰۰۰	۱	$۳٫۹۳۷ \times ۱۰^{۴}$	۳۲۸۱	۰٫۶۲۱۴
یک اینچ	=	۲٫۵۴۰	$۲٫۵۴۰ \times ۱۰^{-۲}$	$۲٫۵۴۰ \times ۱۰^{-۵}$	۱	$۸٫۳۳۳ \times ۱۰^{-۲}$	$۱٫۵۷۸ \times ۱۰^{-۵}$
یک فوت	=	۳۰٫۴۸	۰٫۳۰۴۸	$۳٫۰۴۸ \times ۱۰^{-۴}$	۱۲	۱	$۱٫۸۹۴ \times ۱۰^{-۴}$
یک مایل	=	$۱٫۶۰۹ \times ۱۰^{۵}$	۱۶۰۹	۱٫۶۰۹	$۶٫۳۳۶ \times ۱۰^{۴}$	۵۲۸۰	۱

یک آنگستروم = $۱۰^{-۱۰}$m

یک مایل دریایی = ۱۸۵۲m = ۱٫۱۵۱mi = ۶۰۷۶ft

یک فرمی = $۱۰^{-۱۵}$m

یک سال نوری = $۹٫۴۶۰ \times ۱۰^{۱۲}$km

یک پارسک = $۳٫۰۸۴ \times ۱۰^{۱۳}$km

یک فاتوم = ۶ft

شعاع بور = $۵٫۲۹۲ \times ۱۰^{-۱۱}$m

یک یارد = ۳ft

یک راد = ۱۶٫۵ft

یک میل = $۱۰^{-۳}$in

یک نانومتر = $۱۰^{-۹}$m

مساحت

		$m^۲$	$cm^۲$	$ft^۲$	$in^۲$
یک مترمربع	=	۱	$۱۰^{۴}$	۱۰٫۷۶	۱۵۵۰
یک سانتی‌متر مربع	=	$۱۰^{-۴}$	۱	$۱٫۰۷۶ \times ۱۰^{-۳}$	۰٫۱۵۵۰
یک فوت مربع	=	$۹٫۲۹۰ \times ۱۰^{-۲}$	۹۲۹٫۰	۱	۱۴۴
یک اینچ مربع	=	$۶٫۴۵۲ \times ۱۰^{-۴}$	۶٫۴۵۲	$۶٫۹۴۴ \times ۱۰^{-۳}$	۱

یک مایل مربع = $۲٫۷۸۸ \times ۱۰^{۷}ft^۲$ = ۶۴۰ جریب

یک بارن = $۱۰^{-۲۸}m^۲$

یک جریب = $۴۳۵۶۰ft^۲ = ۴۰۵۰m^۲$

یک هکتار = $۱۰^{۴}m^۲$ = ۲٫۴۷۱ جریب

* بخشی از داده‌ها از این مرجع گرفته شده‌اند: G. Shortley and D. Williams, *Elements of Physics*, 1971, Prentice - Hall , Englewood Cliffs, N. J.

حجم

		m^3	cm^3	L	ft^3	in^3
یک **مترمکعب**	=	۱	$۱۰^{۶}$	۱۰۰۰	۳۵٫۳۱	$۶٫۱۰۲ \times ۱۰^{۴}$
یک سانتی‌مترمکعب	=	$۱۰^{-۶}$	۱	$۱٫۰۰۰ \times ۱۰^{-۳}$	$۳٫۵۳۱ \times ۱۰^{-۵}$	$۶٫۱۰۲ \times ۱۰^{-۲}$
یک لیتر	=	$۱٫۰۰۰ \times ۱۰^{-۳}$	۱۰۰۰	۱	$۳٫۵۳۱ \times ۱۰^{-۲}$	۶۱٫۰۲
یک فوت مکعب	=	$۲٫۸۳۲ \times ۱۰^{-۲}$	$۲٫۸۳۲ \times ۱۰^{۴}$	۲۸٫۲۳	۱	۱۷۲۸
یک اینچ مکعب	=	$۱٫۶۳۹ \times ۱۰^{-۵}$	۱۶٫۳۹	$۱٫۶۳۹ \times ۱۰^{-۲}$	$۵٫۷۸۷ \times ۱۰^{-۴}$	۱

یک گالن مایع آمریکایی = ۴ کوارت مایع آمریکایی = ۸ پینت آمریکایی = ۱۲۸ اونس مایع آمریکایی = $۲۳۱in^3$

یک گالن امپریال انگلیسی = $۲۷۷٫۴in^3$ = ۱٫۲۰۱ گالن مایع آمریکایی

جرم

کمیت‌هایی که در ناحیهٔ خاکستری درج شده‌اند یکای جرم نیستند، اما اغلب به این عنوان به کار می‌روند. مثلاً وقتی می‌نویسیم "۱kg = ۲٫۲۰۵lb"، منظور این است که در محلی که g دارای مقدار استاندارد $۹٫۸۰۶۶۵m/s^2$ است، یک کیلوگرم جرمی است که ۲٫۲۰۵ پوند وزن دارد.

		g	kg	slug	u	oz	lb	ton
یک گرم	=	۱	۰٫۰۰۱	$۶٫۸۵۲ \times ۱۰^{-۵}$	$۶٫۰۲۲ \times ۱۰^{۲۳}$	$۳٫۵۲۷ \times ۱۰^{-۲}$	$۲٫۲۰۵ \times ۱۰^{-۳}$	$۱٫۱۰۲ \times ۱۰^{-۶}$
یک **کیلوگرم**	=	۱۰۰۰	۱	$۶٫۸۵۲ \times ۱۰^{-۲}$	$۶٫۰۲۲ \times ۱۰^{۲۶}$	۳۵٫۲۷	۲٫۲۰۵	$۱٫۱۰۲ \times ۱۰^{-۳}$
یک اسلاگ	=	$۱٫۴۵۹ \times ۱۰^{۴}$	۱۴٫۵۹	۱	$۸٫۷۸۶ \times ۱۰^{۲۷}$	۵۱۴٫۸	۳۲٫۱۷	$۱٫۶۰۹ \times ۱۰^{-۲}$
یک یکای جرم اتمی	=	$۱٫۶۶۱ \times ۱۰^{-۲۴}$	$۱٫۶۶۱ \times ۱۰^{-۲۷}$	$۱٫۱۳۸ \times ۱۰^{-۲۸}$	۱	$۵٫۸۵۷ \times ۱۰^{-۲۶}$	$۳٫۶۶۲ \times ۱۰^{-۲۷}$	$۱٫۸۳۰ \times ۱۰^{-۳۰}$
یک اونس	=	۲۸٫۳۵	$۲٫۸۳۵ \times ۱۰^{-۲}$	$۱٫۹۴۳ \times ۱۰^{-۳}$	$۱٫۷۱۸ \times ۱۰^{۲۵}$	۱	$۶٫۲۵۰ \times ۱۰^{-۲}$	$۳٫۱۲۵ \times ۱۰^{-۵}$
یک پوند	=	۴۵۳٫۶	۰٫۴۵۳۶	$۳٫۱۰۸ \times ۱۰^{-۲}$	$۲٫۷۳۲ \times ۱۰^{۲۶}$	۱۶	۱	۰٫۰۰۰۵
یک تن	=	$۹٫۰۷۲ \times ۱۰^{۵}$	۹۰۷٫۲	۶۲٫۱۶	$۵٫۴۶۳ \times ۱۰^{۲۹}$	$۳٫۲ \times ۱۰^{۴}$	۲۰۰۰	۱

یک تن متریک = ۱۰۰۰kg

چگالی

کمیت‌هایی که در ناحیهٔ خاکستری درج‌شده‌اند، چگالی‌های وزنی هستند و به این جهت، از نظر ابعادی با چگالی‌های جرمی متفاوت‌اند. به جدول جرم رجوع کنید.

		$slug/ft^3$	kg/m^3	g/cm^3	lb/ft^3	lb/in^3
یک اسلاگ بر فوت مکعب	=	۱	۱۵۱۵٫۴	۰٫۵۱۵۴	۳۲٫۱۷	$۱٫۸۶۲ \times ۱۰^{-۲}$
یک **کیلوگرم بر متر مکعب**	=	$۱٫۹۴۰ \times ۱۰^{-۳}$	۱	۰٫۰۰۱	$۶٫۲۴۳ \times ۱۰^{-۲}$	$۳٫۶۱۳ \times ۱۰^{-۵}$
یک گرم بر سانتی‌متر مکعب	=	۱٫۹۴۰	۱۰۰۰	۱	۶۲٫۴۳	$۳٫۶۱۳ \times ۱۰^{-۲}$
یک پوند بر فوت مکعب	=	$۳٫۱۰۸ \times ۱۰^{-۲}$	۱۶٫۰۲	$۱٫۶۰۲ \times ۱۰^{-۲}$	۱	$۵٫۷۸۷ \times ۱۰^{-۴}$
یک پوند بر اینچ مکعب	=	۵۳٫۷۱	$۲٫۷۶۸ \times ۱۰^{۴}$	۲۷٫۶۸	۱۷۲۸	۱

زمان

		y	d	h	min	s
یک سال	=	۱	۳۶۵٫۲	$۸٫۷۶۶ \times ۱۰^{۳}$	$۵٫۲۵۹ \times ۱۰^{۵}$	$۳٫۱۵۶ \times ۱۰^{۷}$
یک روز	=	$۲٫۷۳۸ \times ۱۰^{-۳}$	۱	۲۴	۱۴۴۰	$۸٫۶۴۰ \times ۱۰^{۴}$
یک ساعت	=	$۱٫۱۴۱ \times ۱۰^{-۴}$	$۴٫۱۶۷ \times ۱۰^{-۲}$	۱	۶۰	۳۶۰۰
یک دقیقه	=	$۱٫۹۰۱ \times ۱۰^{-۶}$	$۶٫۹۴۴ \times ۱۰^{-۴}$	$۱٫۶۶۷ \times ۱۰^{-۲}$	۱	۶۰
یک **ثانیه**	=	$۳٫۱۶۹ \times ۱۰^{-۸}$	$۱٫۱۵۷ \times ۱۰^{-۵}$	$۲٫۷۷۸ \times ۱۰^{-۴}$	$۱٫۶۶۷ \times ۱۰^{-۲}$	۱

تندی

		ft/s	km/h	m/s	mi/h	cm/s
یک فوت بر ثانیه	=	۱	۱٫۰۹۷	۰٫۳۰۴۸	۰٫۶۸۱۸	۳۰٫۴۸
یک کیلومتر بر ثانیه	=	۰٫۹۱۱۳	۱	۰٫۲۷۷۸	۰٫۶۲۱۴	۲۷٫۷۸
یک متر بر ثانیه	=	۳٫۲۸۱	۳٫۶	۱	۲٫۲۳۷	۱۰۰
یک مایل بر ساعت	=	۱٫۴۶۷	۱٫۶۰۹	۰٫۴۴۷۰	۱	۴۴٫۷۰
یک سانتی‌متر بر ثانیه	=	$۳٫۲۸۱ \times ۱۰^{-۲}$	$۳٫۶ \times ۱۰^{-۲}$	۰٫۰۱	$۲٫۲۳۷ \times ۱۰^{-۲}$	۱

یک گره = یک مایل دریایی بر ساعت = ۱٫۶۸۸ft/s　　　یک مایل بر دقیقه = ۸۸٫۰۰ft/s = ۶۰٫۰۰mi/h

نیرو

یکاهای نیرو که در ناحیهٔ خاکستری درج شده‌اند، اکنون کمتر به کار می‌روند. مثال: یک گرم ـ نیرو (مساوی با ۱gf) نیروی گرانشی وارد بر شیئی به جرم یک گرم است در محلی که g دارای مقدار استاندارد $۹٫۸۰۶۶۵m/s^{۲}$ است.

		dyne	N	lb	pdl	gf	kgf
یک دین	=	۱	$۱۰^{-۵}$	$۲٫۲۴۸ \times ۱۰^{-۶}$	$۷٫۲۳۳ \times ۱۰^{-۵}$	$۱٫۰۲۰ \times ۱۰^{-۳}$	$۱٫۰۲۰ \times ۱۰^{-۶}$
یک نیوتون	=	$۱۰^{۵}$	۱	۰٫۲۲۴۸	۷٫۲۳۳	۱۰۲٫۰	۰٫۱۰۲۰
یک پوند	=	$۴٫۴۴۸ \times ۱۰^{۵}$	۴٫۴۴۸	۱	۳۲٫۱۷	۴۵۳٫۶	۰٫۴۵۳۶
یک پوندال	=	$۱٫۳۸۳ \times ۱۰^{۴}$	۰٫۱۳۸۳	$۳٫۱۰۸ \times ۱۰^{-۲}$	۱	۱۴٫۱۰	$۱٫۴۱۰ \times ۱۰^{-۲}$
یک گرم ـ نیرو	=	۹۸۰٫۷	$۹٫۸۰۷ \times ۱۰^{-۳}$	$۲٫۲۰۵ \times ۱۰^{-۳}$	$۷٫۰۹۳ \times ۱۰^{-۲}$	۱	۰٫۰۰۱
یک کیلوگرم ـ نیرو	=	$۹٫۸۰۷ \times ۱۰^{۵}$	۹٫۸۰۷	۲٫۲۰۵	۷۰٫۹۳	۱۰۰۰	۱

یک تن = ۲۰۰۰lb

فشار

		atm	$dyne/cm^{۲}$	اینچ آب	cmHg	Pa	$lb/in^{۲}$	$lb/ft^{۲}$
یک اتمسفر	=	۱	$۱٫۰۱۳ \times ۱۰^{۶}$	۴۰۶٫۸	۷۶	$۱٫۰۱۳ \times ۱۰^{۵}$	۱۴٫۷۰	۲۱۱۶
یک دین برسانتی‌متر مربع	=	$۹٫۸۶۹ \times ۱۰^{-۷}$	۱	$۴٫۰۱۵ \times ۱۰^{-۴}$	$۷٫۵۰۱ \times ۱۰^{-۵}$	۰٫۱	$۱٫۴۵۰ \times ۱۰^{-۵}$	$۲٫۰۸۹ \times ۱۰^{-۳}$
یک اینچ آب* در ۴°C	=	$۲٫۴۵۸ \times ۱۰^{-۳}$	۲۴۹۱	۱	۰٫۱۸۶۸	۲۴۹٫۱	$۳٫۶۱۳ \times ۱۰^{-۲}$	۵٫۲۰۴
یک سانتی‌متر جیوه* در ۰°	=	$۱٫۳۱۶ \times ۱۰^{-۲}$	$۱٫۳۳۳ \times ۱۰^{۴}$	۵٫۳۵۳	۱	۱۳۳۳	۰٫۱۹۳۴	۲۷٫۸۵
یک پاسکال	=	$۹٫۸۶۹ \times ۱۰^{-۶}$	۱۰	$۴٫۰۱۵ \times ۱۰^{-۳}$	$۷٫۵۰۱ \times ۱۰^{-۴}$	۱	$۱٫۴۵۰ \times ۱۰^{-۴}$	$۲٫۰۸۹ \times ۱۰^{-۲}$
یک پوند بر اینچ مربع	=	$۶٫۸۰۵ \times ۱۰^{-۲}$	$۶٫۸۹۵ \times ۱۰^{۴}$	۲۷٫۶۸	۵٫۱۷۱	$۶٫۸۹۵ \times ۱۰^{۳}$	۱	۱۴۴
یک پوند بر فوت مربع	=	$۴٫۷۲۵ \times ۱۰^{-۴}$	۴۷۸٫۸	۰٫۱۹۲۲	$۳٫۵۹۱ \times ۱۰^{-۲}$	۴۷٫۸۸	$۶٫۹۴۴ \times ۱۰^{-۳}$	۱

* در محلی که شتاب گرانشی دارای مقدار استاندارد $۹٫۸۰۶۶۵m/s^{۲}$ است.

یک بار = $۱۰^{۶}dyne/cm^{۲}$ = ۰٫۱MPa　　　یک میلی‌بار = $۱۰^{۳}dyne/cm^{۲}$ = $۱۰^{۲}Pa$　　　یک تور = یک میلی‌متر جیوه

انرژی، کار، گرما

کمیت‌هایی که در ناحیهٔ خاکستری درج شده‌اند، یکاهای انرژی نیستند، اما در اینجا برای اطلاعات بیشتر ذکر شده‌اند. این کمیت‌ها از فرمول هم ارزی نسبیتی جرم ـ انرژی، $E = mc^{۲}$، ناشی می‌شوند و انرژی آزاد شده را هنگام تبدیل کامل یک کیلوگرم یا یک یکای جرم اتمی یکی شده (u) انرژی (دو ردیف پایین)، یا جرم تبدیل شده به یکی از یکاهای انرژی (دو ستون سمت چپ) را به دست می‌دهند.

	Btu	erg	ft . lb	hp . h	J	cal	kW . h	eV	MeV	kg	u
یکای بریتانیایی گرما =	۱	$۱٫۰۵۵ \times ۱۰^{۱۰}$	۷۷۷٫۹	$۳٫۹۲۹ \times ۱۰^{-۴}$	۱۰۵۵	۲۵۲٫۰	$۲٫۹۳۰ \times ۱۰^{-۴}$	$۶٫۵۸۵ \times ۱۰^{۲۱}$	$۶٫۵۸۵ \times ۱۰^{۱۵}$	$۱٫۱۷۴ \times ۱۰^{-۱۴}$	$۷٫۰۷۰ \times ۱۰^{۱۲}$
یک ارگ =	$۹٫۴۸۱ \times ۱۰^{-۱۱}$	۱	$۷٫۳۷۶ \times ۱۰^{-۸}$	$۳٫۷۲۵ \times ۱۰^{-۱۴}$	$۱۰^{-۷}$	$۲٫۳۸۹ \times ۱۰^{-۸}$	$۲٫۷۷۸ \times ۱۰^{-۱۴}$	$۶٫۲۴۲ \times ۱۰^{۱۱}$	$۶٫۲۴۲ \times ۱۰^{۵}$	$۱٫۱۱۳ \times ۱۰^{-۲۴}$	۶۷۰٫۲
یک فوت ـ پوند =	$۱٫۲۸۵ \times ۱۰^{-۳}$	$۱٫۳۵۶ \times ۱۰^{۷}$	۱	$۵٫۰۵۱ \times ۱۰^{-۷}$	۱٫۳۵۶	۰٫۳۲۳۸	$۳٫۷۶۶ \times ۱۰^{-۷}$	$۸٫۴۶۴ \times ۱۰^{۱۸}$	$۸٫۴۶۴ \times ۱۰^{۱۲}$	$۱٫۵۰۹ \times ۱۰^{-۱۷}$	$۹٫۰۳۷ \times ۱۰^{۹}$
یک قوه اسب ـ ساعت =	۲۵۴۵	$۲٫۶۸۵ \times ۱۰^{۱۳}$	$۱٫۹۸۰ \times ۱۰^{۶}$	۱	$۲٫۶۸۵ \times ۱۰^{۶}$	$۶٫۴۱۳ \times ۱۰^{۵}$	۰٫۷۴۵۷	$۱٫۶۷۶ \times ۱۰^{۲۵}$	$۱٫۶۷۶ \times ۱۰^{۱۹}$	$۲٫۹۸۸ \times ۱۰^{-۱۱}$	$۱٫۷۹۹ \times ۱۰^{۱۶}$
یک ژول =	$۹٫۴۸۱ \times ۱۰^{-۴}$	$۱۰^{۷}$	۰٫۷۳۷۶	$۳٫۷۲۵ \times ۱۰^{-۷}$	۱	۰٫۲۳۸۹	$۲٫۷۷۸ \times ۱۰^{-۷}$	$۶٫۲۴۲ \times ۱۰^{۱۸}$	$۶٫۲۴۲ \times ۱۰^{۱۲}$	$۱٫۱۱۳ \times ۱۰^{-۱۷}$	$۶٫۷۰۲ \times ۱۰^{۹}$
یک کالری =	$۳٫۹۶۹ \times ۱۰^{-۳}$	$۴٫۱۸۶ \times ۱۰^{۷}$	۳٫۰۸۸	$۱٫۵۶۰ \times ۱۰^{-۶}$	۴٫۱۸۶	۱	$۱٫۱۶۳ \times ۱۰^{-۶}$	$۲٫۶۱۴ \times ۱۰^{۱۹}$	$۲٫۶۱۳ \times ۱۰^{۱۳}$	$۴٫۶۶۰ \times ۱۰^{-۱۷}$	$۲٫۸۰۶ \times ۱۰^{۱۰}$
یک کیلووات ـ ساعت =	۳۴۱۳	$۳٫۶۰۰ \times ۱۰^{۱۳}$	$۲٫۶۵۵ \times ۱۰^{۶}$	۱٫۳۴۱	$۳٫۶۰۰ \times ۱۰^{۶}$	$۸٫۶۰۰ \times ۱۰^{۵}$	۱	$۲٫۲۴۷ \times ۱۰^{۲۵}$	$۲٫۲۴۷ \times ۱۰^{۱۹}$	$۴٫۰۰۷ \times ۱۰^{-۱۱}$	$۲٫۴۱۳ \times ۱۰^{۱۶}$
یک الکترون ولت =	$۱٫۵۱۹ \times ۱۰^{-۲۲}$	$۱٫۶۰۲ \times ۱۰^{-۱۲}$	$۱٫۱۸۲ \times ۱۰^{-۱۹}$	$۵٫۹۶۷ \times ۱۰^{-۲۶}$	$۱٫۶۰۲ \times ۱۰^{-۱۹}$	$۳٫۸۲۷ \times ۱۰^{-۲۰}$	$۴٫۴۵۰ \times ۱۰^{-۲۶}$	۱	$۱۰^{-۶}$	$۱٫۷۸۳ \times ۱۰^{-۳۶}$	$۱٫۰۷۴ \times ۱۰^{-۹}$
یک میلیون eV =	$۱٫۵۱۹ \times ۱۰^{-۱۶}$	$۱٫۶۰۲ \times ۱۰^{-۶}$	$۱٫۱۸۲ \times ۱۰^{-۱۳}$	$۵٫۹۶۷ \times ۱۰^{-۲۰}$	$۱٫۶۰۲ \times ۱۰^{-۱۳}$	$۳٫۸۲۷ \times ۱۰^{-۱۴}$	$۴٫۴۵۰ \times ۱۰^{-۲۰}$	$۱۰^{۶}$	۱	$۱٫۷۸۳ \times ۱۰^{-۳۰}$	$۱٫۰۷۴ \times ۱۰^{-۳}$
یک کیلوگرم =	$۸٫۵۲۱ \times ۱۰^{۱۳}$	$۸٫۹۸۷ \times ۱۰^{۲۳}$	$۶٫۶۲۹ \times ۱۰^{۱۶}$	$۳٫۳۴۸ \times ۱۰^{۱۰}$	$۸٫۹۸۷ \times ۱۰^{۱۶}$	$۲٫۱۴۶ \times ۱۰^{۱۶}$	$۲٫۴۹۷ \times ۱۰^{۱۰}$	$۵٫۶۱۰ \times ۱۰^{۳۵}$	$۵٫۶۱۰ \times ۱۰^{۲۹}$	۱	$۶٫۰۲۲ \times ۱۰^{۲۶}$
یکای جرم اتمی (u) =	$۱٫۴۱۵ \times ۱۰^{-۱۳}$	$۱٫۴۹۲ \times ۱۰^{-۳}$	$۱٫۱۰۱ \times ۱۰^{-۱۰}$	$۵٫۵۵۹ \times ۱۰^{-۱۷}$	$۱٫۴۹۲ \times ۱۰^{-۱۰}$	$۳٫۵۶۴ \times ۱۰^{-۱۱}$	$۴٫۱۴۶ \times ۱۰^{-۱۷}$	$۹٫۳۲ \times ۱۰^{۸}$	۹۳۲٫۰	$۱٫۶۶۱ \times ۱۰^{-۲۷}$	۱

توان

	Btu/h	ft.lb/s	hp	cal/s	kW	W
یک یکای بریتانیایی گرما بر ساعت =	۱	۰٫۲۱۶۱	$۳٫۹۲۹ \times ۱۰^{-۴}$	$۶٫۹۹۸ \times ۱۰^{-۲}$	$۲٫۹۳۰ \times ۱۰^{-۴}$	۰٫۲۹۳۰
یک فوت. پوند بر ثانیه =	۴٫۶۲۸	۱	$۱٫۸۱۸ \times ۱۰^{-۳}$	۰٫۳۲۳۹	$۱٫۳۵۶ \times ۱۰^{-۳}$	۱٫۳۵۶
یک قوه اسب =	۲۵۴۵	۵۵۰	۱	۱۷۸٫۱	۰٫۷۴۵۷	۷۴۵٫۷
یک کالری بر ثانیه =	۱۴٫۲۹	۳٫۰۸۸	$۵٫۶۱۵ \times ۱۰^{-۳}$	۱	$۴٫۱۸۶ \times ۱۰^{-۳}$	۴٫۱۸۶
یک کیلو وات =	۳۴۱۳	۷۳۷٫۶	۱٫۳۴۱	۲۳۸٫۹	۱	۱۰۰۰
یک وات =	۳٫۴۱۳	۰٫۷۳۷۶	$۱٫۳۴۱ \times ۱۰^{-۳}$	۰٫۲۳۸۹	۰٫۰۰۱	۱

میدان مغناطیسی

	گاؤس	تسلا	میلی گاؤس
یک گاؤس =	۱	$۱۰^{-۴}$	۱۰۰۰
یک تسلا =	$۱۰^{۴}$	۱	$۱۰^{۷}$
یک میلی گاؤس =	۰٫۰۰۱	$۱۰^{-۷}$	۱

یک تسلا = یک وبر بر متر مربع

شار مغناطیسی

	ماکسول	وبر
یک ماکسول =	۱	$۱۰^{-۸}$
یک وبر =	$۱۰^{۸}$	۱

پیوست ث فرمول‌های ریاضی

هندسه

در دایره‌ای به شعاع r: محیط $= ۲\pi r$ ؛ مساحت $= \pi r^{۲}$

در کره‌ای به شعاع r: مساحت $= ۴\pi r^{۲}$ ؛ حجم $= \frac{۴}{۳}\pi r^{۳}$

در استوانهٔ قائمی به شعاع قاعدهٔ r و ارتفاع h:

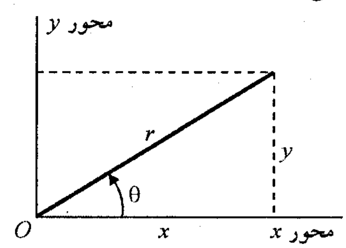
مساحت $= ۲\pi r^{۲} + ۲\pi rh$ ؛ حجم $= \pi r^{۲}h$

در مثلثی به قاعدهٔ a و ارتفاع h: مساحت $= \frac{۱}{۲}ah$

فرمول معادلهٔ درجه دوم

اگر $ax^{۲} + bx + c = ۰$، داریم $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^{۲} - ۴ac}}{۲a}$.

تابع‌های مثلثاتی زاویهٔ θ

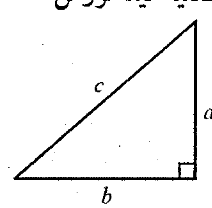


$\sin\theta = \frac{y}{r}$ $\cos\theta = \frac{x}{r}$

$\tan\theta = \frac{y}{x}$ $\cot\theta = \frac{x}{y}$

$\sec\theta = \frac{r}{x}$ $\csc\theta = \frac{r}{y}$

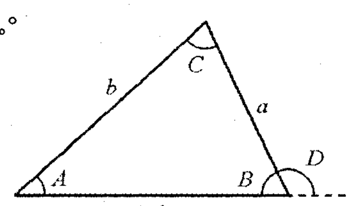
قضیهٔ فیثاغورس



در این مثلث راستگوشه: $a^{۲} + b^{۲} = c^{۲}$

رابطه‌های مربوط به مثلث

A، B و C زاویه‌های مثلث و a، b و c ضلع‌های روبه‌رو به این زاویه‌ها هستند.



زاویه‌های $A + B + C = ۱۸۰^\circ$

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

$c^{۲} = a^{۲} + b^{۲} - ۲ab\cos C$

زاویهٔ خارجی $D = A + C$

علامت‌ها و نمادهای ریاضی

= مساوی است با

≈ تقریباً مساوی است با

~ مرتبهٔ بزرگی برابر است با

≠ مساوی نیست با

≡ متحد است با، تعریف می‌شود به صورت ...

> بزرگ‌تر است از (>> خیلی بزرگ‌تر است از)

< کوچک‌تر است از (<< خیلی کوچک‌تر است از)

± به علاوه یا منها

∝ متناسب است با

∑ مجموع

x_{avg} مقدار متوسط x

اتحادهای مثلثاتی

$\sin(۹۰^\circ - \theta) = \cos\theta$

$\cos(۹۰^\circ - \theta) = \sin\theta$

$\sin\theta / \cos\theta = \tan\theta$

$\sin^{۲}\theta + \cos^{۲}\theta = ۱$

$\sec^{۲}\theta - \tan^{۲}\theta = ۱$

$\csc^{۲}\theta - \cot^{۲}\theta = ۱$

$\sin ۲\theta = ۲\sin\theta\cos\theta$

$\cos ۲\theta = \cos^{۲}\theta - \sin^{۲}\theta = ۲\cos^{۲}\theta - ۱ = ۱ - ۲\sin^{۲}\theta$

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{۱ \mp \tan\alpha\tan\beta}$

$\sin\alpha \pm \sin\beta = ۲\sin\frac{۱}{۲}(\alpha \pm \beta)\cos\frac{۱}{۲}(\alpha \mp \beta)$

$\cos\alpha + \cos\beta = ۲\cos\frac{۱}{۲}(\alpha + \beta)\cos\frac{۱}{۲}(\alpha - \beta)$

$\cos\alpha - \cos\beta = -۲\sin\frac{۱}{۲}(\alpha + \beta)\sin\frac{۱}{۲}(\alpha - \beta)$

قضیهٔ دو جمله‌ای

$$(۱ + x)^n = ۱ + \frac{nx}{۱!} + \frac{n(n-۱)}{۲!}x^۲ + \ldots \qquad (x^۲ < ۱)$$

بسط نمایی

$$e^x = ۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!} + \ldots$$

بسط لگاریتمی

$$\ln(۱ + x) = x - \frac{۱}{۲}x^۲ + \frac{۱}{۳}x^۳ - \ldots \qquad (|x| < ۱)$$

بسط تابع‌های مثلثاتی (θ برحسب رادیان است)

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^۳}{۳!} + \frac{\theta^۵}{۵!} - \ldots$$

$$\cos\theta = ۱ - \frac{\theta^۲}{۲!} + \frac{\theta^۴}{۴!} - \ldots$$

$$\tan\theta = \theta + \frac{\theta^۳}{۳} + \frac{۲\theta^۵}{۱۵} + \ldots$$

قاعدهٔ کرامر

پاسخ‌های دو معادلهٔ همزمان با مجهول‌های x و y:

$$a_۱x + b_۱y = c_۱ \quad \text{و} \quad a_۲x + b_۲y = c_۲$$

عبارت‌اند از:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_۱ & b_۱ \\ c_۲ & b_۲ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_۱ & b_۱ \\ a_۲ & b_۲ \end{vmatrix}} = \frac{c_۱b_۲ - c_۲b_۱}{a_۱b_۲ - a_۲b_۱}$$

و

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_۱ & c_۱ \\ a_۲ & c_۲ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_۱ & b_۱ \\ a_۲ & b_۲ \end{vmatrix}} = \frac{a_۱c_۲ - a_۲c_۱}{a_۱b_۲ - a_۲b_۱}$$

ضرب‌های بردارها

فرض می‌کنیم $\hat{i}$، $\hat{j}$، و $\hat{k}$، بردارهای یکه در راستاهای x، y، و z هستند. پس

$$\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = ۱ \qquad \hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{i} = ۰$$

$$\hat{i}\times\hat{i} = \hat{j}\times\hat{j} = \hat{k}\times\hat{k} = ۰$$

$$\hat{i}\times\hat{j} = \hat{k} \qquad \hat{j}\times\hat{k} = \hat{i} \qquad \hat{k}\times\hat{i} = \hat{j}$$

هر بردار مانند $\vec{a}$ را که مؤلفه‌های آن (a_x ، a_y ، و a_z) در راستای محورهای x، y، و z هستند، می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$$

فرض می‌کنیم $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ بردارهای اختیاری با بزرگی‌های a، b، و c هستند. در این صورت

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b}) + (\vec{a}\times\vec{c})$$

$$(s\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(s\vec{b}) = s(\vec{a}\times\vec{b}) \qquad (s = \text{نرده‌ای})$$

فرض می‌کنیم θ زاویهٔ کوچک‌تر میان $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد. در آن صورت

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = ab\cos\theta$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

$$= (a_yb_z - b_ya_z)\hat{i} + (a_zb_x - b_za_x)\hat{j} + (a_xb_y - b_xa_y)\hat{k}$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = ab\sin\theta$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$$

مشتق‌ها و انتگرال‌ها

در رابطه‌های زیر، حرفهای u و v تابع‌هایی از x هستند و a و m مقادیری ثابت‌اند. به هر یک از انتگرال‌ها باید یک ثابت انتگرال‌گیری اختیاری اضافه شود*.

۱. $\frac{dx}{dx} = 1$

۲. $\frac{d}{dx}(au) = a\frac{du}{dx}$

۳. $\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$

۴. $\frac{d}{dx}x^m = mx^{m-1}$

۵. $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$

۶. $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

۷. $\frac{d}{dx}e^x = e^x$

۸. $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$

۹. $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$

۱۰. $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$

۱۱. $\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$

۱۲. $\frac{d}{dx}\sec x = \tan x \sec x$

۱۳. $\frac{d}{dx}\csc x = -\cot x \csc x$

۱۴. $\frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx}$

۱۵. $\frac{d}{dx}\sin u = \cos u\frac{du}{dx}$

۱۶. $\frac{d}{dx}\cos u = -\sin u\frac{du}{dx}$

---

۱. $\int dx = x$

۲. $\int au\,dx = a\int u\,dx$

۳. $\int (u+v)dx = \int u\,dx + \int v\,dx$

۴. $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \qquad (m \neq -1)$

۵. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x|$

۶. $\int u\frac{dv}{dx}dx = uv - \int v\frac{du}{dx}dx$

۷. $\int e^x dx = e^x$

۸. $\int \sin x\,dx = -\cos x$

۹. $\int \cos x\,dx = \sin x$

۱۰. $\int \tan x\,dx = \ln|\sec x|$

۱۱. $\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x$

۱۲. $\int e^{-ax}dx = -\frac{1}{a}e^{-ax}$

۱۳. $\int xe^{-ax}dx = -\frac{1}{a^2}(ax+1)e^{-ax}$

۱۴. $\int x^2e^{-ax}dx = -\frac{1}{a^3}(a^2x^2+2ax+2)e^{-ax}$

۱۵. $\int_0^\infty x^n e^{-ax}dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$

۱۶. $\int_0^\infty x^{2n}e^{-ax^2}dx = \frac{1\times 3\times 5\times \ldots \times(2n-1)}{2^{n+1}a^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

۱۷. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$

۱۸. $\int \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}}$

۱۹. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{a^2(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}}$

۲۰. $\int_0^\infty x^{2n+1}e^{-ax^2}dx = \frac{n!}{2a^{n+1}} \qquad (a>0)$

۲۱. $\int \frac{x\,dx}{x+d} = x - d\ln(x+d)$

---

* جدول‌های کامل‌تر در کتاب زیر آمده‌اند:
The *Handbook of Chemistry and Physics* (CRC Press Inc.)

پیوست ج جدول خواص عنصرهای شیمیایی

همهٔ خواص فیزیکی، به جز در موارد مشخص شده، مربوط به فشار یک اتمسفر هستند.

عنصر	نماد	عدد اتمی Z	جرم مولی (g/mol)	چگالی در ۲۰°C (g/cm^3)	نقطهٔ ذوب (°C)	نقطهٔ جوش (°C)	گرمای ویژه در ۲۵°C [J/(g.°C)]
آرگون	Ar	۱۸	۳۹ر۹۴۸	۱ر۶۶۲۶ × ۱۰$^{-۳}$	−۱۸۹ر۴	−۱۸۵ر۸	۰ر۵۲۳
آلومینیوم	Al	۱۳	۲۶ر۹۸۱۵	۲ر۶۹۹	۶۶۰	۲۴۵۰	۰ر۹۰۰
آنتیموان	Sb	۵۱	۱۲۱ر۷۵	۶ر۶۹۱	۶۳۰ر۵	۱۳۸۰	۰ر۲۰۵
آهن	Fe	۲۶	۵۵ر۸۴۷	۷ر۸۷۴	۱۵۳۶ر۵	۳۰۰۰	۰ر۴۴۷
اِربیوم	Er	۶۸	۱۶۷ر۲۶	۹ر۱۵	۱۵۲۲	۲۶۳۰	۰ر۱۶۷
ارسنیک	As	۳۳	۷۴ر۹۲۱۶	۵ر۷۸	۸۱۷(۲۸atm)	۶۱۳	۰ر۳۳۱
اروپیوم	Eu	۶۳	۱۵۱ر۹۶	۵ر۲۴۳	۸۱۷	۱۴۹۰	۰ر۱۶۳
استاتین	At	۸۵	(۲۱۰)	–	(۳۰۲)	–	–
استرونسیوم	Sr	۳۸	۸۷ر۶۲	۲ر۵۴	۷۶۸	۱۳۸۰	۰ر۷۳۷
اُسمیوم	Os	۷۶	۱۹۰ر۲	۲۲ر۵۹	۳۰۲۷	۵۵۰۰	۰ر۱۳۰
اکتینیوم	Ac	۸۹	(۲۲۷)	۱۰ر۰۶	۱۳۲۳	(۳۴۷۳)	۰ر۰۹۲
اکسیژن	O	۸	۱۵ر۹۹۹۴	۱ر۳۳۱۸ × ۱۰$^{-۳}$	−۲۱۸ر۸۰	−۱۸۳ر۰	۰ر۹۱۳
امِریشیوم	Am	۹۵	(۲۴۳)	۱۳ر۶۷	۱۵۴۱	–	–
اورانیوم	U	۹۲	(۲۳۸)	۱۸ر۹۵	۱۱۳۲	۳۸۱۸	۰ر۱۱۷
ایتربیوم	Yb	۷۰	۱۷۳ر۰۴	۶ر۹۶۵	۸۲۴	۱۵۳۰	۰ر۱۵۵
ایتریوم	Y	۳۹	۸۸ر۹۰۵	۴ر۴۶۹	۱۵۲۶	۳۰۳۰	۰ر۲۹۷
ایریدیوم	Ir	۷۷	۱۹۲ر۲	۲۲ر۵	۲۴۴۷	(۵۳۰۰)	۰ر۱۳۰
ایندیوم	In	۴۹	۱۱۴ر۸۲	۷ر۳۱	۱۵۶ر۶۳۴	۲۰۰۰	۰ر۲۳۳
اینشتینیوم	Es	۹۹	(۲۵۴)	–	–	–	–
باریوم	Ba	۵۶	۱۳۷ر۳۴	۳ر۵۹۴	۷۲۹	۱۶۴۰	۰ر۲۰۵
برکلیوم	Bk	۹۷	(۲۴۷)	۱۴ر۷۹	–	–	–
بروم	Br	۳۵	۷۹ر۹۰۹	۳ر۱۲ (مایع)	−۷ر۲	۵۸	۰ر۲۹۳
بریلیوم	Be	۴	۹ر۰۱۲۲	۱ر۸۴۸	۱۲۸۷	۲۷۷۰	۱ر۸۳
بور	B	۵	۱۰ر۸۱۱	۲ر۳۴	۲۰۳۰	–	۱ر۱۱
بوریوم	Bh	۱۰۷	۲۶۲ر۱۲	–	–	–	–
بیسموت	Bi	۸۳	۲۰۸ر۹۸۰	۹ر۷۴۷	۲۷۱ر۳۷	۱۵۶۰	۰ر۱۲۲
پالادیوم	Pd	۴۶	۱۰۶ر۴	۱۲ر۰۲	۱۵۵۲	۳۹۸۰	۰ر۲۴۳
پتاسیوم	K	۱۹	۳۹ر۱۰۲	۰ر۸۶۲	۶۳ر۲۰	۷۶۰	۰ر۷۵۸
پرازئودیمیوم	Pr	۵۹	۱۴۰ر۹۰۷	۶ر۷۷۳	۹۳۱	۳۰۲۰	۰ر۱۹۷
پروتاکتینیوم	Pa	۹۱	(۲۳۱)	۱۵ر۳۷ (تخمینی)	(۱۲۳۰)	–	–
پرومتیوم	Pm	۶۱	(۱۴۵)	۷ر۲۲	(۱۰۲۷)	–	–

عنصر	نماد	عدد اتمی Z	جرم مولی (g/mol)	چگالی در ۲۰°C (g/cm³)	نقطهٔ ذوب (°C)	نقطهٔ جوش (°C)	گرمای ویژه در ۲۵°C [J/(g.°C)]
پلاتین	Pt	۷۸	۱۹۵ر۰۹	۲۱ر۴۵	۱۷۶۹	۴۵۳۰	۰ر۱۳۴
پلوتونیوم	Pu	۹۴	(۲۴۴)	۱۹ر۸	۶۴۰	۳۲۳۵	۰ر۱۳۰
پلونیوم	Po	۸۴	(۲۱۰)	۹ر۳۲	۲۵۴	–	–
تالیوم	Tl	۸۱	۲۰۴ر۳۷	۱۱ر۸۵	۳۰۴	۱۴۵۷	۰ر۱۳۰
تانتال	Ta	۷۳	۱۸۰ر۹۴۸	۱۶ر۶	۳۰۱۴	۵۴۲۵	۰ر۱۳۸
تربیوم	Tb	۶۵	۱۵۸ر۹۲۴	۸ر۲۲۹	۱۳۵۷	۲۵۳۰	۰ر۱۸۰
تکنیسیوم	Tc	۴۳	(۹۹)	۱۱ر۴۶	۲۲۰۰	–	۰ر۲۰۹
تلور	Te	۵۲	۱۲۷ر۶۰	۶ر۲۴	۴۴۹ر۵	۹۹۰	۰ر۲۰۱
تنگستن	W	۷۴	۱۸۳ر۸۵	۱۹ر۳	۳۳۸۰	۵۹۳۰	۰ر۱۳۴
توریوم	Th	۹۰	(۲۳۲)	۱۱ر۷۲	۱۷۵۵	(۳۸۵۰)	۰ر۱۱۷
تولیوم	Tm	۶۹	۱۶۸ر۹۳۴	۹ر۳۲	۱۵۴۵	۱۷۲۰	۰ر۱۵۹
تیتان	Ti	۲۲	۴۷ر۹۰	۴ر۵۴	۱۶۷۰	۳۲۶۰	۰ر۵۲۳
جیوه	Hg	۸۰	۲۰۰ر۵۹	۱۳ر۵۵	-۳۸ر۸۷	۳۵۷	۰ر۱۳۸
دوبنیوم	Db	۱۰۵	۲۶۲ر۱۱۴	–	–	–	–
دیسپروزیوم	Dy	۶۶	۱۶۲ر۵۰	۸ر۵۵	۱۴۰۹	۲۳۳۰	۰ر۱۷۲
رادرفوردیوم	Rf	۱۰۴	۲۶۱ر۱۱	–	–	–	–
رادون	Rn	۸۶	(۲۲۲)	۹ر۹۶ × ۱۰^-۳ (۰°C)	(-۷۱)	-۶۱ر۸	۰ر۰۹۲
رادیوم	Ra	۸۸	(۲۲۶)	۵ر۰	۷۰۰	–	–
رِنیوم	Re	۷۵	۱۸۶ر۲	۲۱ر۰۲	۳۱۸۰	۵۹۰۰	۰ر۱۳۴
روبیدیوم	Rb	۳۷	۸۵ر۴۷	۱ر۵۳۲	۳۹ر۴۹	۶۸۸	۰ر۳۶۴
روتنیوم	Ru	۴۴	۱۰۱ر۱۰۷	۱۲ر۳۷	۲۲۵۰	۴۹۰۰	۰ر۲۳۹
رودیوم	Rh	۴۵	۱۰۲ر۹۰۵	۱۲ر۴۱	۱۹۶۳	۴۵۰۰	۰ر۲۴۳
روی	Zn	۳۰	۶۵ر۳۷	۷ر۱۳۳	۴۱۹ر۵۸	۹۰۶	۰ر۳۸۹
زیرکنیوم	Zr	۴۰	۹۱ر۲۲	۶ر۵۰۶	۱۸۵۲	۳۵۸۰	۰ر۲۷۶
ژرمانیوم	Ge	۳۲	۷۲ر۵۹	۵ر۳۲۳	۹۳۷ر۲۵	۲۸۳۰	۰ر۳۲۲
ساماریوم	Sm	۶۲	۱۵۰ر۳۵	۷ر۵۲	۱۰۷۲	۱۶۳۰	۰ر۱۹۷
سدیوم	Na	۱۱	۲۲ر۹۸۹۸	۰ر۹۷۱۲	۹۷ر۸۵	۸۹۲	۱ر۲۳
سرب	Pb	۸۲	۲۰۷ر۱۹	۱۱ر۳۵	۳۲۷ر۴۵	۱۷۲۵	۰ر۱۲۹
سِریوم	Ce	۵۸	۱۴۰ر۱۲	۶ر۷۶۸	۸۰۴	۳۴۷۰	۰ر۱۸۸
سزیوم	Cs	۵۵	۱۳۲ر۹۰۵	۱ر۸۷۳	۲۸ر۴۰	۶۹۰	۰ر۲۴۳
سکاندیوم	Sc	۲۱	۴۴ر۹۵۶	۲ر۹۹	۱۵۳۹	۲۷۳۰	۰ر۵۶۹
سلنیوم	Se	۳۴	۷۸ر۹۶	۴ر۷۹	۲۲۱	۶۸۵	۰ر۳۱۸
سیبورگیوم	Sg	۱۰۶	۲۶۳ر۱۱۸	–	–	–	–
سیلیسیوم	Si	۱۴	۲۸ر۰۸۶	۲ر۳۳	۱۴۱۲	۲۶۸۰	۰ر۷۱۲
طلا	Au	۷۹	۱۹۶ر۹۶۷	۱۹ر۳۲	۱۰۶۴ر۴۳	۲۹۷۰	۰ر۱۳۱
فرانسیوم	Fr	۸۷	(۲۲۳)	–	(۲۷)	–	–
فِرمیوم	Fm	۱۰۰	(۲۳۷)	–	–	–	–

عنصر	نماد	عدد اتمی Z	جرم مولی (g/mol)	چگالی در ۲۰°C ($g/cm^۳$)	نقطهٔ ذوب (°C)	نقطهٔ جوش (°C)	گرمای ویژه در ۲۵°C [J/(g.°C)]
فسفر	P	۱۵	۳۰ر۹۷۳۸	۱ر۸۳	۴۴ر۲۵	۲۸۰	۰ر۷۴۱
فلوئور	F	۹	۱۸ر۹۹۸۴	$۱ر۶۹۶ \times ۱۰^{-۳}$(۰°C)	-۲۱۹ر۶	-۱۱۸ر۲	۰ر۷۵۳
قلع	Sn	۵۰	۱۱۸ر۶۹	۷ر۲۹۸۴	۲۳۱ر۶۸	۲۲۷۰	۰ر۲۲۶
کادمیوم	Cd	۴۸	۱۱۲ر۴۰	۸ر۶۵	۳۲۱ر۰۳	۷۶۵	۰ر۲۲۶
کالیفرنیوم	Cf	۹۸	(۲۵۱)	–	–	–	–
کبالت	Co	۲۷	۵۸ر۹۳۳۲	۸ر۸۵	۱۴۹۵	۲۹۰۰	۰ر۴۲۳
کربن	C	۶	۱۲ر۰۱۱۱۵	۲ر۲۶	۳۷۲۷	۴۸۳۰	۰ر۶۹۱
کروم	Cr	۲۴	۵۱ر۹۹۶	۷ر۱۹	۱۸۵۷	۲۶۶۵	۰ر۴۴۸
کریپتون	Kr	۳۶	۸۳ر۸۰	$۳ر۴۸۸ \times ۱۰^{-۳}$	-۱۵۷ر۳۷	-۱۵۲	۰ر۲۴۷
کلر	Cl	۱۷	۳۵ر۴۵۳	$۳ر۲۱۴ \times ۱۰^{-۳}$(۰°C)	-۱۰۱	-۳۴ر۷	۰ر۴۸۶
کلسیوم	Ca	۲۰	۴۰ر۰۸	۱ر۵۵	۸۳۸	۱۴۴۰	۰ر۶۲۴
کوریوم	Cm	۹۶	(۲۴۷)	۱۳ر۳	–	–	–
گادولینیوم	Gd	۶۴	۱۵۷ر۲۵	۷ر۹۰	۱۳۱۲	۲۷۳۰	۰ر۲۳۴
گالیوم	Ga	۳۱	۶۹ر۷۲	۵ر۹۰۷	۲۹ر۷۵	۲۲۳۷	۰ر۳۷۷
گزنون	Xe	۵۴	۱۳۱ر۳۰	$۵ر۴۹۵ \times ۱۰^{-۳}$	-۱۱۱ر۷۹	-۱۰۸	۰ر۱۵۹
گوگرد	S	۱۶	۳۲ر۰۶۴	۲ر۰۷	۱۱۹ر۰	۴۴۴ر۶	۰ر۷۰۷
لارنسیوم	Lr	۱۰۳	(۲۵۷)	–	–	–	–
لانتان	La	۵۷	۱۳۸ر۹۱	۶ر۱۸۹	۹۲۰	۳۴۷۰	۰ر۱۹۵
لوتسیوم	Lu	۷۱	۱۷۴ر۹۷	۹ر۸۴۹	۱۶۶۳	۱۹۳۰	۰ر۱۵۵
لیتیوم	Li	۳	۶ر۹۳۹	۰ر۵۳۴	۱۸۰ر۵۵	۱۳۰۰	۳ر۵۸
مس	Cu	۲۹	۶۳ر۵۴	۸ر۹۶	۱۰۸۳ر۴۰	۲۵۹۵	۰ر۳۸۵
مِندلویوم	Md	۱۰۱	(۲۵۶)	–	–	–	–
منگنز	Mn	۲۵	۵۴ر۹۳۸۰	۷ر۴۴	۱۲۴۴	۲۱۵۰	۰ر۴۸۱
منیزیوم	Mg	۱۲	۲۴ر۳۱۲	۱ر۷۳۸	۶۵۰	۱۱۰۷	۱ر۰۳
مولیبدن	Mo	۴۲	۹۵ر۹۴	۱۰ر۲۲	۲۶۱۷	۵۵۶۰	۰ر۲۵۱
مِیتنریوم	Mt	۱۰۹	(۲۶۶)	–	–	–	–
نئودیمیوم	Nd	۶۰	۱۴۴ر۲۴	۷ر۰۰۷	۱۰۱۶	۳۱۸۰	۰ر۱۸۸
نئون	Ne	۱۰	۲۰ر۱۸۳	$۰ر۸۳۸۷ \times ۱۰^{-۳}$	-۲۴۸ر۵۹۷	-۲۴۶ر۰	۱ر۰۳
نپتونیوم	Np	۹۳	(۲۳۷)	۲۰ر۲۵	۶۳۷	–	۱ر۲۶
نقره	Ag	۴۷	۱۰۷ر۸۷۰	۱۰ر۴۹	۹۶۰ر۸	۲۲۱۰	۰ر۲۳۴
نوبلیوم	No	۱۰۲	(۲۵۵)	–	–	–	–
نیتروژن	N	۷	۱۴ر۰۰۶۷	$۱ر۱۶۴۹ \times ۱۰^{-۳}$	-۲۱۰	-۱۹۵ر۳	۱ر۰۳
نیکل	Ni	۲۸	۵۸ر۷۱	۸ر۹۰۲	۱۴۵۳	۲۷۳۰	۰ر۴۴۴
نیوبیوم	Nb	۴۱	۹۲ر۹۰۶	۸ر۵۷	۲۴۶۸	۴۹۲۷	۰ر۲۶۴
وانادیوم	V	۲۳	۵۰ر۹۴۲	۶ر۱۱	۱۹۰۲	۳۴۰۰	۰ر۴۹۰
هَسیوم	Hs	۱۰۸	(۲۶۵)	–	–	–	–
هَفنیوم	Hf	۷۲	۱۷۸ر۴۹	۱۳ر۳۱	۲۲۲۷	۵۴۰۰	۰ر۱۴۴

عنصر	نماد	عدد اتمی Z	جرم مولی (g/mol)	چگالی در $۲۰^{\circ}C$ ($g/cm^{۳}$)	نقطهٔ ذوب (°C)	نقطهٔ جوش (°C)	گرمای ویژه در $۲۵^{\circ}C$ [J/(g.°C)]
هُلمیوم	Ho	۶۷	۱۶۴ر۹۳۰	۸ر۷۹	۱۴۷۰	۲۳۳۰	۰ر۱۶۵
هلیوم	He	۲	۴ر۰۰۲۶	۰ر۱۶۶۴ × $۱۰^{-۳}$	-۲۶۹ر۷	-۲۶۸ر۹	۵ر۲۳
هیدروژن	H	۱	۱ر۰۰۷۹۷	۰ر۰۸۳۷۵ × $۱۰^{-۳}$	-۲۵۹ر۱۹	-۲۵۲ر۷	۱۴ر۴
ید	I	۵۳	۱۲۶ر۹۰۴۴	۴ر۹۳	۱۱۳ر۷	۱۸۳	۰ر۲۱۸
بی‌نام	Uun	۱۱۰	(۲۶۹)	–	–	–	–
بی‌نام	Uuu	۱۱۱	(۲۷۲)	–	–	–	–
بی‌نام	Uub	۱۱۲	(۲۶۴)	–	–	–	–
بی‌نام	Uut	۱۱۳	–	–	–	–	–
بی‌نام	Unq	۱۱۴	(۲۸۵)	–	–	–	–
بی‌نام	Uup	۱۱۵	–	–	–	–	–
بی‌نام	Uuh	۱۱۶	(۲۸۹)	–	–	–	–
بی‌نام	Uus	۱۱۷	–	–	–	–	–
بی‌نام	Uuo	۱۱۸	(۲۹۳)	–	–	–	–

مقادیر درون پرانتزها در ستون جرم‌های مولی مربوط به عددهای جرمی پایدارترین ایزوتوپ عنصرهای پرتوزا هستند.

مقادیر نقطه‌های ذوب و نقطه‌های جوش درون پرانتزها نامعین‌اند.

داده‌های مربوط به گازها فقط برای حالت‌های مولکولی، مانند H_2، He، O_2، Ne، و نظیر آنها، معتبرند. مقادیر گرمای ویژهٔ گازها مربوط به حالت فشار ثابت‌اند.

داده‌های این جدول از این مرجع گرفته شده‌اند: J.Emsley, *The Elements*, 3rd ed., 1998, Clarendon Press, Oxford.

در ضمن، برای اطلاع از آخرین داده‌ها و جدیدترین عنصرها رجوع کنید به: www.webelements.com

پیوست چ جدول تناوبی عنصرهای شیمیایی

- فلزها
- شبه فلزها
- نافلزها

فلزهای قلیایی — گازهای نادر — فلزهای واسطه — دوره های تناوب افقی

دوره	IA	IIA	IIIB	IVB	VB	VIB	VIIB	VIIIB	VIIIB	VIIIB	IB	IIB	IIIA	IVA	VA	VIA	VIIA	گازهای نادر
۱	۱ H																	۲ He
۲	۳ Li	۴ Be											۵ B	۶ C	۷ N	۸ O	۹ F	۱۰ Ne
۳	۱۱ Na	۱۲ Mg											۱۳ Al	۱۴ Si	۱۵ P	۱۶ S	۱۷ Cl	۱۸ Ar
۴	۱۹ K	۲۰ Ca	۲۱ Sc	۲۲ Ti	۲۳ V	۲۴ Cr	۲۵ Mn	۲۶ Fe	۲۷ Co	۲۸ Ni	۲۹ Cu	۳۰ Zn	۳۱ Ga	۳۲ Ge	۳۳ As	۳۴ Se	۳۵ Br	۳۶ Kr
۵	۳۷ Rb	۳۸ Sr	۳۹ Y	۴۰ Zr	۴۱ Nb	۴۲ Mo	۴۳ Tc	۴۴ Ru	۴۵ Rh	۴۶ Pd	۴۷ Ag	۴۸ Cd	۴۹ In	۵۰ Sn	۵۱ Sb	۵۲ Te	۵۳ I	۵۴ Xe
۶	۵۵ Cs	۵۶ Ba	۵۷–۷۱ *	۷۲ Hf	۷۳ Ta	۷۴ W	۷۵ Re	۷۶ Os	۷۷ Ir	۷۸ Pt	۷۹ Au	۸۰ Hg	۸۱ Ti	۸۲ Pb	۸۳ Bi	۸۴ Po	۸۵ At	۸۶ Rn
۷	۸۷ Fr	۸۸ Ra	۸۹–۱۰۳ **	۱۰۴ Rf	۱۰۵ Db	۱۰۶ Sg	۱۰۷ Bh	۱۰۸ Hs	۱۰۹ Mt	۱۱۰	۱۱۱	۱۱۲	۱۱۳	۱۱۴	۱۱۵	۱۱۶	۱۱۷	۱۱۸

فلزهای واسطهٔ درونی

* سری لانتانید	۵۷ La	۵۸ Ce	۵۹ Pr	۶۰ Nd	۶۱ Pm	۶۲ Sm	۶۳ Eu	۶۴ Gd	۶۵ Tb	۶۶ Dy	۶۷ Ho	۶۸ Er	۶۹ Tm	۷۰ Yb	۷۱ Lu
** سری اکتینید	۸۹ Ac	۹۰ Th	۹۱ Pa	۹۲ U	۹۳ Np	۹۴ Pu	۹۵ Am	۹۶ Cm	۹۷ Bk	۹۸ Cf	۹۹ Es	۱۰۰ Fm	۱۰۱ Md	۱۰۲ No	۱۰۳ Lr

نامهای عنصرهای ۱۰۴ تا ۱۰۹ (به ترتیب، رادرفوردیوم، دوبنیوم، سیبورگیوم، بوریوم، هَسیوم، و مَیتنِریوم) در سال ۱۹۹۷ توسط اتحادیهٔ بین المللی شیمی محض و کاربردی (IUPAC) پذیرفته شده‌اند. عنصرهای ۱۱۰، ۱۱۱ ، ۱۱۲ ، ۱۱۴، ۱۱۶ و ۱۱۸ کشف شده‌اند، اما تا سال ۲۰۰۰ نامگذاری نشده بودند. برای آگاهی از آخرین داده‌ها و جدیدترین عنصرها رجوع کنید به: www.webelements.com

پاسخ‌ها: خودآزمایی‌ها، و پرسش‌ها، تمرین‌ها و مسأله‌های با شمارهٔ فرد

فصل ۲۲

خودآزمایی‌ها

۱. C و D می‌ربایند؛ B و D می‌ربایند

۲. (الف) سمت چپ؛ (ب) سمت چپ؛ (پ) سمت چپ

۳. (الف) الف، پ، ب؛ (ب) کمتر

۴. $-15e$ (بار خالص $-30e$ به تساوی میان کره‌ها تقسیم می‌شود).

پرسش‌ها

۱. نه. فقط برای ذرات باردار، اشیای ذره مانند باردار و پوسته‌های کروی (و کره‌های توپر) با توزیع یکنواخت بار صادق است.

۳. الف و ب

۵. $2q^2/4\pi\varepsilon_0 r^2$، به سمت بالای صفحهٔ شکل

۷. (الف) یکسان‌اند؛ (ب) کوچک‌تر؛ (پ) حذف می‌کنند؛ (ت) جمع می‌شوند؛ (ث) با هم جمع می‌شوند؛ (ج) جهت مثبت محور y؛ (چ) جهت منفی محور y؛ (ح) جهت مثبت محور x؛ (خ) جهت منفی محور x

۹. (الف) ممکن است؛ (ب) به طور قطعی

۱۱. نه (بار الکتریکی میان شخص و رسانا تقسیم می‌شود)

تمرین‌ها و مسأله‌ها

۱. 1.38m

۳. (الف) 4.9×10^{-7}kg؛ (ب) 7.1×10^{-11}C

۵. (الف) 0.17N؛ (ب) -0.046N

۷. $-1.00\,\mu$C و $+3.00\,\mu$C یا $+1.00\,\mu$C و $-3.00\,\mu$C

۹. (الف) بار $-4q/9$ باید روی خط واصل دو بار مثبت قرار گیرد، در فاصلهٔ $L/3$ از بار $+q$

۱۱. (الف) 5.7×10^{13}C، نه؛ (ب) 6.0×10^{5}kg

۱۳. $q = Q/2$

۱۵. (ب) $\pm 2.4\times10^{-8}$C

۱۷. (الف) $\frac{L}{2}\left(1+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{Wh^2}\right)$؛ (ب) $\sqrt{3qQ/4\pi\varepsilon_0 W}$

۱۹. -1.32×10^{13}C

۲۱. (الف) 3.2×10^{-19}C؛ (ب) دو

۲۳. 6.3×10^{11}

۲۵. ۱۲۲mA

۲۷. (الف) صفر؛ (ب) 1.9×10^{-9}N

۲۹. (الف) ^{9}B؛ (ب) ^{13}N؛ (پ) ^{12}C

فصل ۲۳

خودآزمایی‌ها

۱. (الف) سمت راست؛ (ب) سمت چپ؛ (پ) سمت چپ؛ (ت) سمت راست

۲. همه یکسان

۳. (الف) جهت مثبت محور y؛ (ب) جهت مثبت محور x؛ جهت منفی محور y

۴. (الف) سمت چپ؛ (ب) سمت چپ؛ (پ) کاهش پیدا می‌کند

۵. (الف) همه یکسان؛ (ب) ۱ و ۳، سپس ۲ و ۴

پرسش‌ها

۱. (الف) جهت مثبت محور x؛ (ب) پایین و به سمت راست؛ (پ) نقطهٔ A

۳. در دو نقطه: یکی در سمت چپ ذره‌ها، دیگری در بین دو پروتون

۵. (الف) بله؛ (ب) به سوی بار؛ (پ) نه (بردارهای میدان در یک راستا نیستند)؛ (ت) خنثی می‌کنند؛ (ث) جمع می‌شوند؛ (ج) مؤلفه‌های جمع شونده؛ (چ) جهت منفی محور y

۷. شکل‌های ث، ب، سپس الف و پ، آنگاه ت (صفر است)

۹. (الف) سمت پایین؛ (ب) ۲ و ۴ سمت پایین، ۳ سمت بالا

۱۱. (الف) ۴، ۳، ۱، ۲؛ (ب) ۳، سپس ۱ و ۴، آنگاه ۲

تمرین‌ها و مسأله‌ها

۱. (الف) 6.4×10^{-18}N؛ (ب) ۲۰N/C

۵. ۵۶pC

۷. 3.07×10^{21}N/C، در راستای شعاع به برون‌سو

۹. در فاصلهٔ ۵۰ سانتی‌متری بار q_1 و ۱۰۰ سانتی‌متری بار q_2

۱۱. صفر

۱۳. 1.02×10^{5}N/C، سمت بالا

۱۵. 6.88×10^{-28}C.m

۲۱. $q/4\pi\varepsilon_0 r^2$، در راستای قائم و به سمت پایین

۲۳. (الف) $-q/L$؛ (ب) $q/4\pi\varepsilon_0 a(L+a)$

۲۷. $R/\sqrt{3}$

۲۹. 3.51×10^{15}m/s^2

۳۱. 6.6×10^{-15}N

۳۳. (الف) 1.5×10^{3}N/C؛ (ب) 2.4×10^{-16}N، سمت بالا؛ (پ) 1.6×10^{-26}N؛ (ت) 1.5×10^{10}

۳۵. (الف) 1.92×10^{12}m/s^2؛ (ب) 1.96×10^{5}m/s

۳۷. $-۵e$

۳۹. (الف) ۲٫۷×۱۰^{۶}m/s ؛ (ب) ۱۰۰۰N/C

۴۱. ۲۷μm

۴۳. (الف) بله ؛ (ب) صفحهٔ بالایی، ۲٫۷۳cm

۴۵. (الف) صفر ؛ (ب) ۸٫۵×۱۰$^{-۲۲}$N.m ؛ (پ) صفر

۴۷. $\frac{۱}{۲\pi}\sqrt{pE/I}$

فصل ۲۴

خودآزمایی‌ها

۱. (الف) $+EA$ ؛ (ب) $-EA$ ؛ (پ) صفر ؛ (ت) صفر

۲. (الف) ۲ ؛ (ب) ۳ ؛ (پ) ۱

۳. (الف) مساوی ؛ (ب) مساوی ؛ (پ) مساوی

۴. (الف) $+۵۰e$ ؛ (ب) $-۱۵۰e$

۵. ۳ و ۴، سپس ۲، ۱

پرسش‌ها

۱. (الف) ۸N.m^{۲}/C ؛ (ب) صفر

۳. (الف) هر چهار ذره ؛ (ب) هیچ‌کدام (مساوی‌اند)

۵. (الف) $S_۳$، $S_۲$، $S_۱$؛ (ب) همه یکسان؛ (پ) $S_۳$، $S_۲$، $S_۱$؛ (ت) همه یکسان (صفر)

۷. ۲σ ، σ ، ۳σ ؛ یا ۳σ ، σ ، ۲σ

۹. (الف) همه یکسان (E=۰) ؛ (ب) همه یکسان

تمرین‌ها و مسأله‌ها

۱. (الف) ۶۹۳kg/s ؛ (ب) ۶۹۳kg/s ؛ (پ) ۳۴۷kg/s ؛ (ت) ۳۴۷kg/s ؛ (ث) ۵۷۵kg/s

۳. (الف) صفر ؛ (ب) ۳٫۹۲N.m^{۲}/C- ؛ (پ) صفر ؛ (ت) صفر برای هر میدان

۵. ۲٫۰ × ۱۰^{۵}N.m^{۲}/C

۷. (الف) ۸٫۲۳N.m^{۲}/C ؛ (ب) ۸٫۲۳N.m^{۲}/C ؛ (پ) ۷۲٫۸pC در هر حالت

۹. ۳٫۵۴μC

۱۱. صفر از هر یک از وجه‌های متصل به q و $q/۲۴\varepsilon_۰$ از هر یک از وجه‌های دیگر

۱۳. (الف) ۳۷μC ؛ (ب) ۴٫۱×۱۰^{۶}N.m^{۲}/C

۱۵. (الف) ۳٫۰×۱۰^{۶}C- ؛ (ب) ۱٫۳×۱۰$^{-۵}$C+

۱۷. ۵٫۰μC/m

۱۹. (الف) $E=q/۲\pi\varepsilon_۰LR$، در راستای شعاع به درون‌سو ؛ (ب) $-q$ در روی سطح‌های درونی و بیرونی پوسته ؛ (پ) $E = q/۲\pi\varepsilon_۰Lr$، در راستای شعاع به برون‌سو

۲۱. (الف) ۳٫۲ × ۱۰^{۶}N/C، در راستای شعاع به برون‌سو، (ب) ۴٫۵×۱۰^{۵}N/C، در راستای شعاع به درون‌سو

۲۳. ۳٫۶nC

۲۵. (ب) $\rho R^{۲}/۲\varepsilon_۰ r$

۲۷. (الف) ۵٫۳×۱۰^{۷}N/C ؛ (ب) ۶۰N/C

۲۹. ۵٫۰nC/m^{۲}

۳۱. ۰٫۴۴mm

۳۳. (الف) $\rho x/\varepsilon_۰$ ؛ (ب) $\rho d/۲\varepsilon_۰$

۳۵. ۷٫۵nC-

۳۹. ۱٫۰۴nC-

۴۳. (الف) $E = (q / ۴\pi\varepsilon_۰ a^{۳})r$ ؛ (ب) $E = q / ۴\pi\varepsilon_۰ r^{۲}$ ؛ (پ) صفر ؛ (ت) صفر ؛ (ث) درونی، $-q$ ؛ بیرونی، صفر

۴۵. $q/۲\pi a^{۲}$

۴۷. $۶K\varepsilon_۰ r^{۳}$

فصل ۲۵

خودآزمایی‌ها

۱. (الف) کار منفی ؛ (ب) افزایش می‌یابد

۲. (الف) مثبت ؛ (ب) بالاتر

۳. (الف) به سمت راست ؛ (ب) ۱، ۲، ۳، ۵، مثبت ؛ ۴، منفی ؛ (پ) ۳، سپس ۱، ۲ و ۵، آنگاه ۴

۴. همه یکسان

۵. a، c (صفر)، b

۶. (الف) ۲، سپس ۱ و ۳ ؛ (ب) ۳ ؛ (پ) به سمت چپ شتاب می‌گیرد

پرسش‌ها

۱. (الف) بالاتر ؛ (ب) مثبت ؛ (پ) منفی ؛ (ت) همه یکسان

۳. $-۴q/۴\pi\varepsilon_۰ d$

۵. (الف) تا (پ) $Q/۴\pi\varepsilon_۰ R$ ؛ (ت) الف، ب، پ

۷. (الف) ۲، ۴ و سپس ۱، ۳ و ۵ (در این ناحیه‌ها E=۰) ؛ (ب) در جهت منفی محور x؛ (پ) در جهت مثبت محور x

۹. (الف) تا (ت) صفر

تمرین‌ها و مسأله‌ها

۱. (الف) ۳٫۰×۱۰^{۵}C ؛ (ب) ۳٫۶×۱۰^{۶}J

۳. (الف) ۳٫۰×۱۰^{۱۰}J ؛ (ب) ۷٫۷km/s ؛ (پ) ۹٫۰×۱۰^{۴}kg

۵. ۸٫۸mm

۷. (الف) ۱۳۶MV/m ؛ (ب) ۸٫۸۲kV/m

۹. (ب) چون نقطهٔ مرجع، V=۰، به طور متفاوت انتخاب شده است ؛ (پ)

$q/(۸\pi\varepsilon_۰ R)$ ؛ (ت) اختلاف پتانسیل‌ها از نقطهٔ مرجع انتخاب شده، $V=۰$ مستقل‌اند.

۱۱. (الف) $Q/۴\pi\varepsilon_۰ r$ ؛ (ب) $\frac{\rho}{۳\varepsilon_۰}(\frac{۳}{۲}r_۲^۲ - \frac{۱}{۲}r^۲ - \frac{r_۱^۳}{r})$ و $\rho = \frac{Q}{\frac{۴\pi}{۳}(r_۲^۳ - r_۱^۳)}$؛ (پ) $\frac{\rho}{۲\varepsilon_۰}(r_۲^۲ - r_۱^۲)$، مقدار ρ همان است که در قسمت (ب) آمده است ؛ (ت) بله

۱۳. (الف) ۴٫۵kV- ؛ (ب) ۴٫۵kV-

۱۵. $x=d/۴$ و $x=-d/۲$

۱۷. (الف) ۰٫۵۴mm ؛ (ب) ۷۹۰V

۱۹. $۶٫۴ \times ۱۰^۸$V

۲۱. $۲٫۵q/۴\pi\varepsilon_۰ d$

۲۵. (الف) $-۵Q/۴\pi\varepsilon_۰ R$ ؛ (ب) $-۵Q/۴\pi\varepsilon_۰(z^۲+R^۲)^{\frac{۱}{۲}}$

۲۷. $(\sigma/۸\varepsilon_۰)[(z^۲+R^۲)^{\frac{۱}{۲}} - z]$

۲۹. $(c/۴\pi\varepsilon_۰)[L-d\ \ln(۱+L/d)]$

۳۱. ۱۷V/m در راستای زاویهٔ ۱۳۵ درجهٔ پادساعتگرد نسبت به محور $x+$

۳۵. (الف) $\frac{Q}{۴\pi\varepsilon_۰ d(d+L)}$، به سمت چپ ؛ (ب) صفر

۳۷. $-۰٫۲۱q^۲/\varepsilon_۰ a$

۳۹. (الف) $+۶٫۰ \times ۱۰^۴$V ؛ (ب) $-۷٫۸ \times ۱۰^۵$V ؛ (پ) ۲٫۵J ؛ (ت) افزایش ؛ (ث) همان اندازه ؛ (ج) همان اندازه

۴۱. $W = \frac{qQ}{۸\pi\varepsilon_۰}\left(\frac{۱}{r_۱} - \frac{۱}{r_۲}\right)$

۴۳. ۲٫۵km/s

۴۵. (الف) ۰٫۲۲۵J ؛ (ب) کرهٔ A، ۴۵٫۰m/s^۲ ؛ کرهٔ B، ۲۲٫۵m/s^۲ ؛ (پ) کرهٔ A، ۷٫۷۵m/s ؛ کرهٔ B، ۳٫۸۷m/s

۴۷. ۰٫۳۲km/s

۴۹. $۱٫۶ \times ۱۰^{-۹}$m

۵۱. $۲٫۵ \times ۱۰^{-۸}$C

۵۳. (الف) ۱۸۰V- ؛ (ب) ۲۷۰۰V ، ۸۹۰۰V-

۵۵. (الف) ۰٫۱۲V- ؛ (ب) $۱٫۸\times۱۰^{-۸}$N/C، در راستای شعاع به درون‌سو

فصل ۲۶

خودآزمایی‌ها

۱. (الف) ثابت می‌ماند؛ (ب) ثابت می‌ماند

۲. (الف) کاهش می‌یابد ؛ (ب) افزایش می‌یابد ؛ (پ) کاهش می‌یابد

۳. (الف) V، $q/۲$ ؛ (ب) $V/۲$، q

۴. (الف) $q_۰=q_۱+q_{۳۴}$؛ (ب) مساوی است ($C_۳$ و $C_۴$ به‌صورت سری هستند)

۵. (الف) ثابت می‌ماند ؛ (ب) تا (ت) افزایش می‌یابند ؛ (ث) ثابت می‌ماند (اختلاف پتانسیل و فاصلهٔ میان صفحه‌ها ثابت است)

۶. (الف) ثابت می‌ماند ؛ (ب) کاهش می‌یابد ؛ (پ) افزایش می‌یابد

پرسش‌ها

۱. a، ۲ ؛ b، ۱ ؛ c، ۳

۳. الف، سری ؛ ب، موازی ؛ پ، موازی

۵. (الف) $C/۳$ ؛ (ب) $۳C$ ؛ (پ) موازی

۷. (الف) مساوی است ؛ (ب) مساوی است ؛ (پ) بیشتر است ؛ (ت) بیشتر است

۹. (الف) ۲ ؛ (ب) ۳ ؛ (پ) ۱

۱۱. (الف) افزایش می‌یابد؛ (ب) افزایش می‌یابد ؛ (پ) کاهش می‌یابد؛ (ت) کاهش می‌یابد؛ (ث) ثابت می‌ماند، افزایش می‌یابد، افزایش می‌یابد، افزایش می‌یابد

تمرین‌ها و مسأله‌ها

۱. ۷٫۵pC

۳. ۳٫۰mC

۵. (الف) ۱۴۰pF ؛ (ب) ۱۷nC

۷. $۵٫۰۴\pi\varepsilon_۰ R$

۱۱. ۹۰۹۰

۱۳. ۳٫۱۶μF

۱۷. ۴۳pF

۱۹. (الف) ۵۰V ؛ (ب) $۵٫۰\times۱۰^{-۵}$C ؛ (پ) $۱٫۵\times۱۰^{-۴}$C

۲۱.
$$q_۱ = \frac{C_۱C_۲ + C_۱C_۳}{C_۱C_۲ + C_۱C_۳ + C_۲C_۳}C_۱V_۰$$
$$q_۲ = q_۳ = \frac{C_۲C_۳}{C_۱C_۲ + C_۱C_۳ + C_۲C_۳}C_۱V_۰$$

۲۳. ۷۲F

۲۵. ۰٫۲۷J

۲۷. (الف) ۲٫۰J

۲۹. (الف) ۲V ؛ (ب) $U_i=\varepsilon_۰ AV^۲/۲d$، $U_f=۲U_i$ ؛ (پ) $\varepsilon_۰ AV^۲/۲d$

۳۵. پیرکس

۳۷. ۸۱pF/m

۳۹. ۰٫۶۳m^۲

۴۳. (الف) ۱۰kV/m ؛ (ب) ۵٫۰nC ؛ (پ) ۴٫۱nC

۴۵. (الف) $C = ۴\pi\varepsilon_۰\kappa(\frac{ab}{b-a})$ ؛ (ب) $q = ۴\pi\varepsilon_۰\kappa V(\frac{ab}{b-a})$ ؛ (پ) $q'=q(۱-۱/\kappa)$

فصل ۲۷

خودآزمایی‌ها

۱. ۸A، به سمت راست

۲. (الف) تا (پ) به سمت راست

۳. الف و پ، سپس ب

۴. وسیلهٔ ۲

۵. (الف) و (ب)، سپس (ت)، آنگاه (پ)

پرسش‌ها

۱. a، b و c، سپس d (صفر)

۳. ب، الف، پ

۵. A، B و C، سپس $A+B$ و $B+C$، آنگاه $A+B+C$

۷. (الف) تا (پ) ۱، ۲، سپس ۳

۹. C، A، B

تمرین‌ها و مسأله‌ها

۱. (الف) ۱۲۰۰C ؛ (ب) ۷٫۵×۱۰[۲۱]

۳. ۵٫۶ms

۵. (الف) ۶٫۴A/m[۲]، به سوی شمال ؛ (ب) نه، مساحت مقطع

۷. ۰٫۳۸mm

۹. (الف) ۲×۱۰[۱۲] ؛ (ب) ۵۰۰۰ ؛ (پ) ۱۰MV

۱۱. ۱۳ دقیقه

۱۳. ۲٫۰ × ۱۰[-۸]Ω.m

۱۵. ۱۰۰V

۱۷. ۲٫۴Ω

۱۹. ۵۴Ω

۲۱. ۳٫۰

۲۳. ۸٫۲ × ۱۰[-۴]Ω.m

۲۵. ۲۰۰۰K

۲۷. (الف) ۰٫۴۳ درصد، ۰٫۰۱۷ درصد، ۰٫۰۳۴ درصد

۲۹. (الف) $R=\rho L/\pi ab$

۳۱. ۵۶۰W

۳۳. (الف) ۱٫۰kW ؛ (ب) ۲۵۰ ریال

۳۵. ۰٫۱۳۵W

۳۷. (الف) ۱۰٫۹A ؛ (ب) ۱۰٫۶Ω ؛ (پ) ۴٫۵MJ

۳۹. ۶۶۰W

۴۱. (الف) ۳٫۱×۱۰[۱۱] ؛ (ب) ۲۵μA ؛ (پ) ۱۳۰۰W، ۲۵MW

۴۳. (الف) ۱۷mV/m ؛ (ب) ۲۴۳J

۴۵. (الف) $J=I/2\pi r^2$ ؛ (ب) $E=\rho I/2\pi r^2$ ؛ (پ) $\Delta V=\rho I(1/r-1/b)$ ؛ (ت) ۰٫۱۶A/m[۲] ؛ (ث) ۱۶V/m ؛ (ج) ۰٫۱۶MV

فصل ۲۸

خودآزمایی‌ها

۱. (الف) سمت راست؛ (ب) همه یکسان ؛ (پ) b، سپس a و c ؛ (ت) b، سپس a و c

۲. (الف) همه یکسان ؛ (ب) R_1، R_2، R_3

۳. (الف) کوچک‌تر ؛ (ب) بزرگ‌تر ؛ (پ) مساوی

۴. (الف) $V/2$، i ؛ (ب) V، $i/2$

۵. (الف) ۱، ۲، ۴، ۳ ؛ (ب) ۴، ۱ و ۲، سپس ۳

پرسش‌ها

۱. ۳، ۴، ۱، ۲

۳. (الف) نه ؛ (ب) بله ؛ (پ) همه یکسان

۵. موازی، R_2، R_1، سری

۷. (الف) مساوی ؛ (ب) مساوی ؛ (پ) کمتر ؛ (ت) بیشتر

۹. (الف) کمتر ؛ (ب) کمتر ؛ (پ) بیشتر

۱۱. c، b، a

تمرین‌ها و مسأله‌ها

۱. (الف) ۳۲۰۰۰۰ ریال ؛ (ب) ۴۸ ریال

۳. ۱۴ ساعت و ۲۴ دقیقه

۵. (الف) ۰٫۵۰A ؛ (ب) $P_1=$۱٫۰W، $P_2=$۲٫۰W ؛ (پ) $P_1=$۶٫۰W تولید شده، $P_2=$۳٫۰W جذب شده

۷. (الف) ۱۴V ؛ (ب) ۱۰۰W ؛ (پ) ۶۰۰W ؛ (ت) ۱۰V، ۱۰۰W

۹. (الف) ۵۰V ؛ (ب) ۴۸V ؛ (پ) نقطهٔ B به پایانهٔ منفی وصل شده است.

۱۱. ۲٫۵V

۱۳. ۸٫۰Ω

۱۵. (الف) r_1-r_2 ؛ (ب) باتری با مقاومت درونی r_1

۱۹. ۵٫۵۶A

۲۱. $i_1=$۵۰mA، $i_2=$۶۰mA، $V_{ab}=$۹٫۰V

۲۳. (الف) لامپ ۲ ؛ (ب) لامپ ۱

۲۵. ۳d

۲۷. ۹ مقاومت

۲۹. (الف) $R=r/2$ ؛ (ب) $P_{max}=\mathscr{E}^2/2r$

۳۱. (الف) ۰٫۳۴۶W ؛ (ب) ۰٫۰۵۰W ؛ (پ) ۰٫۰۷۰۹W ؛ (ت) ۱٫۲۶W ؛ (ث) ۰٫۱۵۸W-

۳۳. (الف) باتری ۱، ۰٫۶۷A به سمت پایین ؛ باتری ۲، ۰٫۳۳A به سمت بالا؛ باتری ۳، ۰٫۳۳A به سمت بالا؛ (ب) ۳٫۳V

۳۵. (الف) مس: ۱٫۱۱A، آلومینیوم: ۰٫۸۹۳A ؛ (ب) ۱۲۶m

۳۷. ۰٫۴۵A

۳۹. ۰٫۳ ـ درصد

۴۵. ۴٫۶

۴۷. (الف) ۲٫۴۱μs ؛ (ب) ۱۶۱pF

۴۹. (الف) ۰٫۹۵۵μC/s ؛ (ب) ۱٫۰۸μW ؛ (پ) ۲٫۴۷μW ؛ (ت) ۳٫۸۲μW

۵۱. (الف) ۲٫۱۷s ؛ (ب) ۳۹٫۶mV

۵۳. (الف) ۱٫۰×۱۰$^{-۳}$C ؛ (ب) ۱۰$^{-۳}$A ؛ (پ) V_C=۱۰$^{۳}e^{-t}$V، V_R=۱۰$^{۳}e^{-t}$V ؛ (ت) $P=e^{-۲t}$W

۵۵. (الف) به ازای t=۰، i_1=۱٫۱mA، $i_2=i_3$=۰٫۵۵mA؛ به ازای $t=\infty$، $i_1=i_2$=۰٫۸۲mA، i_3=۰؛ (پ) به ازای t=۰، V_2=۴۰۰V؛ به ازای $t=\infty$، V_2=۶۰۰V ؛ (ت) سپری شدن چند ثابت زمانی (τ=۷٫۱s)

فصل ۲۹

خودآزمایی‌ها

۱. الف، محور z مثبت ؛ ب، محور x منفی ؛ پ، $\vec{F}_B$=۰

۲. (الف) ۲، سپس ۱ و ۳ (صفر) ؛ (ب) ۴

۳. (الف) $+z$ و $-z$، سپس $+y$ و $-y$، آنگاه $+x$ و $-x$ (صفر) ؛ (ب) $+y$

۴. (الف) الکترون ؛ (ب) ساعتگرد

۵. محور y منفی

۶. (الف) همه یکسان ؛ (ب) ۱ و ۴، سپس ۲ و ۳

پرسش‌ها

۱. (الف) نه، $\vec{v}$ و $\vec{F}_B$ باید برهم عمود باشند ؛ (ب) بله؛ (پ) نه، $\vec{B}$ و $\vec{F}_B$ باید برهم عمود باشند

۳. (الف) $\vec{F}_E$ ؛ (ب) $\vec{F}_B$

۵. (الف) منفی ؛ (ب) مساوی ؛ (پ) مساوی ؛ (ت) یک نیمدایره می‌شد

۷. (الف) $\vec{B}_1$ ؛ (ب) B_1 درون‌سو، B_2 برون‌سوی صفحهٔ شکل ؛ (پ) کمتر

۹. (الف) ۱، ۱۸۰ درجه ؛ ۲، ۲۷۰ درجه ؛ ۳، ۹۰ درجه ؛ ۴، صفر درجه ؛ ۵، ۳۱۵ درجه ؛ ۶، ۲۲۵ درجه ؛ ۷، ۱۳۵ درجه ؛ ۸، ۴۵ درجه ؛ (ب) ۱ و ۲، سپس ۳ و ۴ ؛ (پ) ۸، سپس ۵ و ۶، آنگاه ۷

تمرین‌ها و مسأله‌ها

۱. (الف) ۶٫۲×۱۰$^{-۱۸}$N ؛ (ب) ۹٫۵×۱۰^{۸}m/s^{۲} ؛ (پ) مساوی با ۵۵۰m/s باقی ماند

۳. (الف) ۴۰۰km/s ؛ (ب) ۸۳۵eV

۵. (الف) مشرق ؛ (ب) ۶٫۲۸×۱۰^{۱۴}m/s^{۲} ؛ (پ) ۲٫۹۸mm

۷. (الف) ۳٫۴×۱۰$^{-۴}$T، افقی و به سمت چپ نسبت به $\vec{v}_0$؛ (ب) بله، اگر سرعتش همان سرعت الکترون باشد

۹. ۰٫۲۷mT

۱۱. ۶۸۰kV/m

۱۳. (ب) ۲٫۸۴ × ۱۰$^{-۳}$

۱۵. ۲۱μT

۱۷. (الف) ۲٫۰۵ × ۱۰^{۷}m/s ؛ (ب) ۴۶۷μT ؛ (پ) ۱۳٫۱MHz ؛ (ت) ۶۷٫۳ns

۱۹. (الف) ۰٫۹۷۸MHz ؛ (ب) ۹۶٫۴cm

۲۳. (الف) ۱٫۰MeV ؛ (ب) ۰٫۵۰MeV

۲۵. (الف) ۴۹۵mT ؛ (ب) ۲۲٫۷mA ؛ (پ) ۸٫۱۷MJ

۲۷. (الف) ۰٫۳۶ns ؛ (ب) ۰٫۱۷mm ؛ (پ) ۱٫۵mm

۲۹. (الف) $-q$ ؛ (ب) $\pi m/qB$

۳۱. ۲۴۰m

۳۳. ۲۸٫۲N، افقی و به سمت مغرب

۳۵. ۴۶۷mA، از چپ به راست

۳۷. ۰٫۱۰T، تحت زاویهٔ ۳۱ درجه نسبت به راستای قائم

۳۹. ۴٫۳×۱۰$^{-۳}$N.m، در جهت محور y منفی

۴۳. $۲\pi aiB\sin\theta$، عمود بر صفحهٔ حلقه (به سمت بالا)

۴۵. (الف) ۵۴۰Ω، به‌طور سری با گالوانومتر ؛ (ب) ۲٫۵۲Ω، به‌طور موازی

۴۷. ۲٫۴۵A

۴۹. (الف) ۱۲٫۷A ؛ (ب) ۰٫۰۸۰۵N.m

۵۱. (الف) ۰٫۳۰J/T ؛ (ب) ۰٫۰۲۴N.m

۵۳. (الف) ۲٫۸۶A.m^{۲} ؛ (ب) ۱٫۱۰A.m^{۲}

۵۵. (الف) (۸٫۰×۱۰$^{-۴}$N.m)(−۱٫۲$\hat{i}$ − ۰٫۹۰$\hat{j}$ + ۱٫۰$\hat{k}$) ؛ (ب) −۶٫۰×۱۰$^{-۴}$J

۵۷. −(۰٫۱۰V/m)$\hat{k}$

۵۹. −۲٫۰T

فصل ۳۰

خودآزمایی‌ها

۱. الف، پ، ب

۲. b، c، a

۳. d، a و c، سپس b

۴. ت، الف، ب و پ (صفر)

پرسش‌ها

۱. پ، ت، سپس الف و ب

۳. پ، الف، ب

۵. (الف) ۱، ۳، ۲ ؛ (ب) کمتر

۷. c و d، سپس b، a

۹. ت، سپس الف و ث، آنگاه ب، پ

تمرین‌ها و مسأله‌ها

۱. (الف) ۳٫۳μT ؛ (ب) بله

۳. (الف) ۱۶A ؛ (ب) از غرب به شرق

۵. (الف) $\mu_0 qvi/2\pi d$، ناهمسو با i؛ (ب) بزرگی همان است، همسو با i

۷. ۲rad

۹. $\frac{\mu_\circ i\theta}{۴\pi}(\frac{۱}{b}-\frac{۱}{a})$، برون‌سوی صفحهٔ شکل

۱۹. $(\mu_\circ i/۲\pi w)\ln(۱+w/d)$، به سمت بالا

۲۱. (الف) ممکن نیست در وسط فاصلهٔ میان سیم‌ها میدان مغناطیسی غیر از $B=\circ$ باشد ؛ (ب) ۳۰A

۲۳. ۴ر۳A ، در برون‌سوی صفحهٔ شکل

۲۵. ۸۰μT، به سمت بالای صفحهٔ شکل

۲۷. $۷۹۱ر\circ \mu_\circ i^۲/\pi a$، تحت زاویه ۱۶۲ درجه در جهت پادساعتگرد نسبت به راستای افقی

۲۹. ۲ر۳mN، به طرف سیم

۳۱. (الف) $\mu_\circ$(-۲ر۰A) ؛ (ب) صفر

۳۵. $\mu_\circ J_\circ r^۲/۳a$

۴۱. ۳۰ر۰mT

۴۳. (الف) ۵۳۳μT ؛ (ب) ۴۰۰μT

۴۷. (الف) ۷۷ر۴cm ؛ (ب) ۵ر۳۵μT

۴۹. ۴۷ر۰A.m^۲

۵۱. (الف) ۴ر۲A.m^۲ ؛ (ب) ۴۶cm

۵۷. (الف) ۷۹μT ؛ (ب) ۱ر۱ × ۱۰$^{-۶}$N.m

فصل ۳۱

خودآزمایی‌ها

۱. b، سپس d و e، آنگاه a و c (صفر)

۲. الف و ب، سپس پ (صفر)

۳. پ و ت، سپس الف و ب

۴. b، برون‌سو ؛ c، برون‌سو ؛ d، درون‌سو ؛ e، درون‌سو

۵. ت و ث

۶. (الف) ۲، ۳، ۱ (صفر) ؛ (ب) ۲، ۳، ۱

۷. الف و ب، سپس پ

پرسش‌ها

۱. (الف) همه یکسان (صفر) ؛ (ب) ۲، سپس ۱ و ۳ (صفر)

۳. (الف) درون‌سو ؛ (ب) پادساعتگرد ؛ (پ) بزرگ‌تر

۵. پ، الف، ب

۷. c، b، a

۹. (الف) بیشتر است؛ (ب) یکی است؛ (پ) یکی است؛ (ت) یکی است (صفر)

تمرین‌ها و مسأله‌ها

۱. ۵ر۱mV

۳. (الف) ۳۱mV ؛ (ب) به سمت چپ

۵. (الف) ۱ر۱×۱۰$^{-۳}$Ω ؛ (ب) ۴ر۱T/s

۷. ۳۰mA

۹. (الف) $\mu_\circ iR^۲\pi r^۲/۲x^۳$ ؛ (ب) $۳\mu_\circ iR^۲\pi r^۲v/۲x^۴$ ؛ (پ) همسوی با جریان در حلقهٔ بزرگ‌تر

۱۱. (ب) نه

۱۳. ۵ر۲۹mC

۱۵. (الف) ۷ر۲۱V ؛ (ب) پادساعتگرد

۱۷. (ب) حلقه باید طوری طراحی شود که داشته باشیم $Nab=(\frac{۵}{۲\pi})\,m^۲$

۱۹. ۵۰ر۵kV

۲۱. ۸۰μV، ساعتگرد

۲۳. (الف) ۱۳μWb/m ؛ (ب) ۱۷ درصد ؛ (پ) صفر

۲۵. ۶۶ر۳μW

۲۷. (الف) ۴۸ر۱mV ؛ (ب) ۶۷ر۲mA ؛ (پ) ۱۲۸ر۰mW

۲۹. (الف) ۶۰۰mV، به سمت بالای صفحهٔ شکل؛ (ب) ۵ر۱A، ساعتگرد؛ (پ) ۹۰ر۰W ؛ (ت) ۱۸ر۰N ؛ (ث) مانند قسمت (پ)

۳۱. (الف) ۲۴۰μV ؛ (ب) ۶۰۰ر۰mA ؛ (پ) ۱۴۴ر۰μW ؛ (ت) ۸۸ر۲×۱۰$^{-۸}$N، (ث) مانند قسمت (پ)

۳۳. (الف) ۵ر۷۱μV/m ؛ (ب) ۱۴۳μV/m

۳۷. ۱۰ر۰μWb

۴۱. جریان باید با آهنگ ۵ر۰A/s تغییر کند

۴۳. (ب) چون می‌خواهیم تغییر میدان مغناطیسی یک القاگر در القاگر دیگر جریان القایی ایجاد نکند ؛ (پ) $L_{eq}=\sum_{j=۱}^{N}L_j$

۴۵. ۹۱ر۶τ_L

۴۷. ۴۶Ω

۴۹. (الف) ۴۵ر۸ns ؛ (ب) ۳۷ر۷mA

۵۱. ۰ر۱۲A/s

۵۳. (الف) $i_۱=i_۲=$ ۳۳ر۳A ؛ (ب) $i_۱=$ ۵۵ر۴A، $i_۲=$ ۷۳ر۲A ؛ (پ) $i_۱=\circ$، $i_۲=$ ۸۲ر۱A (وارو می‌شود)؛ (ت) $i_۱=i_۲=\circ$

۵۵. (الف) $i(۱-e^{-Rt/L})$

۵۷. ۶ر۲۵ms

۵۹. (الف) ۹ر۹۷H ؛ (ب) ۱۹۶ر۰mJ

۶۳. (الف) ۲ر۳۴J/m^۳ ؛ (ب) ۴ر۴۹mJ

۶۵. ۵ر۱ × ۱۰^{۸}V/m

۶۷. (الف) ۰ر۱J/m^۳ ؛ (ب) ۸ر۴×۱۰$^{-۱۵}$J/m^۳

۶۹. (الف) ۶۷ر۱mH ؛ (ب) ۰ر۶mWb

۷۱. (ب) باید جهت پیچیدن سیم‌های دو سیملوله مخالف باشد

۷۳. چون میدان مغناطیسی فقط در درون مقطع سیملولهٔ ۱ وجود دارد

۷۵. (الف) $\frac{\mu_\circ Nl}{۲\pi}\ln(۱+\frac{b}{a})$ ؛ (ب) ۱۳μH

فصل ۳۲

خودآزمایی‌ها

۱. ت، ب، پ، الف (صفر)

۲. (الف) ۲ ؛ (ب) ۱

۳. (الف) برون‌سو ؛ (ب) برون‌سو ؛ (پ) کوچک‌تر

۴. (الف) درون‌سو ؛ (ب) درون‌سو ؛ (پ) کوچک‌تر

۵. a، c، b، d (صفر)

۶. b، c و d، سپس a

پرسش‌ها

۱. باید انرژی داده شود

۳. (الف) همه به سمت پایین، (ب) ۱ بالا، ۲ پایین، ۳ صفر

۵. (الف) ۱ بالا، ۲ بالا، ۳ پایین ؛ (ب) ۱ پایین، ۲ بالا، ۳ صفر

۷. (الف) ۱، بالا، ۲ بالا، ۳ پایین ؛ (ب) و (پ) ۲، سپس ۱ و ۳

۹. (الف) راست ؛ (ب) چپ ؛ (پ) درون‌سو

۱۱. ۱، a ؛ ۲، b ؛ ۳، c و d

تمرین‌ها و مسأله‌ها

۱. (ب) علامت منفی است؛ (پ) نه، شار منفی با شار مثبت خارج شده از سر نزدیک به آهن‌ربا جبران می‌شود

۳. ۴۷٫۴μWb، درون‌سو

۵. ۵۵μT

۷. (الف) ۳۱٫۰μT، صفر درجه؛ (ب) ۵۵٫۹μT، ۷۳٫۹ درجه ؛ (پ) ۶۲٫۰μT، ۹۰ درجه

۹. (الف) $-۹٫۳\times ۱۰^{-۲۴}$J/T ؛ (ب) $۱٫۹\times ۱۰^{-۲۳}$J/T

۱۱. (الف) صفر ؛ (ب) صفر ؛ (پ) صفر ؛ (ت) $\pm ۳٫۲\times ۱۰^{-۲۵}$J ؛ (ث) $-۳٫۲\times ۱۰^{-۳۴}$J.s، $۲٫۸\times ۱۰^{-۲۳}$J/T، $+۹٫۷\times ۱۰^{-۲۵}$J، $\pm ۳٫۲\times ۱۰^{-۲۵}$J

۱۳. $\Delta\mu = e^۲r^۲B/۴m$

۱۵. ۲۰٫۸mJ/T

۱۷. بله

۱۹. (ب) K_i/B، ناهمسو با میدان مغناطیسی؛ (پ) ۳۱۰A/m

۲۱. (الف) ۳٫۰μT ؛ (ب) $۵٫۶\times ۱۰^{-۱۰}$eV

۲۳. $۵٫۱۵\times ۱۰^{-۲۴}$A.m^۲

۲۵. (الف) ۱۸۰km ؛ (ب) $۲٫۳\times ۱۰^{-۵}$

۲۷. $۲٫۴\times ۱۰^{۱۳}$V/m.s

۳۳. (الف) ۰٫۶۳μT ؛ (ب) $۲٫۳\times ۱۰^{۱۲}$V/m.s

۳۵. a، ۷۱۰mA ؛ b، صفر ؛ c، ۱٫۱A

۳۷. (الف) ۲٫۰A؛ (ب) $۲٫۳\times ۱۰^{۱۱}$V/m.s؛ (پ) ۰٫۵۰A؛ (ت) ۰٫۶۳μT.m

فصل ۳۳

خودآزمایی‌ها

۱. (الف) $T/۲$ ؛ (ب) T ؛ (پ) $T/۲$ ؛ (ت) $T/۴$

۲. (الف) ۵V ؛ (ب) ۱۵۰μJ

۳. (الف) ثابت می‌ماند ؛ (ب) ثابت می‌ماند

۴. (الف) C، B، A ؛ (ب) ۱، A ؛ ۲، B ؛ ۳، S ؛ ۴، C ؛ (پ) A

۵. (الف) ثابت می‌ماند ؛ (ب) افزایش می‌یابد

۶. (الف) ثابت می‌ماند ؛ (ب) کاهش می‌یابد

۷. (الف) ۱، عقب‌تر است ؛ ۲، جلوتر است ؛ ۳، همفاز است ؛ (ب) ۳ (به‌ازای $\omega_d=\omega$، داریم $X_L=X_C$)

۸. (الف) باید افزایش داد (در مدار اثر خازنی غالب است؛ افزایش دادن ظرفیت C باعث کاهش دادن X_C می‌شود تا مدار به حالت تشدید نزدیک‌تر و توان بیشینهٔ P_{avg} حاصل شود)؛ (ب) نزدیک‌تر می‌شود

۹. (الف) بیشتر ؛ (ب) افزاینده

پرسش‌ها

۱. (الف) $T/۴$ ؛ (ب) $T/۴$ ؛ (پ) $T/۲$ (شکل ۳۳-۲ را ببینید)؛ (ت) $T/۲$ (معادلهٔ ۳۱-۳۷ را ببینید)

۳. ب، الف، پ

۵. (الف) ۳، ۱، ۲ ؛ (ب) ۲، ۱ و ۳

۷. a، القاگر؛ b، مقاومت ؛ c، خازن

۹. (الف) تقدم فاز ؛ (ب) خازنی ؛ (پ) کمتر

۱۱. (الف) سمت راست، افزایش (X_L افزایش می‌یابد تا مدار به حالت تشدید نزدیک‌تر شود)؛ (ب) سمت راست، افزایش (X_C کاهش می‌یابد تا مدار به حالت تشدید نزدیک‌تر شود)؛ (پ) سمت راست، افزایش (ω_d/ω افزایش می‌یابد تا مدار به حالت تشدید نزدیک‌تر شود)

تمرین‌ها و مسأله‌ها

۱. ۹٫۱۴nF

۳. (الف) ۱٫۱۷μJ ؛ (ب) ۵٫۵۸mA

۵. (الف) $t = n(۵٫۰۰\mu s)$ ؛ (ب) $t = (۲n - ۱)(۲٫۵۰\mu s)$ ؛ (پ) $t=(۲n-۱)(۱٫۲۵\mu s)$، n عددی درست و مثبت است.

۷. (الف) ۱٫۲۵kg ؛ (ب) ۳۷۲N/m ؛ (پ) $۱٫۷۵\times ۱۰^{-۴}$m ؛ (ت) ۳٫۰۲mm/s

۹. $۷٫۰\times ۱۰^{-۴}$s

۱۱. (الف) ۳٫۰nC ؛ (ب) ۱٫۷mA ؛ (پ) ۴٫۵nJ

۱۳. (الف) ۲۷۵Hz ؛ (ب) ۳۶۴mA

۱۵. (الف) ۱:۰٫۶ ؛ (ب) ۳۶pF، ۰٫۲۲mH

۱۷. (الف) ۱٫۹۸μJ ؛ (ب) ۵٫۵۶μC ؛ (پ) ۱۲٫۶mA ؛ (ت) -۴۶٫۹

درجه ؛ (ث) ۹ر۴۶+ درجه

۱۹. (الف) ۱۸۰mCر۰ ؛ (ب) $T/8$ ؛ (پ) ۷W ر۶۶

۲۱. (الف) ۳۶۵µs ؛ (ب) ۵۰mHر۲ ؛ (پ) ۲۰mJر۳

۲۳. فرض کنید T_2 (مساوی با ۵۹۶sر۰) دورهٔ تناوب مدار ترکیب L با خازن ۹۰۰µF و T_1 (مساوی با ۱۹۹sر۰) دورهٔ تناوب مدار ترکیب L با خازن ۱۰۰µF باشد. کلید S_2 را ببندید، به اندازه $T_2/4$ منتظر بمانید؛ کلید S_1 را فوراً ببندید، سپس کلید S_2 را باز کنید؛ به اندازهٔ $T_1/4$ منتظر بمانید و سپس کلید S_1 را باز کنید.

۲۵. ۶۶mΩر۸

۲۷. $(L/R)\ln 2$

۳۱. (الف) ۹۵۵Aر۰ ؛ (ب) ۱۱۹Aر۰

۳۳. (الف) ۶۵kHzر۰ ؛ (ب) ۲۴Ω

۳۵. (الف) ۷۳msر۶ ؛ (ب) ۲msر۱۱ ؛ (پ) القاگر؛ (ت) ۱۳۸mH

۳۷. (الف) $X_C=0$، $X_L=$ ۷Ωر۸۶، $Z=$ ۱۸۲Ω، $I=$ ۱۹۸mA، $\phi=$ ۵°ر۲۸

۳۹. (الف) $X_C=$ ۹Ωر۳۷، $X_L=$ ۷Ωر۸۶ ؛ $Z=$ ۱۶۷Ω، $I=$ ۲۱۶mA، $\phi=$ ۱°ر۱۷

۴۱. ۱۰۰۰V

۴۳. ۸۹Ω

۴۵. (الف) ۲۲۴rad/s ؛ (ب) ۰۰Aر۶ ؛ (پ) ۲۲۸rad/s، ۲۱۹rad/s ؛ (ت) ۰۴۰ر۰

۴۹. ۸۴Aر۱

۵۱. ۱۴۱V

۵۳. ۰۰Wر۹۰، ۱۴Wر۳، ۸۲Wر۱

۵۵. (الف) ۱Ωر۱۲ ؛ (ب) ۱۹kWر۱

۵۷. (الف) ۷۴۳ر۰ ؛ (ب) تقدم فاز ؛ (پ) بار خازنی ؛ (ت) نه ؛ (ث) بله، نه، بله ؛ (ج) ۴Wر۳۳

۵۹. (الف) ۱۱۷µF ؛ (ب) صفر ؛ (پ) ۰Wر۹۰، صفر ؛ (ت) صفر درجه، ۹۰ درجه ؛ ۱، صفر

۶۱. (الف) ۵۹Aر۲ ؛ (ب) ۸Vر۳۸، ۱۵۹V، ۲۲۴V، ۲Vر۶۴، ۰Vر۷۵ ؛ (پ) ۱۰۰W برای R و صفر برای L و C

۶۳. (الف) ۴Vر۲ ؛ (ب) ۲mAر۳، ۱۶Aر۰

۶۵. ۱۰

فصل ۳۴

خودآزمایی‌ها

۱. (الف) (از شکل ۳۴ـ۵ استفاده کنید) در سمت راست مربع مستطیل، $\vec{E}$ در جهت منفی محور y است؛ در سمت چپ، $\vec{E}+d\vec{E}$ بزرگ‌تر و در همان جهت است؛ (ب) $\vec{E}$ به سمت پایین است. در سمت راست $\vec{B}$ در جهت منفی محور z است؛ در سمت چپ، $\vec{B}+d\vec{B}$ بزرگ‌تر و در همان جهت است.

۲. جهت مثبت محور x

۳. (الف) ثابت می‌ماند؛ (ب) کاهش می‌یابد

۴. الف، ت، ب، پ (صفر)

۵. الف

۶. (الف) نه؛ (ب) بله

پرسش‌ها

۱. (الف) جهت مثبت محور z؛ (ب) محور x

۳. (الف) همان مقدار ؛ (ب) افزایش می‌یابد ؛ (پ) کاهش می‌یابد

۵. منحنی c

۷. a، b، c

۹. هیچ‌کدام

۱۱. پرتو b

تمرین‌ها و مسأله‌ها

۱. (الف) ۵۰msر۰ ؛ (ب) ۴minر۸ ؛ (پ) ۴ر۲ ساعت ؛ (ت) ۵۵۰۰ سال پیش از میلاد

۳. (الف) ۵۱۵nm، ۶۱۰nm ؛ (ب) ۵۵۵nm، 5.41×10^{14}Hz، 1.85×10^{-15}s

۵. (الف) دائماً افزایش پیدا کند؛ (ب) مجموع اختلاف‌های میان زمان ظاهری خورگرفت و زمان‌های مشاهده شده از نقطهٔ x، شعاع مدار زمین

۷. 5.0×10^{-21}H

۹. $B_x=0$، $B_y=-6.7\times10^{-9}\cos[\pi\times10^{15}(t-x/c)]$، $B_z=0$، در دستگاه یکاهای SI

۱۱. ۱۰MJر۰

۱۳. $8.88\times10^{4}\text{m}^2$

۱۵. (الف) ۷nTر۱۶ ؛ (ب) ۱mW/m²ر۳۳

۱۷. (الف) ۷nTر۶ ؛ (ب) ۳mW/m²ر۵ ؛ (پ) ۷Wر۶

۱۹. (الف) ۸۷mV/m ؛ (ب) ۳۰nTر۰ ؛ (پ) ۱۳kW

۲۱. 1.0×10^{7}Pa

۲۳. 5.9×10^{-8}Pa

۲۵. (الف) ۱۰۰MHz ؛ (ب) ۰µTر۱، جهت محور z؛ (پ) ۱m⁻¹ر۲، 6.3×10^{8}rad/s ؛ (ت) ۱۲۰W/m²؛ (ث) 8.0×10^{-7}N، 4.0×10^{-7}Pa

۲۹. ۹mm/sر۱

۳۱. (ب) ۵۸۰nm

۳۳. (الف) ۹V/mر۱ ؛ (ب) 1.7×10^{-11}Pa

۳۵. ۱ر۳ درصد

۳۷. ۴ر۴W/m^2

۳۹. $\frac{2}{3}$

۴۱. (الف) ۲ ورقه ؛ (ب) ۵ ورقه

۴۳. ۱ر۴۸

۴۵. ۱ر۲۶

۴۷. ۱ر۰۷m

۵۳. ۱ر۲۲

۵۵. (الف) ۴۹ درجه ؛ (ب) ۲۹ درجه

۵۷. (الف) مرکز هر وجه را باید با یک قرص کدر به شعاع ۴ر۵mm پوشاند؛ (ب) در حدود ۰ر۶۳

۵۹. (الف) $\sqrt{1+\sin^2\theta}$ ؛ (ب) $\sqrt{2}$ ؛ (پ) پرتو نور از سمت راست خارج می‌شود ؛ (ت) هیچ نوری از سمت راست خارج نمی‌شود

۶۱. ۰ر۴۹ درجه

۶۳. (الف) ۱۵m/s ؛ (ب) ۸ر۷m/s ؛ (پ) بالاتر ؛ (ت) ۷۲ درجه

۶۵. ۰ر۱

نمایهٔ نامها

INDEX OF NAMES

آمپر، آندره‌ماری ۵ ، ۱۴ ، ۲۱۹ ، ۲۹۳

Ampère, André Marie (1775-1836)

فیزیکدان و ریاضیدان فرانسوی. بنیانگذار الکترودینامیک است و قانون آمپر را فرمولبندی کرد. **آمپر**، یکای SI جریان الکتریکی به نام اوست.

آووگادرو، آمادئو ۱۲۶ **Avogadro**, Amadeo (1776-1856)

شیمیدان و فیزیکدان ایتالیایی. ارایهٔ نظریهٔ مولکولی گازها از مهم‌ترین کارهای اوست.

اسنل، ویلبرورت ۳۶۰ **Snell**, Willebrord (1591-1626)

ریاضیدان هلندی. قانون‌های مربوط به رابطهٔ میان زاویه‌های تابش و شکست نور را فرمولبندی کرد و فکر اندازه‌گیری زمین را با استفاده از روش مثلث‌بندی ارائه داد.

اورستد، هانس کریستیان ۲

Oersted, Hans Christian (1777-1851)

فیزیکدان و شیمیدان دانمارکی. استاد فیزیک دانشگاه کپنهاگ؛ او سطح علم در دانمارک را نسبت به کشورهای دیگر اروپا ارتقا داد؛ در حین تدریس در کلاس درس برای نخستین بار اثر مغناطیسی جریان الکتریکی را با منحرف شدن عقربهٔ مغناطیسی مشاهده کرد؛ در سال ۱۱۹۹/۱۸۲۰ با انتشار دادن مقاله‌ای وجود میدان مغناطیسی را در پیرامون سیم حامل جریان مورد تأیید قرار داد، و بدین ترتیب، اصل بنیادی الکترومغناطیس را کشف کرد.

اهم، گئورگ سیمون ۱۳۴ **Ohm**, Georg Simon (1787-1854)

فیزیکدان آلمانی. قانون اهم را دربارهٔ ارتباط مقاومت الکتریکی با ولتاژ و جریان الکتریکی کشف کرد؛ یکای SI مقاومت به نام اوست.

اینشتین، آلبرت ۳۴۶ **Einstein**, Albert (1879-1955)

فیزیکدان امریکایی (متولد آلمان). نتیجهٔ مطالعاتش روند بررسی‌های علمی را به کلی دگرگون کرد؛ نظریهٔ نسبیت را معرفی کرد؛ کاربرد نظریهٔ کوانتومی را بسط داد؛ در سال ۱۳۰۰/۱۹۲۱ به خاطر کشف قانون اثر فوتوالکتریک موفق به دریافت جایزهٔ نوبل فیزیک شد.

بروستر، دیوید ۳۶۶ ، ۳۶۷ **Brewster**, David (1781-1868)

فیزیکدان اسکاتلندی. قانون بروستر، دربارهٔ قطبش نور، را فرمولبندی کرد؛ در کشف بلورهای دو محوری سهیم بود.

بطلیموس، کلودیوس ۳۷۳ (قرن دوم میلادی) **Ptolemy**, Claudius

اخترشناس، جغرافیدان و مهندس یونانی ـ مصری در اسکندریه. منظومهٔ زمین مرکزی (فرضیهٔ مرکز جهان بودن زمین) را پیشنهاد کرد.

بور، نیلس ۲۸۲ **Bohr**, Niels (1885-1962)

فیزیکدان دانمارکی. او طراح یک مدل اتمی بود، در بسط نظریهٔ کوانتومی شرکت داشت و این نظریه را در ساختار اتمی نظریهٔ بور به کار برد. در سال ۱۳۰۱/۱۹۲۲ به خاطر کشف ساختار اتم‌ها و تابش‌های ناشی از آنها موفق به دریافت جایزهٔ نوبل فیزیک شد.

بولتزمن، لودویگ ادوارد ۲۸۷

Boltzmann, Ludwig Edward (1844-1906)

فیزیکدان نظری اتریشی. سهم مهمی در معرفی نظریهٔ جنبشی گازها داشت؛ قانون تقسیم مساوی انرژی را گسترش داد؛ معادلهٔ نشان دهندهٔ چگونگی توزیع انرژی یک گاز بین مولکول‌ها، به نام توزیع ماکسول بولتزمن را ارائه داد؛ از طریق معادله‌ای رابطهٔ میان آنتروپی و احتمال را بیان کرد.

بیو، ژان باتیست ۲۱۳ **Biot**, Jean Baptiste (1774-1862)

ریاضیدان و فیزیکدان فرانسوی. در مطالعات قطبش سنجی پیشگام بود و قطبش دایره‌ای نور را کشف کرد؛ در فرمولبندی قانون بیو ـ ساوار سهیم بود.

پاسکال، بلز ۳۵۳ **Pascal**, Blaise (1623-1662)

ریاضیدان، فیزیکدان و فیلسوف فرانسوی. او در نظریهٔ احتمال پیشگام بود؛ در مورد هندسهٔ مخروطات مطالعاتی انجام داد؛ در سال ۱۰۲۳/۱۶۴۴ ماشین حسابی اختراع کرد که می‌توانست عملیات جمع و تفریق را انجام دهد؛ به کارهای مهمی در فیزیک تجربی، به ویژه، در زمینهٔ فشار جوّ پرداخت؛ جوّسنج، منگنهٔ آبی و سُرنگ را اختراع کرد؛ **پاسکال**، یکای SI فشار به نام اوست.

پلانک، ماکس کارل ارنست لودویگ ۲۸۱

Planck, Max Karl Ernst Ludwig (1858-1947)

فیزیکدان آلمانی. با تحقیق در زمینهٔ ترمودینامیک و تابش جسم سیاه نظریهٔ کوانتومی را فرمولبندی کرد؛ در سال ۱۲۹۷/۱۹۱۸ به خاطر کشف کوانتوم‌های انرژی موفق به دریافت جایزهٔ نوبل فیزیک شد.

پوئین تینگ، جان هنری ۳۴۹ ، ۳۶۷

Poynting, John Henry (1852-1914)

فیزیکدان انگلیسی. ثابت گرانش را معین کرد و چگونگی کشیده شدن دُم دنباله‌دارها به برون‌سوی خورشید را توضیح داد؛ برای نخستین بار بردار پوئین تینگ و خواص آن را در ارتباط با انتقال انرژی موجهای الکترومغناطیسی در یکای سطح مورد بحث قرار داد.

تامسون، جوزف جان ۱۸۳ ، ۱۸۴

Thomson, Joseph John (1856-1940)

فیزیکدان انگلیسی. نشان داد که پرتوهای کاتودی شامل ذرات با بار منفی، یعنی الکترون‌ها، هستند؛ در سال ۱۲۸۵/۱۹۰۶ به خاطر پژوهش‌های نظری و تجربی در مورد رسانایی الکتریکی گازها موفق به دریافت جایزهٔ نوبل فیزیک شد.

ماکسول، جیمز کلرک ۲، ۲۱۹، ۲۹۲، ۲۹۳، ۳۴۲، ۳۴۶

Maxwell, James Clerk (1831-1879)

فیزیکدان اسکاتلندی. نظریهٔ الکترومغناطیسی نور و توزیع ماکسول دربارهٔ تندی‌های مولکولی گازها را فرمولبندی و قرص ماکسول را در ارتباط با دید رنگ‌های نور اختراع کرد؛ قضیه تقسیم مساوی انرژی را معرفی کرد.

میلیکان، رابرت اندروز ۳۲

Millikan, Robert Andrews (1868-1953)

فیزیکدان امریکایی. مقدار دقیق ثابت پلانک را معین کرد؛ آزمایش «قطرهٔ روغن» را برای اندازه‌گیری بار الکتریکی الکترون ترتیب داد؛ در مورد پرتوهای X و پرتوهای کیهانی به کارهایی دست زد؛ در سال ۱۹۲۳/۱۳۰۲ به خاطر کار در زمینهٔ بار بنیادی الکتریسیته و اثر فوتوالکتریک موفق به دریافت جایزهٔ نوبل فیزیک شد.

نیوتون، آیزاک ۳۵۲، ۳۵۴ **Newton**, Isaac (1642-1727)

دانشمند و ریاضیدان مشهور انگلیسی. آنالیز ریاضی را بنیان نهاد؛ نظریهٔ دینامیکی گرانش را پیشنهاد و سه قانون مهم حرکت را که پایهٔ مکانیک عملی هستند کشف کرد؛ به کشف‌هایی دربارهٔ اپتیک دست یافت؛ **نیوتون**، یکای SI نیرو به نام اوست؛ او از چهره‌های مشخص علمی قرن هفدهم میلادی است.

وات، جیمز ۱۳۷ **Watt**, James (1736-1819)

مهندس و مخترع اسکاتلندی. با بهتر کردن طرز کار ماشین بخار سبب شد که از این ماشین در کارهای تجاری استفاده شود؛ واژهٔ قوه اسب نخستین بار توسط او به کار برده شد؛ **وات**، یکای SI توان به نام اوست.

وان آلن، جیمز آلفرد ۱۲۴، ۱۸۹

Van allen, James Alfred (1914-   )

فیزیکدان امریکایی. استاد فیزیک دانشگاه‌های جانزهاپکینز؛ در سال ۱۹۵۸/۱۳۳۷، با نصب‌کردن یک شمارندهٔ گایگر بر روی ماهوارهٔ اکسپلورر I مغناطیس کره را در ناحیه‌ای واقع در چند صد کیلومتری سطح زمین کشف کرد. این ناحیه شامل الکترون‌ها و پروتون‌هایی است که در میدان مغناطیسی زمین به دام افتاده‌اند و **کمربندهای تابشی وان آلن** را تشکیل می‌دهند. او عضو چندین کمیتهٔ دولتی امریکا در ارتباط با اکتشافات فضایی بوده است.

وِبِر، ویلهلم ادوارد ۲۳۷ **Weber**, Wilhelm Eduard (1804-1891)

فیزیکدان آلمانی. وسایلی برای اندازه‌گیری کمیت‌های الکتریکی و مغناطیسی ترتیب داد؛ یکاهای الکتریکی و مغناطیسی مطلق را فرمولبندی کرد؛ **وِبِر**، یکای SI شار مغناطیسی به نام اوست.

ویتستون، چارلز ۱۷۴

Wheatstone, Charles (1802-1875)

فیزیکدان و مخترع انگلیسی. پل ویتستون را که وسیله‌ای برای مقایسهٔ مقاومت‌های الکتریکی است اختراع کرد؛ آزمایش‌هایی در زمینهٔ انتقال صوت انجام داد.

هال، ادوین هربرت ۱۸۵ **Hall**, Edwin Herbert (1855-1938)

فیزیکدان امریکایی. اثر هال را کشف کرد و راهنمای مطالعات در این زمینه و اثرهای گالوانو مغناطیسی و گرما مغناطیسی شد.

هرتز، هاینریش (رودولف) ۳۴۲

Hertz, Heinrich (rudolf) (1857-1894)

فیزیکدان آلمانی. کار اصلی‌اش مطالعهٔ موجهای الکترومغناطیسی بود؛ نخستین کسی بود که گسیل و دریافت موجهای رادیویی را به مرحلهٔ عمل درآورد؛ **هرتز**، یکای SI بسامد به نام اوست.

هلمهولتز، هرمان لودویگ فردیناند ۲۳۵

Helmholtz, Hermann Ludwig Ferdinand (1821-1894)

فیزیکدان، اندام‌شناس و فیزیولوژیست آلمانی. در زمینهٔ سیستم اعصاب و چشم و گوش انسان پژوهش‌های فیزیولوژیکی انجام داد؛ کارهایی نظری در مورد پایستگی انرژی انجام داد؛ دستگاه معاینهٔ ته چشم را اختراع کرد.

هِنری، جوزف ۲۵۲ **Henry**, Joseph (1797-1878)

فیزیکدان امریکایی. مطالعاتی در زمینه‌های القایش الکترومغناطیسی، پدیده‌های خورشیدی، هواشناسی و آکوستیک، انجام داد؛ **هانری** یکای SI القاییدگی به نام اوست.

فرهنگنامه GLOSSARY

آهن‌ربای دایمی permanent magnet
قطعه‌ای فولادی سخت یا مادهٔ آهن‌ربایی دیگری است که به شدت مغناطیده است و خاصیت آهن‌ربایی را به مدتی دراز در خود نگه می‌دارد.

ابررسانایی superconductivity
خاصیت مربوط به بسیاری از فلزات، آلیاژها و ترکیب‌های شیمیایی در دماهای نزدیک به صفر مطلق است که بر پایهٔ آن مقاومت ماده از میان می‌رود و ماده به شدت دیامغناطیس می‌شود.

اپتیک، نورشناخت optics
شاخه‌ای از فیزیک است که به مطالعهٔ پدیده‌های وابسته به تولید، تراگسیل و آشکارسازی تابش‌های الکترومغناطیسی در یک گسترهٔ طیفی به نام نور می‌پردازد و شامل ناحیه‌های نور فروسرخ، مرئی و فرابنفش است.

اپتیک هندسی geometrical optics
دانش مطالعهٔ نور در شرایط انتشار راستخط است؛ اعتبار خواص اپتیک هندسی و قانون‌های مربوط تا جایی است که ابعاد روزنه‌ها و اشیای کدر واقع در مقابل چشمه‌های نور از طول موج نور بزرگ‌تر باشند.

اثر هال Hall effect
هرگاه یک رسانای حامل جریان الکتریکی به طور عمود بر میدان مغناطیسی قرار گیرد، یک میدان الکتریکی به طور عرضی نسبت به راستای جریان در رسانا برقرار می‌شود.

الکترودینامیک کوانتومی quantum electrodynamics (QED)
نظریهٔ کوانتومی نسبیتی برهم کنش‌های الکترومغناطیسی است؛ این نظریه توصیف برهم کنش الکترون‌ها، میوئون‌ها و فوتون‌ها و در نتیجه، نظریه زیرساختی همهٔ پدیده‌های الکترومغناطیسی را به دست می‌دهد؛ **نظریهٔ کوانتومی نور** نیز نامیده می‌شود.

استقامت دی‌الکتریکی dielectric strength
بیشینهٔ میدان الکتریکی‌ای است که یک ماده بدون گسیختگی می‌تواند تحمل کند؛ یکای این کمیت معمولاً با کیلوولت بر میلی‌متر ضخامت ماده مشخص می‌شود؛ **استقامت الکتریکی** نیز نامیده می‌شود.

الکتروستاتیک electrostatics
دانش مطالعهٔ بارهای الکتریکی ساکن، میدان‌ها و پتانسیل‌های الکتریکی ناشی از بارهاست.

الکترومغناطیس electromagnetism
شاخه‌ای از فیزیک است که به مشاهدات و قانون‌های وابسته به الکتریسیته و مغناطیس، و نیز خاصیت مغناطیسی حاصل از جریان الکتریکی، مربوط می‌شود.

الکترون‌های رسانش conduction electrons
الکترون‌های لایه‌های خارجی اتم‌ها هستند و به نوار رسانش یک مادهٔ جامد مربوط می‌شوند، که می‌توانند تحت اثر میدان الکتریکی اعمال شده به ماده حرکت کنند و جریان الکتریکی را به وجود آورند.

الکترونیک electronics
شاخه‌ای از دانش و فنّاوری است که به مطالعهٔ رسانش الکتریکی در گازها، خلأ یا مواد نیمرسانا و رسانا، و طرّاحی، ساخت، کنترل و کاربرد وسایل مربوط می‌پردازد.

انرژی پتانسیل الکتریکی electric potential energy
مقدار کاری است که در مقابل نیروهای الکتریکی باید روی یک سیستم بارهای الکتریکی انجام داد تا بارها از نقطهٔ مرجع (واقع در بینهایت) بیایند و به صورت پیکربندی مورد نظر گردآوری شوند.

بازتاب داخلی کلی، بازتاب کلی total internal reflection
هرگاه زاویهٔ تابش در محیط با ضریب شکست بالاتر، از زاویهٔ بحرانی تجاوز کند پرتوهای نور روی فصل مشترک دو محیط شفاف به طور کامل بازتابیده می‌شوند. این پدیده را بازتاب داخلی کلی می‌نامند.

بازتاب نور reflection of light
خاصیت برگشت پرتوهای نور از مرز یا فصل مشترک میان دو محیط شفاف یا کدر است.

بردار پوئین تینگ Poynting vector
برداری است که شار گذرندهٔ آن از یک سطح بیان کنندهٔ توان موج الکترومغناطیسی لحظه‌ای گسیل شده از یکای سطح است؛ برابر است با حاصل‌ضرب برداری میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی در هر نقطه تقسیم بر $m_\circ$ ؛ جهت این بردار در هر نقطه جهت پیشروی موج الکترومغناطیسی و جهت انتقال انرژی در آن نقطه را به دست می‌دهد.

پارامغناطیس paramagnetism
خاصیت موادی است که در میدان مغناطیسی در راستای میدان و متناسب با بزرگی میدان مغناطیده می‌شوند (به‌جز در دماهای بسیار پایین و میدان‌های بسیار قوی)؛ هرگاه مادهٔ پارامغناطیس در یک میدان مغناطیسی نایکنواخت قرار گیرد، از ناحیهٔ با میدان ضعیف‌تر به سمت ناحیهٔ با میدان قوی‌تر جذب می‌شود.

پاشندگی نور dispersion of light
پدیده‌ای است که از وابسته بودن ضریب شکست یک محیط شفاف به طول موج نور در خلأ ظاهر می‌شود؛ محیط شفافی که این خاصیت را دارد **پاشنده** نامیده می‌شود.

پایستگی انرژی energy conservation

در یک سیستم منزوی انرژی نه می‌تواند آفریده شود و نه می‌تواند نابود شود، بلکه تنها می‌تواند از شکلی به شکل دیگر تبدیل شود، به بیان دیگر، انرژی کل یک سیستم منزوی همیشه پایسته است.

پتانسیل الکتریکی electric potential

پتانسیل الکتریکی در یک نقطه برابر با مقدار کاری است که در مقابل نیروهای الکتریکی باید انجام داد تا یکای بار الکتریکی از نقطهٔ مرجع (واقع در بینهایت) به نقطهٔ مورد نظر آورده شود؛ یکای SI آن ولت (V) است؛ **پتانسیل الکتروستاتیکی** نیز نامیده می‌شود.

پتانسیل فروشکست breakdown potential

ولتاژی است که به ازای آن در یک مادهٔ دی‌الکتریک فروریزش الکتریکی رخ می‌دهد.

پرتو نور light ray

خطی فرضی است که به طور عمود بر جبهه‌های موج و در جهت انتشار نور رسم می‌شود؛ مدل پرتوی نور ماهیت موجی نور را نقض نمی‌کند و به کمک این مدل می‌توان پدیده‌های بازتاب و شکست نور و تشکیل شدن تصویر به وسیلهٔ آینه‌ها و عدسی‌ها را توضیح داد.

پیک آپ pickup

۱. وسیله‌ای است که صوت یا هر اطلاعات دیگر را به علایم الکتریکی تبدیل می‌کند، مانند میکروفون یا دستگاه ضبط تلویزیونی.

۲. کمینهٔ جریان، ولتاژ یا توانی است که عمل مورد نظر در یک رله را کامل می‌کند.

تار نوری، فیبر نوری optical fiber

رشته‌ای دراز باریک از سیلیس مذاب یا مواد شفاف دیگر است، که در انتقال پیام‌ها و علایم از طریق نور به کار می‌رود؛ **موجبرنوری** نیز نامیده می‌شود.

تشدید resonance

۱. پدیده‌ای است که در یک سیستم فیزیکی تحت تأثیر یک نیروی راه‌انداز متناوب خارجی ظاهر می‌شود؛ در این پدیده دامنهٔ حاصل از نوسان سیستم در موقع نزدیک شدن بسامد نیروی راه‌انداز به بسامد طبیعی نوسان آزاد سیستم، زیاد می‌شود.

۲. در یک مدار RLC جریان متناوب تشدید هنگامی روی می‌دهد که بسامد زاویه‌ای منبع نیروی محرک الکتریکی با بسامد زاویه‌ای طبیعی مدار برابر و اختلاف فاز میان نیروی محرک منبع و جریان مدار صفر باشد.

تفنگ الکترونی electron gun

سیستمی متشکل از چند الکترود در یک لامپ پرتوهای کاتودی است که باریکه‌ای از الکترون‌ها را فراهم می‌کند؛ الکترون‌ها پس از گسیل شدن از کاتود توسط آنود شتاب پیدا می‌کنند و آنگاه چند استوانهٔ تغذیه شده با ولتاژهای مناسب آنها را به صورت باریکه‌ای کانونی شده در می‌آورد.

تندی سوق drift speed

تندی متوسط پیشروی الکترون‌ها یا یون‌ها در یک محیط است.

توان الکتریکی electric power

آهنگ (زمانی) تبدیل انرژی الکتریکی به صورت‌های دیگر انرژی است و برابر است با حاصل‌ضرب جریان در اختلاف پتانسیل الکتریکی؛ یکای SI آن وات (W) است.

ثابت دی‌الکتریک dielectric constant

در یک محیط همسانگرد، نسبت ظرفیت یک خازن محتوی دی الکتریک به ظرفیت آن خازن با دی الکتریک خلاء، است.

جریان القایی induced current

جریان تولید شده در یک رسانا در اثر تغییر زمانی میدان مغناطیسی پیرامون رساناست.

جریان الکتریکی electric current

بار الکتریکی خالص گذرنده از هر مقطع یک رسانا در یکای زمان است؛ یکای SI آن آمپر (A) است.

جریان متناوب alternating current (ac)

جریانی است که در یک رسانا جهتش به طور متناوب عوض می‌شود؛ این اصطلاح معمولاً در مورد جریان برق شهر به کار می‌رود که برحسب زمان به‌طور سینوسی و با بسامد ۵۰Hz (یا ۶۰Hz) تغییر می‌کند.

جریان مستقیم direct current (dc)

جریان الکتریکی‌ای است که در یک رسانا فقط در یک سو جاری می‌شود؛ این جریان معمولاً با جریان متناوب مقایسه می‌شود.

چگالی انرژی energy density

انرژی یکای حجم یک محیط است؛ در حالت میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی انرژی ذخیره شده در محیط است که این میدان‌ها را به وجود می‌آورد.

چگالی جریان current density

جریان الکتریکی گذرنده از یکای سطح مقطع یک رساناست؛ کمیتی برداری است.

خازن capacitor

وسیله‌ای شامل دو رسانای فلزی موازی به نام صفحه است، که با یک دی‌الکتریک به فاصلهٔ معینی از هم نگه داشته شده‌اند؛ این وسیله دارای ظرفیتی است که می‌تواند در خود انرژی الکتریکی ذخیره کند؛ خازن، در حالت پایا جریان مستقیم را عبور نمی‌دهد، اما جریان متناوب را تا حدی که به ظرفیت آن و بسامد جریان بستگی دارد از خود عبور می‌دهد؛ صفحه‌های خازن می‌توانند به صورت تخت، استوانه‌ای یا کروی باشند.

خازن صفحه ـ موازی parallel – plate capacitor

خازنی است شامل دو صفحهٔ فلزی موازی که محتوی ماده‌ای دی الکتریک در فضای میان صفحه‌هاست.

دوقطبی الکتریکی electric dipole

ماده یا مولکولی که در آن توزیع بارهای الکتریکی چنان است که مرکزهای بارهای مثبت و منفی برهم منطبق نیستند؛ مانند مولکول آب.

دیامغناطیس diamagnetism
خاصیت موادی است که آهن‌ربا آنها را دفع می‌کند؛ هرگاه مادهٔ دیامغناطیس در یک میدان مغناطیسی نایکنواخت قرار گیرد، از ناحیهٔ با میدان قوی‌تر به سمت ناحیهٔ با میدان ضعیف‌تر رانده می‌شود.

رسانندگی ویژه conductivity
در یک ماده، نسبت چگالی جریان الکتریکی به میدان الکتریکی اعمال شده است؛ **رسانندگی ویژهٔ الکتریکی** نیز نامیده می‌شود.

رنگین کمان rainbow
یکی از پدیده‌هایی است که در اثر پاشندگی نور خورشید توسط قطره‌های آب (باران) ظاهر می‌شود.

زاویهٔ انحراف کمینه angle of minimum deviation
کمترین زاویهٔ انحراف میان پرتو فرودی و پرتو خروجی در یک منشور است.

زاویهٔ انحراف میدان field declination
زاویهٔ میان راستای شمال جغرافیایی با مؤلفهٔ افقی میدان مغناطیسی (در طرف راست یا طرف چپ) در هر نقطه از سطح زمین است.

زاویهٔ بحرانی، زاویهٔ حد critical angle
در یک محیط شفاف با ضریب شکست معین، زاویهٔ تابشی است که به ازای آن زاویهٔ شکست در محیط با ضریب شکست کمتر، ۹۰ درجه است.

زاویهٔ بروستر Brewster angle
زاویهٔ تابش نور به سطح آب، یا هر دی الکتریک دیگر، است وقتی که به ازای آن پرتو بازتاب بر پرتو شکست عمود باشد؛ در این حالت پرتو بازتاب در راستای عمود بر صفحهٔ تابش قطبیده است.

زاویهٔ فاز phase angle
اختلاف میان فاز یک کمیت متغیر سینوسی با فاز کمیت سینوسی دیگر با بسامد یکسان است؛ **اختلاف فاز** نیز نامیده می‌شود.

زاویهٔ میل میدان field inclination
زاویهٔ میان صفحهٔ افقی با راستای میدان مغناطیسی (در بالا یا پایین) در هر نقطه از سطح زمین است.

سطح هم پتانسیل equipotential surface
سطحی که در تمام نقاط روی آن پتانسیل الکتریکی یکسان است؛ این سطح همیشه بر خطهای میدان الکتریکی عمود است.

شکست نور refraction of light
تغییر کردن راستای پرتو نور در موقع عبور از فصل مشترک دو محیط شفاف به طور مایل، و وارد شدن به محیطی با ضریب شکست نور متفاوت، است.

صفحهٔ تابش plane of incidence
صفحه‌ای است که در برخورد یک پرتو تابش به فصل مشترک دو محیط شفاف شامل پرتو تابش و خط عمود بر فصل مشترک در نقطهٔ تابش است؛ راستای انتشار موج تابشی در این صفحه واقع است.

صفحهٔ نوسان plane of oscillation
صفحهٔ شامل بردارهای الکتریکی موج الکترومغناطیسی است.

ضریب توان power factor
نسبت توان متوسط (یا فعال) به توان ظاهری (حاصل‌ضرب ولتاژ rms در جریان rms)، یا نسبت مقاومت به امپدانس، در یک مدار جریان متناوب است.

ضریب دمایی temperature coefficient
تغییر نسبی یک کمیت فیزیکی (مانند مقاومت الکتریکی یک ماده) به ازای تغییر یک درجه دماست.

ضریب شکست index of refraction
ضریب شکست یک محیط شفاف برابر است با نسبت تندی نور در خلاء به تندی نور در آن محیط.

طیف (نور) مرئی visible spectrum
ناحیه‌ای از طیف موجهای الکترومغناطیسی است که شبکیهٔ چشم نسبت به آن حساس است. این ناحیه شامل تابش‌های با طول موج‌های از حدود ۴۰۰nm (نور بنفش) تا حدود ۷۰۰nm (نور سرخ) است.

ظرفیت capacitance
در یک خازن، نسبت بار الکتریکی یکی از صفحه‌ها به اختلاف پتانسیل میان صفحه‌هاست؛ یکای SI آن **فاراد** (F) است.

عدد کوانتومی quntum number
یکی از مجموعه عددهای توصیف کنندهٔ حالت‌های کوانتومی ممکن یک سیستم فیزیکی است. مانند **عدد کوانتومی اصلی** یا **عدد کوانتومی مغناطیسی اسپینی**.

عنصر مداری circuit element
هر وسیلهٔ الکتریکی، نظیر مقاومت، خازن، القاگر و مولد است، که مشخصات الکتریکی معین دارد و شامل پایانه‌هایی است که به کمک آنها می‌تواند به عنصرهای دیگر مدار وصل شود.

فازور phasor
بردار چرخانی است که برای نمایش دادن یک کمیت متغیر سینوسی به کار می‌رود؛ طول بردار نمایشگر دامنهٔ کمیت، زاویهٔ آن نسبت به محور مرجع x در هر لحظه نمایشگر فاز حرکت و تصویر آن روی محور y نمایشگر معادلهٔ کمیت سینوسی برحسب زمان است.

فرومغناطیس ferromagnetism
خاصیت برخی فلزات، مانند آهن، کبالت، نیکل، و آلیاژهای شامل این عنصرهاست، که در آنها گشتاورهای مغناطیسی درونی به گونه‌ای خودبه‌خود هم راستا می‌شوند؛ ثابت تراوایی مادهٔ فرومغناطیس به نحو قابل ملاحظه‌ای بیشتر از ثابت تراوایی خلاء است؛ هرگاه مادهٔ فرومغناطیس در یک میدان مغناطیسی نایکنواخت قرار گیرد، از ناحیهٔ با میدان ضعیف‌تر به سمت ناحیهٔ با میدان قوی‌تر جذب می‌شود.

فشار تابشی radiation pressure
فشار وارد شده به اشیایی که در معرض تابش الکترومغناطیسی واقع می‌شوند.

فیزیک کلاسیک classical physics

شامل بخش‌هایی از پدیده‌های طبیعی است که دربارهٔ آنها روش‌های فیزیکی از گذشته‌های دور قابل به کار بستن بوده‌اند؛ به عبارت دیگر، فیزیک کلاسیک بخش‌هایی را در برمی‌گیرد که پیش از اعلام نظریه‌های کوانتومی و نسبیت در آغاز سدهٔ بیستم، گسترش یافته‌اند؛ قانون‌های نیوتون دربارهٔ حرکت به فیزیک کلاسیک مربوط می‌شوند.

فیزیک کوانتومی quantum physics

به طور کلی، دانش مطالعهٔ جهان میکروسکوپیک است، که به عنوان **مکانیک کوانتومی** و **نظریهٔ کوانتومی** نیز شناخته شده است.

فیزیک نیمرسانا semiconductor physics

بخشی از فیزیک است که به مطالعهٔ نیمرساناها و انواع آنها و ساختار وسایل نیمرسانا، از قبیل دیودها و ترانزیستورها، می‌پردازد؛ دانش و فنّاوری رو به گسترش الکترونیک امروز مرهون مطالعات گستردهٔ نظری و تجربی در زمینهٔ فیزیک نیمرساناهاست.

قانون آمپر Ampère's law

۱. قانونی است که میدان مغناطیسی حاصل از جریان الکتریکی معین در یک نقطه را برحسب عنصرهای جریان و مکان آنها به دست می‌دهد.

۲. قانونی است که انتگرال خطی روی مسیر بسته‌ای از میدان مغناطیسی حاصل از جریان الکتریکی معین را برحسب جریان کل احاطه شده در مسیر به دست می‌دهد.

قانون القایش فارادی، قانون فارادی Faraday's law of induction

قانونی است که بنا به آن نیروی محرک الکتریکی القا شده در یک مدار در اثر میدان مغناطیسی متغیر، برابر است با آهنگ زمانی تغییر شار مغناطیسی مرتبط با مدار، با علامت منفی؛ **قانون القایش الکترومغناطیسی** نیز نامیده می‌شود.

قانون بیو ـ ساوار Biot–Savart law

قانونی است که میدان مغناطیسی حاصل از یک سیم حامل جریان الکتریکی ثابت را به دست می‌دهد.

قانون جریان کیرشهوف Kirchhoff's current law (KCL)

قانونی است که بنا به آن در هر لحظه در یک نقطه از مدار، مجموع مقادیر لحظه‌ای جریان‌های وارد شده به آن نقطه برابر است با مجموع مقادیر لحظه‌ای جریان‌های خارج شده از آن نقطه؛ **قانون اول کیرشهوف** نیز نامیده می‌شود.

قانون کوری Curie's law

قانونی است که بنا به آن مغناطش بیشتر مواد پارامغناطیس متناسب با عکس دمای مطلق ماده است.

قانون کولن Coulumb's law

قانون بیان کنندهٔ نیروی جاذبه یا دافعهٔ میان دو بار الکتریکی است؛ این نیرو که نیروی کولنی نام دارد، در راستای خط واصل دو بار وارد می‌شود و متناسب با حاصل‌ضرب بزرگی دو بار و عکس مجذور فاصلهٔ میان بارهاست.

قانون لنز Lenz's law

جریان القایی در جهتی برقرار می‌شود که میدان مغناطیسی ناشی از جریان با تغییر شار مغناطیسی القا کنندهٔ جریان مخالفت می‌کند.

قانون ولتاژ کیرشهوف Kirchhoff's voltage law (KVL)

قانونی است که بنا به آن در هر لحظه در حین دور زدن یک حلقهٔ بسته از مدار در یک جهت، مجموع خیز ولتاژها برابر است با مجموع افت ولتاژها؛ **قانون دوم کیرشهوف** نیز نامیده می‌شود.

قانون‌های بازتاب laws of reflection

۱. پرتوهای تابش، بازتاب و خط عمود بر سطح بازتابنده در نقطهٔ تابش، در یک صفحه واقع‌اند.

۲. زاویهٔ بازتاب با زاویهٔ تابش برابر است.

قانون‌های شکست laws of refraction

۱. پرتوهای تابش، شکست و خط عمود بر فصل مشترک دو محیط شفاف در نقطهٔ تابش، در یک صفحه واقع‌اند.

۲. هنگام عبور نور از یک محیط شفاف به محیط شفاف دیگر نسبت سینوس زاویهٔ تابش به سینوس زاویهٔ شکست مقداری ثابت است.

تطبش polarization

۱. فرایند جابه‌جا شدن بارهای الکتریکی مقید مثبت و منفی در یک جسم نسبت به هم در اثر اعمال کردن میدان الکتریکی است.

۲. کمیتی است برداری برابر با گشتاور دوقطبی الکتریکی در یکای حجم یک ماده.

۳. پدیده‌ای است در برخی موجهای الکترومغناطیسی (یا موجهای عرضی دیگر) که در آن راستای میدان‌الکتریکی (یا راستای جابه‌جایی ارتعاش‌ها) ثابت می‌ماند، یا به گونهٔ معینی تغییر می‌کند.

لیزر laser

وسیله‌ای است که اساس آن را تقویت موجهای الکترومغناطیسی به شیوهٔ گسیل القایی تشکیل می‌دهد و در ناحیه‌های نور فروسرخ، مرئی و فرابنفش کار می‌کند؛ لیزر باریکهٔ نوری کاملاً تکفام، همدوس و جهتمند است که با مشارکت تعداد بسیار زیادی از اتم‌های ماده تابش می‌کند.

مادهٔ همسانگرد isotropic material

ماده‌ای است که خاصیت‌های آن به راستایی که در طول آن این خاصیت‌ها اندازه‌گیری می‌شوند بستگی ندارد.

مغناطش magnetization

خاصیت مغناطیسی شدن یک ماده است؛ کمیتی است برداری برابر با گشتاور مغناطیسی در یکای حجم یک ماده.

مقاومت ویژه resistivity

مقاومت ظاهر شده توسط یک ماده در مقابل عبور جریان الکتریکی ضربدر مساحت مقطع به ازای یکای طول مسیر جریان است؛ عکس رسانندگی ویژه است؛ **مقاومت ویژهٔ الکتریکی** نیز نامیده می‌شود.

مکانیک کوانتومی quantum mechanics

بخش عمده‌ای از فیزیک نوین است که شامل نظریه‌ای دربارهٔ ماده، تابش الکترومغناطیسی و برهم‌کنش میان ماده و تابش است؛ این نظریه تعمیمی از فیزیک کلاسیک است و در قلمرو پدیده‌های اتمی و زیراتمی جانشین آن می‌شود؛ به عنوان **نظریهٔ کوانتومی** نیز شناخته شده است.

موج الکترومغناطیسی عرضی

transverse electromagnetic wave (TEM wave)

در یک محیط همسانگرد و همگن، این موج شامل بردارهای میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی است که در تمام نقاط محیط برهم و بر راستای انتشار موج عمودند.

موجهای الکترومغناطیسی electromagnetic waves

موجهایی حامل انرژی تابشی هستند؛ با نوسان‌های جداگانهٔ میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی مشخص و با تندی نور در خلاء منتشر می‌شوند؛ شامل موجهای رادیویی، تلویزیونی، نور فروسرخ، نور مرئی، نورفرابنفش و پرتوهای X، گاما و کیهانی هستند.

میدان الکتریکی electric field

یکی از میدان‌های بنیادی طبیعت است، که وسیلهٔ جذب شدن یا دفع شدن یک ذرهٔ باردار توسط ذرهٔ باردار دیگر می‌شود؛ وابسته به یک موج الکترومغناطیسی یا یک میدان مغناطیسی متغیر است؛ برابر با نیروی وارد بر یکای بار آزمون است.

میدان مغناطیسی magnetic field

یکی از میدان‌های بنیادی طبیعت است، که در فضای پیرامون یک آهن‌ربا یا یک رسانای حامل جریان الکتریکی به وجود می‌آید؛ به بارهای در حال حرکت در میدان مغناطیسی یک نیروی جانبی وارد می‌شود.

میکروموج microwave

یک موج الکترومغناطیسی است که دارای طول موج‌های بین ۰٫۰۰۳m تا ۰٫۳m، متناظر با بسامدهای ۱۰۰GHz تا ۱GHz است؛ اما مرز متمایز کننده‌ای میان میکروموج و موج‌های فروسرخ و رادیویی وجود ندارد.

نور تکفام monochromatic light

نور تکرنگی است که دارای طول موج‌های محدود به یک گسترهٔ با پهنای بسیار باریک است.

نور سفید white light

نوری است که شامل تمام طول موج‌های طیف نور مرئی است.

نور قطبیده polarized light

تابش الکترومغناطیسی قطبیده است که بسامد آن در ناحیهٔ اپتیکی قرار دارد.

نوسان میرا damped oscillation

حرکتی نوسانی است که در آن دامنهٔ نوسان با گذشت زمان کاهش پیدا می‌کند.

نیروی محرک الکتریکی electromotive force (emf)

اختلاف پتانسیل ایجاد شده توسط چشمه‌های انرژی الکتریکی است که می‌تواند جریان الکتریکی را در مدارهای خارجی راه بیندازد؛ یکای SI آن **ولت** (V) است.

نیروی محرک الکتریکی القایی induced electromotive force

نیروی محرک الکتریکی حاصل از حرکت کردن یک رسانا در میدان مغناطیسی به گونه‌ای که رسانا خط‌های میدان مغناطیسی را قطع کند.

نیروی محرک الکتریکی خودالقاییده self–induced emf

نیروی محرک الکتریکی ایجاد شده در یک مدار در اثر تغییر کردن جریان آن مدار برحسب زمان است.

همسازی امپدانس impedance matching

شرطی است که بنا به آن امپدانس بار خارجی متصل به یک مدار باید با امپدانس چشمهٔ ولتاژ (یا امپدانس خروجی یک تقویت کننده) برابر باشد تا بیشینهٔ توان از چشمه (یا تقویت کننده) به بار خارجی منتقل شود.

DICTIONARY | واژه‌نامه

ammeter	آمپرسنج
Amperian loop	حلقهٔ آمپری
analog ammeter	آمپرسنج مانسته، آمپرسنج قیاسی
analogy	مانستگی، شباهت
analyzer	تحلیل‌گر
angle of incidence	زاویهٔ تابش
angle of reflection	زاویهٔ بازتاب
angle of refraction	زاویهٔ شکست
angular frequency	بسامد زاویه‌ای
anticlockwise	پادساعتگرد
argument	شناسه، آرگومان
atmosphere 1	جوّ
atmosphere (atm) 2	اتمسفر (یکای فشار)
aurora	شفق قطبی
auroral oval	بیضی‌سان شفقی
block–spring system	دستگاه جسم ـ فنر
Bohr magneton	مگنتون بور
Brewster's law	قانون بروستر
bubble chamber	اتاقک حباب
capacitve load	بار خازنی
capacitive reactance	رآکتانس خازنی
cathod ray tube	لامپ پرتو کاتودی
charge carriers	حامل‌های بار
charged isolated conductor	رسانای منزوی باردار
charge distribution	توزیع بار (الکتریکی)
chromatic dispersion	پاشندگی رنگی
clockwise	ساعتگرد
coil	پیچه
comet	دنباله‌دار
computer	رایانه، کامپیوتر
cosine–square rule	قاعدهٔ مجذور ـ کسینوس
Curie constant	ثابت کوری
curled–straight right–hand rule	قاعدهٔ دست راست پیچ خورده ـ مستقیم
current–length element	عنصر طول ـ جریان
cyclotron	سیکلوترون
density	چگالی
digital ammeter	آمپرسنج رقمی
direction 1	راستا
direction 2	جهت، سو
displacement current	جریان جابه‌جایی
doping	آلایش
eddy current	جریان گردابی
effective speed	تندی مؤثر
electrical–mechanical analogy	مانستگی الکتریکی ـ مکانیکی
electrical resistance	مقاومت الکتریکی
electric breakdown	فروشکست الکتریکی
electric charge	بار الکتریکی
electric circuit	مدار الکتریکی
electric dipole antenna	آنتن دوقطبی الکتریکی
electric dipole moment	گشتاور دوقطبی الکتریکی
electric eel	مارماهی الکتریکی
electric flux	شار الکتریکی
electrocution	برق‌گرفتگی
electromagnet	آهن‌ربای الکتریکی
electromagnetic oscillations	نوسان‌های الکترومغناطیسی
electromagnetic rail gun	تفنگ ریلی مغناطیسی
electroplaque	لوحهٔ الکتریکی
elementary charge	بار بنیادی
energy method	روش انرژی
energy transfer	انتقال انرژی
exchange coupling	جفت شدگی تبادلی
external electric field	میدان الکتریکی خارجی
fibrillation	گرفتگی رشته‌های عضلانی
filter	پالایه، صافی
final	پایانی، نهایی
forced oscillation	نوسان واداشته
free–electron model	مدل الکترون آزاد
free space	فضای تهی
fractional half–width	نیم ـ پهنای نسبی
frequency	بسامد

magnetic monopole	تک قطبی مغناطیسی
magnetic potential energy	انرژی پتانسیل مغناطیسی
magnetic quantum number	عدد کوانتومی مغناطیسی
magnetizing current	جریان مغناطنده
mass spectrometer	طیف‌سنج جرم
maximum	بیشینه
Maxwell's equations	معادله‌های ماکسول
mean free time	زمان آزاد میانگین
memory	حافظه
microelectronics	میکروالکترونیک
minimum	کمینه
multimeter	چند سنجشگر، مالتی متر
mutual induction	القایش متقابل
natural angular frequency	بسامد زاویه‌ای طبیعی
normal 1	عمود
normal 2	بهنجار
one – half rule	قاعدهٔ یک ـ نیمه
on – off	وصل ـ قطع
orientation	سمتگیری
oscilloscope trace	رَد اسیلوسکوپی
pair production	تولید زوج
particle	ذره
period	دورهٔ تناوب، دوره
permeability constant	ثابت تراوایی
permittivity constant	ثابت گذردهی
phase constant	ثابت فاز
Planck constant	ثابت پلانک
plane wave	موج تخت
point source	چشمهٔ نقطه‌ای
polarized molecule	مولکول قطبیده
polarizer	قطبی‌گر
polarizing direction	راستای قطبنده
polarizing sheet	ورقهٔ قطبنده
Polaroid filters	پالایه‌های پلارویدی
pole face	قطبرُخ
polycrystalline solid	جامد چند بلورین
potential difference	اختلاف پتانسیل
potentiometer	پتانسیومتر، پتانسیل‌سنج
power transmisson line	خط انتقال توان (برق)
prism	منشور

Gauss' law	قانون گاؤس
geomagnetic north pole	قطب شمال زمین مغناطیسی
half–maximum level	تراز نیم ـ بیشینه
Helmholtz coil	پیچهٔ هلمهولتز
hystresis	پسمانی
ideal solenoid	سیملولهٔ آرمانی
incident beam of light	باریکهٔ نور فرودی
incident ray	پرتو تابش
induced dipole moment	گشتاور دوقطبی القایی
induced electric charge	بار الکتریکی القایی
induced magnetic field	میدان مغناطیسی القایی
inductance	القاییدگی
inductive load	بار القایی
inductor	القاگر
infrared	فروسرخ
initial	آغازی، اولی
in phase	همفاز
insulated	عایق‌بندی شده
intensity	شدت
interface	فصل مشترک
internal resistance	مقاومت درونی
International System of Units	دستگاه بین‌المللی یکاها (SI)
intrinsic magnetic field	میدان مغناطیسی ذاتی
isolated	منزوی
junction rule	قاعدهٔ پیوندگاه
laser beam	باریکهٔ لیزر
latitude	عرض جغرافیایی
light dimmer	کاهندهٔ نور
lightning	آذرخش
lightning stroke	صاعقه
light wave	موج نوری
loop rule	قاعدهٔ حلقه
loudspeaker	بلندگو
magma	ماگما، تفتال
magnetic domains	حوزه‌های مغناطیسی
magnetic field lines	خط‌های میدان مغناطیسی
magnetic flux linkage	ارتباط شار مغناطیسی
magnetic latitude	عرض جغرافیایی مغناطیسی

تپ، پالس	pulse
ضریب کیفیت	quality factor (Q)
کمیت کوانتیده	quantized quantity
کمربند تابشی	radiation belt
حافظهٔ با دسترسی کاتوره‌ای	random access memory (RAM)
حرکت کاتوره‌ای	random motion
پیکربندی مرجع	reference configuration
پرتو بازتاب	reflected ray
پرتو شکست	refracted ray
تیزه	ridge
دستگاه مختصات راستگرد	right-handed coordinate system
قاعدهٔ دست راست	right - hand rule
جذر میانگین مربعی	root mean square (rms)
پراکندگی	scattering
نمودار طرح‌وار	schematic diagram
خودالقایش	self-induction
عکس فوری	snapshot
منظومهٔ شمسی	solar system
سیملوله	solenoid
برق زدن، جرقه زدن	sparking
طیف	spectrum
پوستهٔ کروی	spherical shell
ثابت فنر	spring constant
مبدل کاهنده	step-down transformer
مبدل افزاینده	step-up transformer
اصل برهم نهی	superposition principle
سینکروترون	synchrotron
فنّاوری	technology
زمین ساخت	tectonic
رانش زمین ساختی	tectonic drift
دما	temperature
پایانه	terminal
بار آزمون	test charge
ثابت زمانی	time constant
چنبره	toroid
جذب کامل	total absorption
مبدل، ترانسفورماتور	transformer
تراگسیل شده	transmitted
شفاف	transparent
موج الکترومغناطیسی پیشرونده	traveling electromagnetic wave
فرابنفش	ultraviolet
میدان الکتریکی یکنواخت	uniform electric field
نور ناقطبیده	unpolarized light
نور مرئی	visible light
ولت‌سنج	voltmeter

INDEX نمایه

دربارهٔ طرح روی جلد

در حین فوران‌های پی‌در پی آتشفشان **ساکوراجیما** در ژاپن، درخش‌های تخلیهٔ الکتریکی (جرقه) متعددی در بالای دهانهٔ آتشفشان مشاهده می‌شود، که آسمان را روشن و صداهایی شبیه تندر گسیل می‌کنند. اما، این اثر نمودی از آذرخش حاصل از توفان تندری ابرهای حاوی قطره‌های آب در هنگام برخورد کردن به زمین نیست و چیزی متفاوت است.

ناحیهٔ بالای دهانهٔ آتشفشان چگونه باردار می‌شود و آیا راهی وجود دارد که دریابیم جرقه‌ها از دهانه بیرون می‌آیند یا به‌درون می‌روند؟

در فصل ۲۳ به این پرسش پاسخ داده خواهد شد.